Chapitre 3

Dynamique

3.1 Première loi de Newton (principe d'inertie)

Un objet en mouvement ne subit aucune action

ssi

son mouvement est rectiligne et uniforme ($\vec{a}(t) = \vec{0}\ \forall t$).

Référentiel d'inertie un référentiel dans lequel le principe d'inertie est valable.

3.2 Deuxième loi de Newton

Un objet en mouvement subit une action

ssi

sa vitesse est modifiée ($\vec{a} \neq \vec{0}$).

♢Pour un objet considéré, ⋄

$$\vec{F} = m\vec{a}\,,$$

♢où m est la masse de l'objet, $\vec{a}$ son accélération et $\vec{F}$ la somme des forces qu'il subit. ⋄

Force action qui modifie la vitesse de l'objet.

Symboles : $\vec{F}, \vec{S}, \vec{N}, \vec{T}, \vec{f}$; unité : $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}} = \mathrm{N}$ ("newton").

Remarque 3.1.
- La force est la cause, l'accélération la conséquence.
- Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{F}$ sont parallèles et de même sens.
- Plus l'objet contient de matière, plus il est difficile de modifier sa vitesse.

⋄

♢Si un objet est **au repos**, la somme des forces qu'il subit est nulle : ⋄

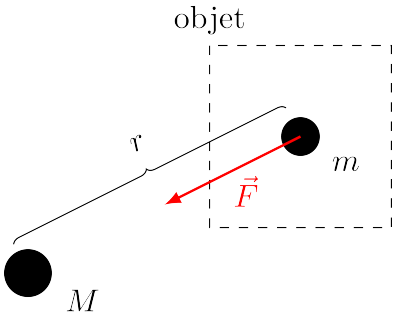
$$\text{objet statique} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{0}\ \forall\, t\,.$$

♢La réciproque est fausse : l'objet peut être en MRU. ⋄

3.3 Forces particulières

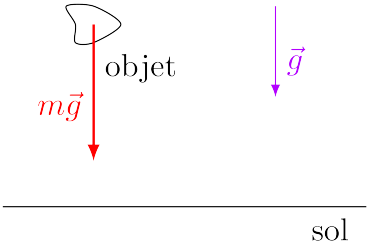
Forces à distance

1. Force de gravitation : toute masse est attirée par une autre masse



$$||\vec{F}|| = G\frac{Mm}{r^2}\,,$$

où $G \cong 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ est la constante gravitationnelle.
♢Près de la surface de la terre, la force de gravitation est appelée le poids. ⋄



$$\vec{F} = m\vec{g}\,,$$

où $\vec{g}$ est dirigé vers le centre de la terre et $g = ||\vec{g}|| \cong 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

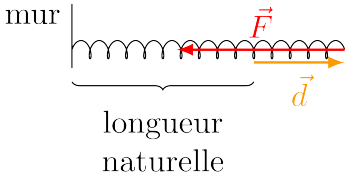
2. Force électrique : les charges électriques peuvent soit s'attirer, soit se repousser.
3. Force magnétique : une charge électrique en mouvement est déviée par un courant électrique.

Forces de contact

♢Les forces de contact sont exercées par traction, par pression ou par cisaillement. ⋄

Exemple 3.2. tension, soutien, frottement. ⋄

Cas particulier le ressort élastique.



La force élastique est opposée à la déformation $\vec{d}$ du ressort,

$$\vec{F} = -k\vec{d},$$

où la constante de raideur du ressort k mesure sa rigidité. Unité de k : $\mathrm{N\,m^{-1}}$.

3.4 Quantité de mouvement

♢Pour un objet de masse m et de vitesse $\vec{v}$, ⋄

Quantité de mouvement

$$\vec{P} = m\vec{v}, \quad \text{unité : kg m s}^{-1}.$$

♢Pour un objet formé de N parties de masses m_1, m_2,..., m_N de vitesses $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_N$, ⋄

Quantité de mouvement (totale)

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_N = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N\,.$$

♢La deuxième loi de Newton s'écrit alors ⋄

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}},$$

♢où $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N$ est la somme de toutes les forces exercées sur toutes les parties de l'objet. ⋄

3.5 Centre de masse

♢Pour un objet formé de N parties de masses m_1, m_2, ..., m_N repérées par leurs positions $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_N$, ⋄

Centre de masse

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m},$$

où $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$ est la masse totale de l'objet considéré.

♢Ainsi, ⋄

$$\vec{P} = m\vec{v}_{\mathrm{CM}}\,.$$

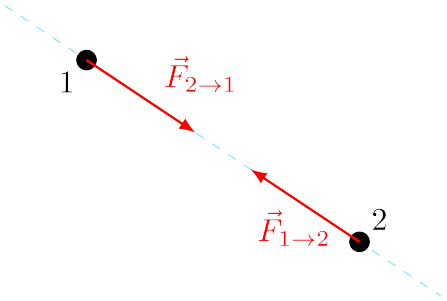
♢La quantité de mouvement de l'objet peut être vue comme celle d'une masse unique en mouvement située au CM. ⋄
♢La deuxième loi de Newton s'écrit alors ⋄

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}} = m\vec{a}_{\mathrm{CM}}\,.$$

♢Cette loi donne le mouvement du CM de l'objet soumis à des forces. ⋄

3.6 Troisième loi de Newton (action=réaction)

♢On observe que pour deux parties 1 et 2 d'un objet considéré, la force $\vec{F}_{1\to 2}$ que 1 exerce sur 2 et la force $\vec{F}_{2\to 1}$ que 2 exerce sur 1 sont ⋄



- de même support ;
- opposées ;
- de même norme ;

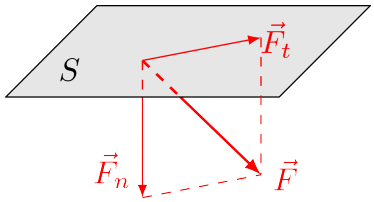
$$\vec{F}_{1\to 2} + \vec{F}_{2\to 1} = \vec{0}\,.$$

♢Les forces internes s'annulent donc deux à deux. Seules les **forces externes** sont déterminantes. ⋄
♢La deuxième loi de Newton s'écrit finalement ⋄

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \dot{\vec{P}} = m\vec{a}_{\text{CM}}\,.$$

3.7 Pression

♢Considérons une face S d'un objet et une force $\vec{F}$ exercée sur cette face. ⋄



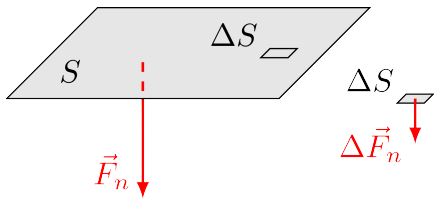
$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t\,.$$

♢$\vec{F}_n$ est normale à S et $\vec{F}_t$ est tangente à S. ⋄

Pression moyenne

$$p_{\text{moy}} = \frac{||\vec{F}_n||}{S}\,, \quad \text{unité : N m}^{-2} = \text{Pa (“pascal”)}\,.$$

♢En découpant S en petits morceaux ΔS, nous mettons en évidence la contribution $\Delta\vec{F}_n$ de la force normale $\vec{F}_n$ sur chaque ΔS : ⋄



$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \cdots$$
$$\vec{F}_n = \Delta \vec{F}_{n,1} + \Delta \vec{F}_{n,2} + \cdots$$

Pression (locale)

$$p(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{||\Delta \vec{F}_n||}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS}\,.$$

Remarque 3.3. la pression est

1. un scalaire positif, $p \geqslant 0$;
2. une fonction de l'espace et du temps, $p = p(\vec{r}, t)$.

◇

Cas particulier si la force normale est répartie uniformément sur la face S,

$$||\vec{F}_n|| = pS\,.$$

♢Autres unités de pression : ◇

- le bar : $1\,\text{bar} = 10^5\,\text{Pa} = 1000\,\text{hPa}$;
- l'atmosphère : $1\,\text{atm} = 1.013 \cdot 10^5\,\text{Pa}$;
- le millimètre de mercure : $1\,\text{atm} = 760\,\text{mmHg} = 1013\,\text{mbar} = 1013\,\text{hPa}$.

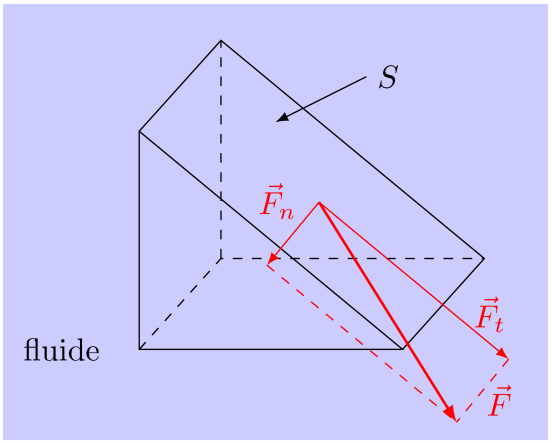
3.8 Hydrostatique

Définition d'un fluide

♢Un fluide est un matériau qui, contrairement à un solide, se transforme continuellement sous une contrainte tangentielle (cisaillement) arbitraire. Si la contrainte est relâchée, une déformation subsiste. ◇

♢L'hydrostatique concerne les fluides au repos. ◇

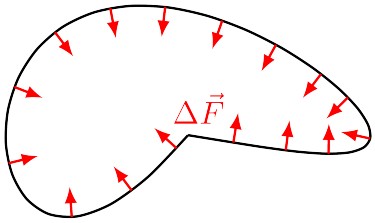
Forces dans un fluide au repos, loi de Pascal



♢Dans un fluide, considérons un petit volume (de fluide). ⋄
♢S représente une des faces du volume. ⋄
♢Le fluide environnant exerce une force $\vec{F}$ sur chaque face S : ⋄

$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t \,.$$

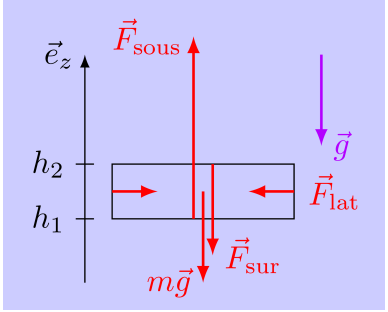
♢Comme le fluide est au repos, il n'exerce pas de cisaillement : $\vec{F}_t = \vec{0}$. Ainsi, la force exercée par le fluide sur une face du volume au repos est normale à la face ($\vec{F} = \vec{F}_n$). ⋄
♢Les forces qu'un fluide au repos exerce sur un corps immobile sont exclusivement normales. ⋄



Loi de Pascal l'intensité de la force exercée par le fluide sur une face ne dépend pas de l'orientation de la face.

Loi de l'hydrostatique

♢Considérons un fluide au repos, soumis à la gravitation. ⋄



♢Objet : parallélépipède rectangle de fluide entre deux niveaux h_1 et h_2. ♢
♢Forces : poids et forces de pression verticales et latérales. ♢
♢Newton : ♢

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{sur}} + \vec{F}_{\text{sous}} + \vec{F}_{\text{lat}} = \vec{0}\,.$$

♢Selon $\vec{e}_z$: ♢

$$-mg - F_{\text{sur}} + F_{\text{sous}} = 0\,.$$

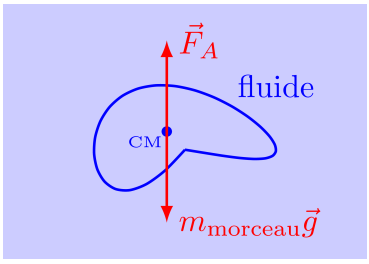
♢Ainsi, si le fluide est homogène ($\varrho_{\text{fluide}} = \text{cste}$), ♢

$$p(h_1) - p(h_2) = \varrho_{\text{fluide}}\, g(h_2 - h_1)\,.$$

♢La différence de pression entre deux niveaux dans un fluide est due au poids (par unité de surface) du fluide compris entre les niveaux. En particulier, la pression est identique en tous points d'un même niveau. ♢

Principe d'Archimède

♢La résultante des forces de pression est appelée poussée d'Archimède $\vec{F}_A$. ♢



♢Objet : morceau de fluide ♢
♢Forces : poids, résultante des forces de pression. ♢
♢Newton : ♢

$$m_{\text{morceau}}\,\vec{g} + \vec{F}_A = \vec{0}\,,$$

♢où $m_{\text{morceau}} = \rho_{\text{fluide}}\, V_{\text{morceau}}$. ♢
♢$\vec{F}_A$ est une force égale et opposée au poids du liquide dans V_{morceau}. ♢
♢Si nous remplaçons le morceau de fluide immergé par un autre objet au repos, de même volume immergé, les forces de pressions exercées par le fluide environnant ne changent pas. Ainsi, ♢

Poussée d'Archimède

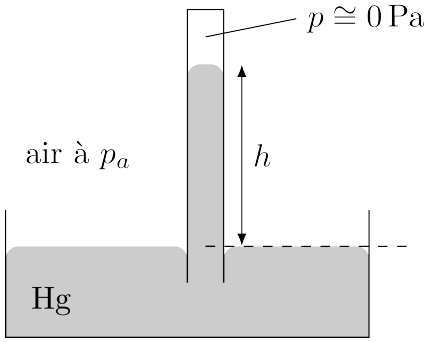
$$\vec{F}_A = -\rho_{\text{fluide}}\, V_{\text{immergé}}\,\vec{g}\,.$$

$\vec{F}_A$ est égale et opposée au poids du liquide déplacé.

Remarque 3.4. un corps flottant dans deux fluides subit deux poussées d'Archimède, données par le volume immergé dans chacun des fluides. ♢

Unité de pression : le mmHg

♢La pression atmosphérique p_a peut être donnée par la hauteur h d'une colonne de liquide (mercure) dans un tube : ♢



♢Au niveau de l'interface air-mercure, ♢

$$p_a = p_{\mathrm{Hg}} = \rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{p_a}{\rho_{\mathrm{Hg}}\, g}\,.$$

♢En particulier, à 1 atm, la hauteur de la colonne est de $760\,\mathrm{mm}$, d'où la relation ♢

$$\frac{h}{760\,\mathrm{mm}} = \frac{p_a}{1\,\mathrm{atm}}\,.$$

3.9 Deux intermèdes

Produit scalaire

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\,\cos\varphi\,.$$

♢Le produit scalaire est une mesure du parallélisme de deux vecteurs. ♢
♢Un produit scalaire $\vec{a}\cdot\vec{b}$ positif signifie que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont plutôt de même sens. ♢
♢Un produit scalaire $\vec{a}\cdot\vec{b}$ négatif signifie que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont plutôt de sens opposé. ♢
Remarque 3.5. $\vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{v}||^2$. ♢

Taux de variation d'un produit (algébrique, scalaire ou vectoriel)

$$\frac{d}{dt}(AB) = \dot{A}B + A\dot{B}$$

♢Pour un vecteur $\vec{v} = v\vec{e}_t$: ♢

$$\frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\vec{e}}_t\,.$$

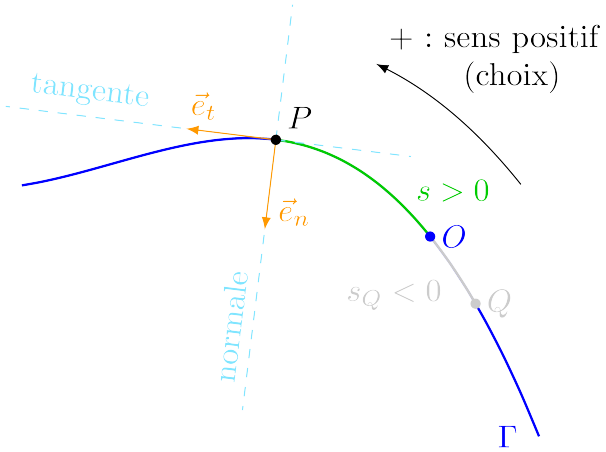
♢Pour le carré de sa norme : ♢

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 2\,\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\,.$$

3.10 Repère lié au mouvement

Abscisse curviligne, repère lié à la position sur la trajectoire

Abscisse curviligne s



♢On choisit $O \in \Gamma$ et un sens positif. ⋄
♢s est l'abscisse du point $P \in \Gamma$; unité : m. ⋄

$s > 0$: P est en avant de O selon le sens positif ;
$s < 0$: P est en arrière de O.

♢On définit pour chaque point de la trajectoire Γ un repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$ lié à ce point : ⋄

- $\vec{e}_t$ est un vecteur normé, tangent à Γ et donnant le sens positif de parcours,
- $\vec{e}_n$ est un vecteur normé, normal à Γ et indiquant l'intérieur (ou l'extérieur) du virage.

Vitesse scalaire

♢En tout point de Γ, la vitesse s'écrit ⋄

$$\vec{v} = v\vec{e}_t \,.$$

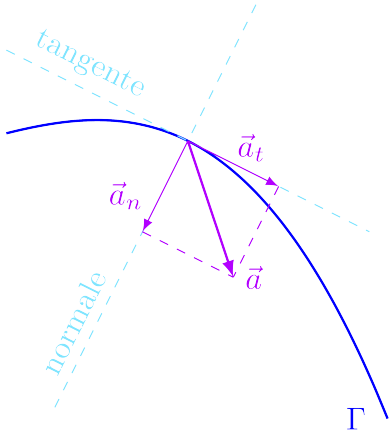
Vitesse scalaire

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s} \,, \quad \text{unité : m s}^{-1}.$$

♢La vitesse scalaire est le taux de variation de l'abscisse curviligne par rapport au temps. Elle représente la vitesse le long de Γ selon $\vec{e}_t$. ⋄

Accélérations tangentielle et normale

♢En tout point de Γ, l'accélération se décompose dans le repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$: ⋄



$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n\,.$$

- **Accélération tangentielle**

$$a_t = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v} = \ddot{s}\,, \quad \text{unité : m s}^{-2}\,.$$

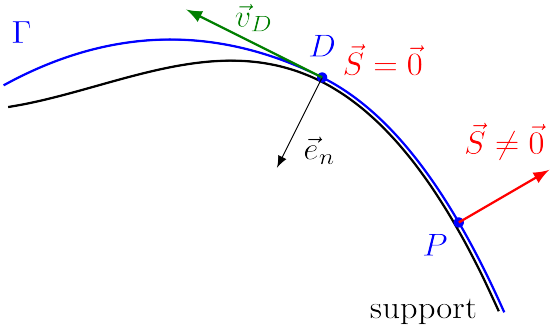
  L'accélération tangentielle est l'accélération le long de Γ selon $\vec{e}_t$. Elle est donc le taux de variation de la vitesse scalaire par rapport au temps.
- **Accélération normale**

$$|a_n| = \frac{v^2}{R}\,, \quad \text{unité : m s}^{-2}\,.$$

  R est le rayon de la trajectoire, c'est-à-dire le rayon du cercle osculateur (cercle passant par trois points de la trajectoire infiniment proches). L'accélération normale donne la variation de la direction de la vitesse $\vec{v}$.

  Remarque 3.6. Le vecteur $\vec{a}_n$ est toujours dirigé vers l'intérieur du virage. ◇

Exemple 3.7. condition de décrochement.
Un objet se déplaçant sur un support subit une force de soutien $\vec{S}$ normale au support.



Si l'objet quitte le support, le soutien devient nul au point de décrochement D :

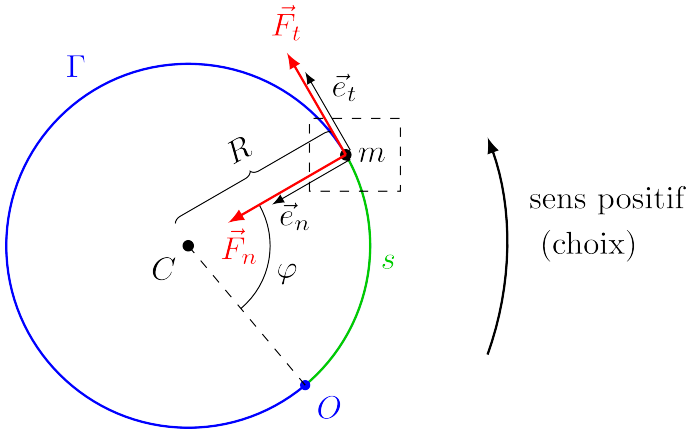
$$\vec{S} = \vec{0}\,;$$

il s'annule en particulier selon $\vec{e}_n$.

◇

Mouvement circulaire

♢Considérons un objet sur une trajectoire circulaire Γ de rayon R. Une force tangentielle peut rendre l'objet plus ou moins rapide. Une force normale est nécessaire pour imprimer le virage à l'objet. ♢



♢Objet : m ♢
♢Forces : tangentielle et normale ♢
♢Newton : ♢

$$\vec{F}_t + \vec{F}_n = m\vec{a}\,.$$

♢Pour une origine O sur Γ, l'objet est repéré par l'angle φ : ♢

$$s = R\varphi\,.$$

♢La vitesse scalaire est ♢

$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi}\,,$$

♢où $\dot{\varphi}$ est la vitesse angulaire de l'objet autour de C. C'est le taux de variation de la position angulaire φ par rapport au temps. Elle est souvent notée $\omega = \dot{\varphi}$. ♢
♢L'accélération tangentielle devient ♢

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s} = R\ddot{\varphi} = R\dot{\omega}\,,$$

♢où $\dot{\omega}$ est l'accélération angulaire de l'objet autour de C. C'est le taux de variation de la vitesse angulaire ω par rapport au temps. Elle est souvent notée $\gamma = \dot{\omega}$. ♢
♢Alors, ♢

$$v = R\omega\,, \quad a_t = R\gamma \quad \text{et} \quad |a_n| = \frac{v^2}{R} = R\omega^2\,.$$

♢Nous obtenons ainsi ♢

$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e}_t : & F_t = ma_t = mR\gamma, \\ \text{selon } \vec{e}_n : & F_n = ma_n = mR\omega^2. \end{cases}$$