Analyse 1

S. Friedli (CMS, EPFL)

2025-03-25

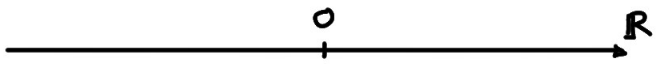
Table des matières

Chapitre 1

Nombres : $\mathbb{R}$

1.1 Introduction

On se représente souvent l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, comme tous les points d'une droite :

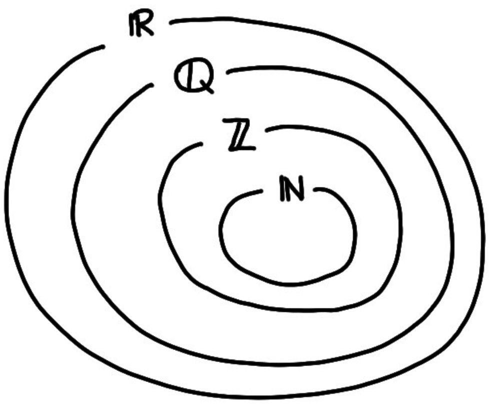


Même si cette image est utile pour l'intuition (en particulier pour se représenter des distances ou comparer des grandeurs), elle ne constitue évidemment pas une définition rigoureuse. En particulier, elle n'exprime pas le fait que les réels se prêtent bien au *calcul*, à savoir à la manipulation abstraite de quantités, qu'elles soient positives ou négatives, (très) petites ou (très) grandes.

De plus, les concepts fondamentaux de l'analyse (limite, continuité, dérivabilité, intégrabilité) se définissent précisément à l'aide de quelques notions simples qui utilisent toute la structure des réels.

Donc avant de commencer à présenter l'analyse à proprement parler, on se doit de définir quelles sont exactement les propriétés qui caractérisent $\mathbb{R}$. On listera en particulier les règles de calcul qui donneront aux réels la structure de ce qu'on appelle un *corps*.

1.1.1 Nombres et mesures



La construction des nombres commence, en général, avec l'introduction des **nombres naturels/entiers**, avec lesquels on peut déjà *compter* ("un mouton, deux moutons, trois moutons, ...") :

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Puis viennent s'ajouter les **entiers relatifs**, obtenus à partir de $\mathbb{N}$ en rajoutant toutes les quantités entières négatives ("il fait froid : -15 degrés!", ou "$3-7=-4$") :

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}\,.$$

L'étape suivante est de considérer en plus toutes les proportions possibles entre deux grandeurs entières ("un demi litre de lait", "une heure et quart", "deux tiers des étudiants",...), pour obtenir les **nombres rationnels** :

$$\mathbb{Q} = \left\{\tfrac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}\,, q \neq 0\right\}.$$

Les rationnels contiennent $\mathbb{Z}$ (prendre $q = 1$), donc ils contiennent des nombres arbitrairement grands, et peuvent être utilisés pour décrire des grandeurs astronomiques. Mais ils contiennent aussi des quotients aussi petits que l'on veut ($\frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{1}{100} = 0.01$, etc.), et peuvent donc être utilisés pour décrire des grandeurs atomiques ou subatomiques.

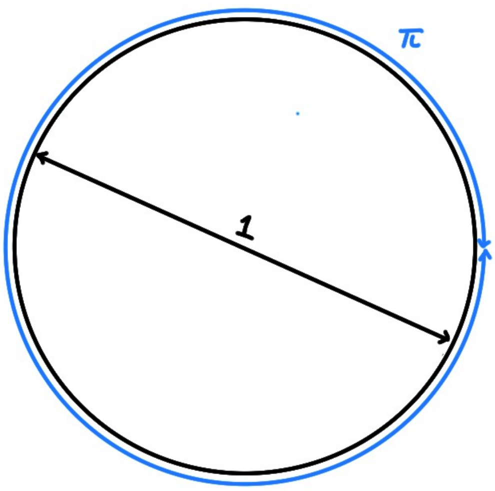
Pourquoi, alors, ne pas se contenter de garder $\mathbb{Q}$ pour faire de l'analyse ?

Même s'il permet a priori de mesurer des grandeurs à toutes les échelles possibles nécessaires de l'univers, $\mathbb{Q}$ souffre d'un défaut majeur : *il ne permet pas de tout mesurer* ! En effet, beaucoup de grandeurs physiques sont des quantités *irrationnelles*.

Voyons deux exemples.

1.1.2 Irrationnalité du nombre π

Le nombre π est défini comme la longueur de la circonférence d'un disque dont le diamètre est égal à 1 :



Il est surprenant d'apprendre que le développement décimal de ce nombre ne présente pas de régularité apparente :

$$\pi = 3.14159265358979323846264333\dots$$

On peut facilement trouver des rationnels qui approximent π à un niveau essentiellement arbitraire de précision (les décimales en rouge indiquent à partir d'où le rationnel cesse de donner une bonne approximation) :

$$\frac{22}{7} = 3.14285714286\dots$$
$$\frac{333}{106} = 3.14150943396\dots$$
$$\frac{103993}{33102} = 3.1415926530 1\dots \qquad \text{etc.}$$

Pourtant, Johann Heinrich Lambert a montré en 1761 que π est **irrationnel** : *il n'existe aucune paire* $p, q \in \mathbb{N}^*$ *telle que*

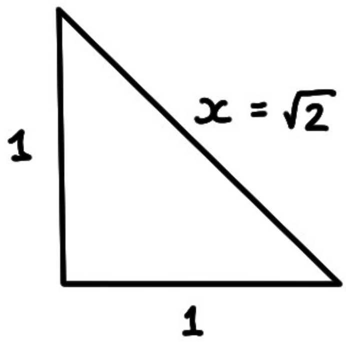
$$\pi = \frac{p}{q}\,.$$

Pour une preuve relativement courte, mais qui requiert beaucoup des notions d'analyse présentées dans ce cours, voir **cette vidéo** (lien web), ou encore **celle-ci** (lien web) (les deux présentent la même preuve de l'irrationnalité de π, due à Niven).

1.1.3 Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Bien avant la preuve de Lambert, un problème géométrique encore plus simple montrait de manière embarrassante l'importance des irrationnels :

L'école Pythagoricienne (env. 500BC) avait observé le fait suivant. Considérons un triangle rectangle dont les deux cathètes ont longueur 1 :



La longueur de l'hypothénuse est donnée par la solution $x > 0$ de l'équation

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2\,.$$

Lemme 1. *Le nombre x, solution de l'équation $x^2 = 2$, est irrationnel.*

Preuve: On démontre l'affirmation par l'absurde.

Supposons que $x \in \mathbb{Q}$, à savoir qu'il existe des entiers p et q tels x peut s'écrire $x = \frac{p}{q}$. On peut en fait supposer que p et q sont premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun diviseur commun (s'ils ont un diviseur commun, on peut toujours simplifier la fraction).

Mais si $x = \frac{p}{q}$, alors $x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, c'est-à-dire $p^2 = 2q^2$, ce qui implique que p^2 est pair (un multiple de 2), et donc que p est pair aussi (exercice !). On peut alors écrire p sous la forme $p = 2e$, où e est un entier. Ceci implique également que $q^2 = \frac{p^2}{2} = 2e^2$, et donc q, par le même argument qu'avant, est aussi pair. Ceci implique que p et q sont tous deux divisibles par 2, ce qui représente une contradiction, puisqu'on a supposé que p et q n'avaient aucun diviseur commun. $\square$

Étant irrationnel, l'expansion décimale $\sqrt{2}$ n'a pas de "fin", et ne présente aucun motif particulier (pas de périodicité, etc.) :

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096\ldots$$

De nos jours, on connaît plus de **dix mille milliards de décimales** (lien web) de cette expansion.

Sans surprise, la circonférence du disque et l'hypothénuse du triangle sont loin d'être les seuls irrationnels, donc cette discussion montre que même si $\mathbb{Q}$ constitue un ensemble de nombres allant des échelles subatomiques à superastronomiques, il ne contient pas tous les nombres nécessaires pour faire de la géométrie élémentaire.

"On sait que les nombres de ce genre (en parlant de $\sqrt{2}$) ont tourmenté Pythagore et son école presque jusqu'à puisement. Étant accoutumés à des nombres si étranges depuis notre première enfance, nous devons prendre garde à ne pas sous-estimer l'intuition mathématique de ces anciens sages. Leur tourment était hautement honorable. Ils se rendaient compte qu'on ne peut trouver aucune fraction dont le carré soit exactement égal à 2. On peut en donner des approximations très approchées, comme par exemple $\frac{17}{12}$, dont le carré, $\frac{289}{144}$, est très proche de $\frac{288}{144}$, c'est à dire de 2. On peut s'approcher encore plus près de 2 en considérant des fractions constituées au moyen de nombres plus grands que 17 et 12, mais on n'atteindra jamais **exactement** 2. "

E. Schrödinger, *Physique quantique et représentation du monde*

Et en fait, dans un sens que nous ne détaillerons pas ici, il y a beaucoup plus d'irrationnels qu'il n'y a de rationnels...

1.1.4 Sur la construction de $\mathbb{R}$

Il y a donc, dans la construction d'un bon ensemble de nombres, une étape finale, qui consiste à *compléter* $\mathbb{Q}$ en lui ajoutant tous les irrationnels pour obtenir $\mathbb{R}$. Cette construction est délicate, et nous ne la décrirons pas en détails car elle sortirait du cadre de ce cours.

Mais ce que nous ferons, dans les sections suivantes, sera de définir $\mathbb{R}$ en listant ses propriétés.

Nous dirons d'abord que c'est, comme $\mathbb{Q}$, un ensemble dans lequel on peut faire de l'arithmétique, c'est à dire des calculs à l'aide d'opérations telles que addition et multiplication.

Puis nous exigerons de $\mathbb{R}$ une propriété additionnelle, naturelle mais délicate à formuler (voir *supremum et infimum* plus loin), qui le distinguera radicalement de $\mathbb{Q}$, et qui nous permettra de commencer à construire l'analyse. (En passant, nous montrerons que dans $\mathbb{R}$, l'existence de $\sqrt{2}$ est bien garantie.)

Remarque 1.1. Ce que nous ne ferons pas, c'est de montrer qu'on peut effectivement *construire* un ensemble $\mathbb{R}$ jouissant de toutes ces propriétés. Pour plus de détails sur la construction des réels, je renvoie le lecteur aux livres d'analyse plus avancés. ◇

Deux références pour le lecteur intéressé :

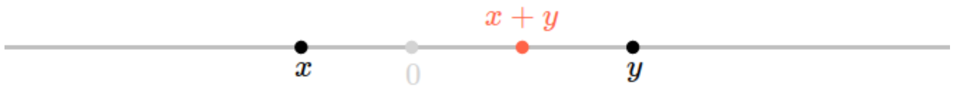
- ⋆ **Les nombres irrationnels (Voyage au pays des maths ARTE)** (lien web).
- ⋆ **Pour aller dans l'espace, de combien de décimales de π a-t-on vraiment besoin ?** (lien web)

1.2 Règles de calcul : $+, -, \cdot, \div$

Les nombres réels forment avant tout un ensemble dans lequel on peut faire de l'*arithmétique*, c'est-à-dire dans lequel on peut additionner, soustraire, multiplier et diviser. (En mathématiques, un ensemble muni de ces opérations est appelé un **corps**.)

La première opération, l'**addition** notée "+", est une opération qui associe à une paire de réels x, y un nouveau réel noté $x + y$. Cette opération satisfait aux propriétés suivantes :

1) $x + y = y + x$ pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$
3) Il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$, appelé **élément neutre pour l'addition** (ou simplement "**zéro**"), tel que $x + 0 = 0 + x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique élément noté $-x \in \mathbb{R}$ et appelé **opposé de** x, tel que $x + (-x) = 0$.



Si $x, y \in \mathbb{R}$, on peut définir leur **soustraction** :

$$x - y := x + (-y)\,.$$

La deuxième opération, la **multiplication**, notée "$\cdot$", associe à une paire de réels x, y un nouveau réel noté $x \cdot y$. Elle satisfait aux propriétés suivantes :

1) $x \cdot y = y \cdot x$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$
2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ pour tout triplet $x, y, z \in \mathbb{R}$
3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,
4) Il existe un élément $1 \in \mathbb{R}$, appelé **élément neutre pour la multiplication** (ou simplement "**un**"), tel que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, il existe un unique élément noté $x^{-1} \in \mathbb{R}$, appelé **inverse de** x, tel que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Souvent, on écrit xy au lieu de $x \cdot y$.

Si $x, y \in \mathbb{R}$ et si $y \neq 0$, on peut définir leur **division** :

$$x \div y := x \cdot y^{-1}\,.$$

En général, on écrit $\frac{x}{y}$ au lieu de $x \div y$.

Remarque 1.2. $\mathbb{Q}$ est aussi muni de ces opérations, et les mêmes propriétés sont satisfaites. Ce n'est pas le cas de $\mathbb{N}$ (dans lequel, par exemple, 3 n'a pas d'opposé), ni de $\mathbb{Z}$ (dans lequel, par exemple, 2 n'a pas d'inverse). ◇

1.3 Ordre : $\leqslant, \geqslant, <, >$

La deuxième caractéristique de l'ensemble des nombres réels est que deux réels x, y peuvent toujours être *comparés*. Si ils sont égaux, $x = y$, il n'y a pas lieu de les comparer, mais si ils sont distincts, $x \neq y$, alors il y en a nécessairement un qui est plus petit que l'autre :

⋆ Si x est **plus petit que** y, on note $x < y$.
⋆ Si x est **plus grand que** y, on note $x > y$.

Le fait que l'on puisse ainsi comparer n'importe quelle paire de réels distincts représente ce qu'on appelle un **ordre total** .

Lorsqu'on veut comparer deux réels sans forcément se préoccuper de savoir s'ils sont distincts :

⋆ Si x est **plus petit ou égal à** y, on note $x \leqslant y$.
⋆ Si x est **plus grand ou égal à** y, on note $x \geqslant y$.

Énonçons les propriétés des relations "$\leqslant, \geqslant, <, >$" :

1) Pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$, on a soit $x \leqslant y$, soit $y \leqslant x$. Si on a à la fois $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$.
2) $x \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3) Si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.
4) Si $x \leqslant y$, alors $x + z \leqslant y + z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.
5) Si $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$, alors $0 \leqslant x \cdot y$

Informel 1.3. La troisième propriété est constamment utilisées en analyse. En effet, pour montrer qu'un nombre x est plus petit ou égal à un nombre z, on passera souvent par l'utilisation d'un réel intermédiaire y, et on vérifiera les deux relations "$x \leqslant y$", "$y \leqslant z$", qui ensemble garantissent que $x \leqslant z$.

1.3.1 Signe

Un réel $x \in \mathbb{R}$ est dit

⋆ **positif** (resp. **strictement positif**) si $x \geqslant 0$ (resp. $x > 0$),

⋆ **négatif** (resp. **strictement négatif**) si $x \leqslant 0$ (resp. $x < 0$).

Quiz 1.3.1. *(Ordre total sur $\mathbb{R}$.) Vrai ou faux ?*

1) □ *Si $x \leqslant y$ et $a \leqslant b$, alors $\frac{x}{a} \leqslant \frac{y}{b}$.*
2) □ *Si $0 < a < b$, alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.*
3) □ *Si $x \leqslant y$ et $a \leqslant b$, alors $ax \leqslant by$.*
4) □ *Si $x < y + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors $x < y$.*
5) □ *Si $x_k \leqslant a$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, alors*

$$\max\{x_1, , \ldots, x_n\} \leqslant a\,.$$

Quiz 1.3.2. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Il existe un nombre réel strictement positif plus petit que tous les autres.*
2) □ *Tout nombre réel possède un successeur immédiat.*

1.4 Intervalles

Avant de compléter la définition de $\mathbb{R}$, utilisons les relations d'ordre, $\leqslant, <, >, \geqslant$, pour introduire certains sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$ appelés *intervalles*.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On définit les **intervalles bornés** :

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x \leqslant b\}\,, \tag{1.1}$$
$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}\,, \tag{1.2}$$
$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x < b\}\,, \tag{1.3}$$
$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leqslant b\}\,, \tag{1.4}$$

On dit que $]a, b[$ est **ouvert**, et que $[a, b]$ est **fermé**. (On reviendra plus loin sur les notions d'ensemble borné/ouvert/fermé, qui sont générales et ne s'appliquent pas uniquement aux intervalles.) Pour représenter ces intervalles graphiquement, on utilisera une boule pleine pour indiquer que l'extrémité de l'intervalle est inclue, et vide pour indiquer que l'extrémité est exclue. Donc on représente $[a, b[$ comme suit :

Ensuite, introduisons les **intervalles non-bornés** :

$$\begin{aligned}
[a, +\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geqslant a\}\,, \\
]a, +\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > a\}\,, \\
]-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant b\}\,, \\
]-\infty, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}\,.
\end{aligned}$$

On définit en particulier les ensembles des réels **positifs** et **strictement positifs**,

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} = [0, \infty[\,, \tag{1.5}$$

$$\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, \infty[\,, \tag{1.6}$$

ainsi que les ensembles des réels **négatifs** et **strictement négatifs**,

$$\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\} =]-\infty, 0]\,, \tag{1.7}$$

$$\mathbb{R}_-^* := \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} =]-\infty, 0[\,. \tag{1.8}$$

1.5 Valeur absolue et distance

Définition 1.4. La **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x > 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,, \\ -x & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Exemple 1.5. Puisque -3 est négatif, on a $|-3| = -(-3) = +3$. ◇

Les propriétés suivantes suivent de la définition :

1) $|-x| = |x| \geqslant 0$
2) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$
3) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
4) Si $a \geqslant 0$, alors $|x| \leqslant a$ si et seulement si $-a \leqslant x \leqslant +a$.
5) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
6) Si $y \neq 0$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.
7) Si on divise un réel non-nul x par sa valeur absolue, on obtient son **signe** :

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0\,, \\ -1 & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Proposition 1. *(Inégalité triangulaire) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \,.$$

Preuve: Si $x+y \geqslant 0$, alors

$$|x+y| = x+y \leqslant |x| + |y| \,.$$

Si $x+y < 0$, alors

$$|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) \leqslant |x| + |y| \,.$$

□

L'inégalité triangulaire sera utilisée très souvent lorsqu'on aura besoin de montrer *qu'une somme de petits nombres est aussi petite.* Plus précisément, considérons la somme de deux nombres x et y, que l'on sait être "petits" dans le sens où on a trouvé un $\varepsilon > 0$ tel que $|x| \leqslant \varepsilon$ et $|y| \leqslant \varepsilon$. (Remarquons que ceci n'implique rien sur les *signes* des nombres x et y.) Alors, l'inégalité triangulaire permet de garantir que

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \,.$$

Remarque 1.6. On peut utiliser la valeur absolue pour caractériser le nombre "zéro" : c'est l'unique nombre dont la valeur absolue est plus petite que tout nombre positif :

$$x = 0 \Longleftrightarrow |x| = 0 \Longleftrightarrow |x| \leqslant \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \,.$$

◇

1.5.1 Distance

La valeur absolue permet de mesurer la proximité de deux réels $x, y, \in \mathbb{R}$, en définissant leur **distance** :

$$\mathrm{dist}(x,y) := |x-y| \,.$$

Lemme 2. *(Propriétés de la distance)*

1) $d(x,y) \geqslant 0$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$*. De plus,* $d(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$*.*
2) $d(x,y) = d(y,x)$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$
3) *Pour tous* $x, y, z \in \mathbb{R}$*,*
$$\mathrm{dist}(x,y) \leqslant \mathrm{dist}(x,z) + \mathrm{dist}(z,y) \,.$$

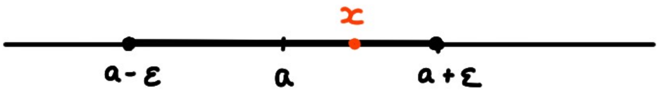
Preuve: Les deux premières affirmations suivent directement des propriétés de la valeur absolue. Pour la troisième, on insère $-z + z = 0$, et on utilise l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(x,y) = |x-y| &= |(x-z) + (z-y)| \\ &\leqslant |x-z| + |z-y| \\ &= \mathrm{dist}(x,z) + \mathrm{dist}(z,y) \,. \end{aligned}$$

□

On utilisera souvent les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(x,a) \leqslant \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad |x-a| \leqslant \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \end{aligned}$$



Quiz 1.5.1. *Soit $a > 0$.*

1) □ *Si $x \leqslant a$, alors $|x| \leqslant a$.*
2) □ *Si $x > a$, alors $|x| > a$.*
3) □ *Si $|x| \leqslant a$, alors soit $x = a$, soit $-a < x < a$.*

Quiz 1.5.2. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si $\text{dist}(x, y) > 0$, alors $x \neq y$.*
2) □ *Si $x \geqslant a$ et $|y| \leqslant a/2$, alors $x + y \geqslant a/2$.*
3) □ *Si $x < y$, alors $\text{dist}(x, y) < 0$.*
4) □ *Si $x < z < y$, alors $\text{dist}(x, z) < \text{dist}(z, y)$.*
5) □ *Si $y = x/2$, alors $\text{dist}(x, y) = \frac{x}{2}$.*
6) □ *Si $\text{dist}(x, y) = \alpha$ et $\text{dist}(y, z) = \beta$, alors $\text{dist}(x, z) = \alpha + \beta$.*
7) □ *Si $x < z < y$, alors $\text{dist}(x, y)^2 \leqslant \text{dist}(x, z)^2 + \text{dist}(z, y)^2$.*
8) □ ⚠ *Si $\text{dist}(x, y) \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors $x = y$.*

Quiz 1.5.3. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si $x > 0$, alors $|\sin(x)| = \sin(x)$.*
2) □ *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1$.*
3) □ *$|\cos(8)| = \cos(8)$.*

1.6 Supremum et infimum

Ici, nous introduirons la propriété cruciale qui différencie les réels des rationnels. En particulier, nous verrons comment cette propriété permet de garantir que dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = 2$ possède bel et bien une solution.

Avant de commencer, il nous faut introduire un peu de terminologie.

1.6.1 Minimum, maximum

L'ordre introduit plus haut sur $\mathbb{R}$ permet de distinguer certains éléments d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Définition 1.7. Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$.

- ⋆ Un élément $x^* \in A$ est dit **maximal** si $x \leqslant x^*$ $\forall x \in A$. On dit aussi que x^* est le **maximum** de A, et on note : $x^* = \max A$.
- ⋆ Un élément $x_* \in A$ est dit **minimal** si $x_* \leqslant x$ $\forall x \in A$. On dit aussi que x_* est le **minimum** de A, et on note : $x_* = \min A$.

Exemple 1.8. Si $A = \{-1, -3, -5, 2, 1\}$, alors $\max A = 2$ et $\min A = -5$. ◇

On réalise que quand un ensemble contient un nombre *fini* d'éléments, il possède *toujours* un minimum et un maximum : on les trouve en parcourant la liste ! Par contre, lorsque l'ensemble possède un nombre *infini* d'éléments, l'existence d'un minimum ou maximum n'est pas toujours garantie.

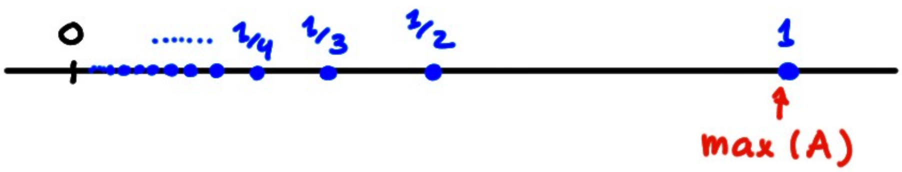
Exemple 1.9. Vu comme sous-ensemble des réels, l'ensemble des entiers $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ possède un élément minimal, $\min \mathbb{N} = 0$, mais il ne possède pas d'élément maximal. ◇

Plus intéressant :

Exemple 1.10. Considérons l'ensemble (la couleur, c'est juste pour voir l'ensemble sur le dessin du dessous) de tous les nombres de la forme $x = \frac{1}{n}$, où $n > 0$ est un entier :

$$A = \left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \dots\right\}$$

Clairement, A possède un élément maximal : $x^* = \max A = 1$. En effet, $x \leqslant 1$ pour tout $x \in A$, et de plus $1 \in A$:



Par contre, A ne possède pas de minimum. En effet, aucun élément de A n'est plus petit que les autres. ◇

Informel 1.11. On a peut-être envie de dire que le minimum de A, c'est $x_* = 0$, mais 0 n'est pas un élément de A, donc il ne satisfait pas à la définition de minimum.

Exemple 1.12. Soit $B = [0, 1[$. D'abord, B possède un minimum, donné par $x_* = \min B = 0$. (En effet, $0 \leqslant x$ pour tout $x \in B$, et $0 \in B$.) Par contre, B n'a pas de maximum. En effet, pour tout $x \in B$, il existe toujours un autre élément $x' \in B$ tel que $x' > x$. On peut par exemple prendre $x' := \frac{x+1}{2}$, qui est le point milieu entre x et 1 :

Donc aucun élément de B n'est maximal. ◇

1.6.2 Majorants, minorants

Définition 1.13. Soit $A \subset \mathbb{R}$.

1) A est **majoré** si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant M$ pour tout $x \in A$; on dit qu'un tel M **majore** A, ou que c'est un **majorant** pour A.
2) A est **minoré** si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant m$ pour tout $x \in A$; on dit qu'un tel m **minore** A, ou que c'est un **minorant** pour A.
3) Si A est à la fois majoré et minoré, il est **borné**.

Exemple 1.14. $B = [0, 1[$ est majoré ; $M = 1$, $M = 2$ sont des majorants. En fait, n'importe quel $M \geqslant 1$ majore B.

Par contre, $M = 0.9$ n'est *pas* un majorant ; en effet, si on prend par exemple le point $x = 0.95$, alors $x \in B$, et $x > M$. B est aussi minoré : n'importe quel réel $m \leqslant 0$ minore B.

◇

Informel 1.15. Un ensemble A est borné si et seulement si il peut être “rangé dans une boîte”, c’est-à-dire placé à l’intérieur d’un intervalle $[m, M]$, où m et M sont des nombres finis.

Exemple 1.16. Vus comme sous-ensembles de $\mathbb{R}$,

- ⋆ $\mathbb{N}$ est minoré puisque $0 \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par contre $\mathbb{N}$ n’est pas majoré. En effet, *pour tout* $M \in \mathbb{R}$, *il existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n > M$. Nous utiliserons ceci constamment par la suite.
- ⋆ $\mathbb{Z}$ n’est ni minoré, ni majoré.

◇

1.6.3 Supremum, infimum

Passons maintenant à la notion essentielle de ce chapitre sur les réels :

Définition 1.17. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide.

Un réel $s \in \mathbb{R}$ est appelé **borne supérieure** (ou **supremum**) de A si

1) s majore A (c.-à-d. que $x \leqslant s$ pour tout $x \in A$),
2) s est le plus petit majorant de A (c.-à-d. que pour tout $s' < s$, il existe $x \in A$ tel que $x > s'$).

Si s est supremum de A, on le note $s = \sup A$.

Un réel $s \in \mathbb{R}$ est appelé **borne inférieure** (ou **infimum**) de A si

1) s minore A (c.-à-d. que $x \geqslant s$ pour tout $x \in A$),
2) s est le plus grand minorant de A (c.-à-d. que pour tout $s' > s$, il existe $x \in A$ tel que $x < s'$).

Si s est l’infimum de A, on le note $s = \inf A$.

Remarque 1.18. Il est clair que

- ⋆ Si A possède un élément maximal, alors $\sup A = \max A$.
- ⋆ Si A possède un élément minimal, alors $\inf A = \min A$.

Mais en général, le maximum et le minimum peuvent ne pas exister, alors que le supremum et l’infimum comme on verra, existent toujours dans les réels. ◇

On reformulera souvent la deuxième condition, dans le supremum par exemple, en disant que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $x \in A$ tel que

$$s - \varepsilon \leqslant x \leqslant s\,.$$

Informel 1.19. (Interprétation “physique” de l’infimum et du supremum pour un ensemble borné.) On a dit qu’un ensemble A borné peut toujours être “rangé dans une boîte” $[m, M]$. Et bien parmi toutes les boîtes qui contienne A, la *plus petite* est celle pour laquelle $m = \inf A$ et $M = \sup A$.

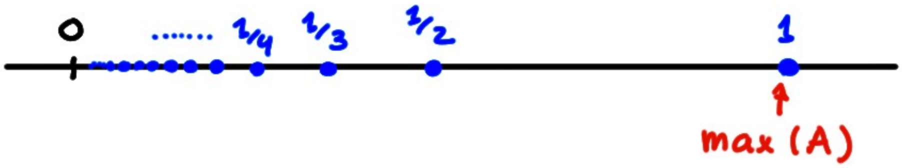
Exemple 1.20. Reprenons l'ensemble de tout à l'heure :

$$A = \left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \cdots \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n+1}, \dots\right\}.$$

Puisque $1 \in A$ et que tout $x \in A$ est plus petit ou égal à 1, 1 est l'élément maximal de A, et $\sup A = \max A = 1$.

Vérifions maintenant que $\inf A = 0$. D'abord, 0 minore A puisque tout nombre de la forme $\frac{1}{n}$ est plus grand ou égal à 0. Pour montrer que 0 est le plus grand minorant, considérons un nombre quelconque $s' > 0$, et montrons que s' n'est pas un minorant pour A. En effet, si $s' > 0$, alors il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $n > \frac{1}{s'}$, ce qui est équivalent à $\frac{1}{n} < s'$. Or comme $\frac{1}{n} \in A$, ceci montre que s' minore pas A.

On a donc bien montré que 0 est le plus grand minorant : $\inf A = 0$.



◇

Exemple 1.21. Soit encore $B = [0, 1[$. On a vu que B n'a pas de maximum ; montrons maintenant que $\sup B = 1$.

1) Premièrement, on a $x \leqslant 1$ pour tout $x \in B$, donc B est majoré par 1.
2) Deuxièmement, si $s' < 1$, alors il existe $\tilde{x} \in B$ tel que $\tilde{x} > s'$. En effet, si $s' < 0$, n'importe quel $\tilde{x} \in B$ suffit. Sinon, si $0 \leqslant s' < 1$, on peut par exemple prendre $\tilde{x} := \frac{s'+1}{2}$.

Ensuite, on a $\inf B = 0$. En effet, 0 est le plus grand minorant :

1) $0 \leqslant x$ pour tout $x \in B$, et
2) pour tout $s' > 0$, il existe un $x \in B$ tel que $x < s'$

◇

1.6.4 La différence entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$

Passons à l'**axiome** qui confère à $\mathbb{R}$ une propriété qui permet de l'utiliser pour faire de l'analyse : Dans $\mathbb{R}$,

- ⋆ tout ensemble non-vide majoré possède un supremum,
- ⋆ tout ensemble non-vide minoré possède un infimum.

Pour des ensembles qui ne sont pas bornés, la convention suivante est parfois adoptée (ce n'est qu'une *notation*) :

- ⋆ Si A n'est pas majoré, $\sup A := +\infty$.
- ⋆ Si A n'est pas minoré, $\inf A := -\infty$.

Exemple 1.22. Calculons l'infimum/supremum de l'ensemble

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \,:\, \sin(x) > \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Remarquons pour commencer que

$$\sin(x) > \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Comme on veut $x \in \mathbb{R}_+$, on doit se restreindre à $k \in \mathbb{N}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} B &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left]\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[\\ &= \left]\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\tfrac{13\pi}{6}, \tfrac{17\pi}{6}\right[\cup \cdots \end{aligned}$$

On a donc $\inf B = \frac{\pi}{6}$, et comme cet ensemble n'est pas majoré, $\sup B = +\infty$. ◇

Quiz 1.6.1. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. Si $M \in \mathbb{R}$ ne majore pas A, cela signifie*

1) □ *que M minore A.*
2) □ *que $x < M$ pour tout $x \in A$*
3) □ *qu'il n'existe aucun $x \in A$ tel que $x = M$.*
4) □ *qu'il existe $x \in A$ tel que $x > M$.*
5) □ *que A contient des éléments arbitrairement grands.*

Quiz 1.6.2. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide majoré. Si $s = \sup A$, cela signifie que*

1) □ *s est le plus grand élément de A.*
2) □ *il existe $L > 0$ tel que $x \geqslant s - L$ pour tout $x \in A$.*
3) □ *tout nombre $M \geqslant s$ majore A.*
4) □ *$s \in A$.*
5) □ *$s \notin A$.*
6) □ *l'ensemble $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ majore } A\}$ possède un minimum.*
7) □ *l'ensemble $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ majore } A\}$ est majoré.*
8) □ *A contient un nombre fini d'éléments.*
9) □ *si $x \leqslant \beta$ pour tout $x \in A$, alors $s \leqslant \beta$.*

1.7 Solutions de $x^2 = 2$

Revenons à la question posée précédemment : si l'équation

$$x^2 = 2$$

ne possède pas de solution dans $\mathbb{Q}$, en possède-t-elle une dans $\mathbb{R}$?

Montrer qu'il existe effectivement un $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$, "directement" est trop difficile. On fait donc un petit détour, en commençant par définir l'ensemble

$$A := \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 < 2\} .$$

Remarquons que par exemple $0 \in A$, ou encore $1 \in A$, et donc A n'est pas vide.

Lemme 3. *A n'a pas d'élément maximal.*

Preuve: Il s'agit de montrer que pour tout élément $x \in A$, il existe toujours un $x' \in A$ qui est strictement plus grand que x.

Cherchons un x' de la forme $x' = x + \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas,

$$x'^2 = (x + \tfrac{1}{n})^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} .$$

Puisque $n \geqslant 1$, on peut majorer : $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$. Ainsi,

$$x'^2 \leqslant x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{2x+1}{n}\,.$$

Puisqu'on veut $x' \in A$, c'est-à-dire $x'^2 < 2$, imposons

$$x^2 + \frac{2x+1}{n} < 2\,,$$

qui est équivalente à

$$n > \frac{2x+1}{2-x^2}\,.$$

Le membre de droite est bien défini et positif puisque $2 - x^2 > 0$. Et un n satisfaisant à cette propriété existe toujours puisque, quelle que soit la valeur de $\frac{2x+1}{2-x^2}$, il existe toujours un n plus grand que ce nombre (ceci découle du fait que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré). Si on prend un tel n, on a donc $x' = x + \frac{1}{n} > x$, et

$$\begin{aligned} x'^2 = (x + \tfrac{1}{n})^2 &= x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &< x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} \\ &= x^2 + \frac{2x+1}{n} \\ &< x^2 + \frac{2x+1}{\frac{2x+1}{2-x^2}} = 2\,. \end{aligned}$$

Ceci montre que A n'a pas d'élément maximal. □

Ensuite, remarquons que A est majoré : $x \leqslant 3$ pour tout $x \in A$. En effet, si $x > 3$, alors $x^2 > 9 > 2$, et donc $x \notin A$.

On peut maintenant considérer le réel défini comme le supremum de A :

$$s := \sup A\,.$$

Théorème 1.23. *Le nombre s défini ci-dessus satisfait $s^2 = 2$.*

Preuve: Si on avait $s \in A$, cela impliquerait que s est un élément maximal pour A. Comme on vient de voir que A ne possède pas d'élément maximal, on en déduit que $s \notin A$, et donc que

$$s^2 \geqslant 2\,.$$

Nous allons maintenant montrer que

$$s^2 \leqslant 2\,.$$

Pour ce faire, commençons par définir le réel

$$M := \frac{2+s^2}{2s}$$

et montrons que M majore A. En effet, observons que si $x > M$, alors

$$\begin{aligned} x^2 = (s + (x-s))^2 &= s^2 + 2s(x-s) + \underbrace{(x-s)^2}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant s^2 + 2s(x-s) \\ &> s^2 + 2s(M-s) \\ &= s^2 + 2s\big(\tfrac{2+s^2}{2s} - s\big) = 2\,, \end{aligned}$$

et donc $x \notin A$. Ceci implique que si $x \in A$, alors $x \leqslant M$; donc M majore A. Mais, comme s est par définition le plus petit majorant de A, on a que $s \leqslant M$, c'est-à-dire

$$s \leqslant \frac{2+s^2}{2s}\,,$$

qui est équivalente à $s^2 \leqslant 2$.

Comme s^2 est à la fois $\geqslant 2$ et $\leqslant 2$, ceci implique $s^2 = 2$. □

Le nombre s est appelé **racine carrée de deux** (lien web), et est noté

$$s = \sqrt{2}\,.$$

Puisque $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ comme on a vu, $\sqrt{2}$ est par définition **irrationnel** .

1.7.1 La fonction "racine"

On peut, en utilisant la même idée que celle présentée dans la preuve de la section précédente, montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation

$$x^2 = y$$

possède une solution dans $\mathbb{R}_+$.
Cette analyse montre que la fonction

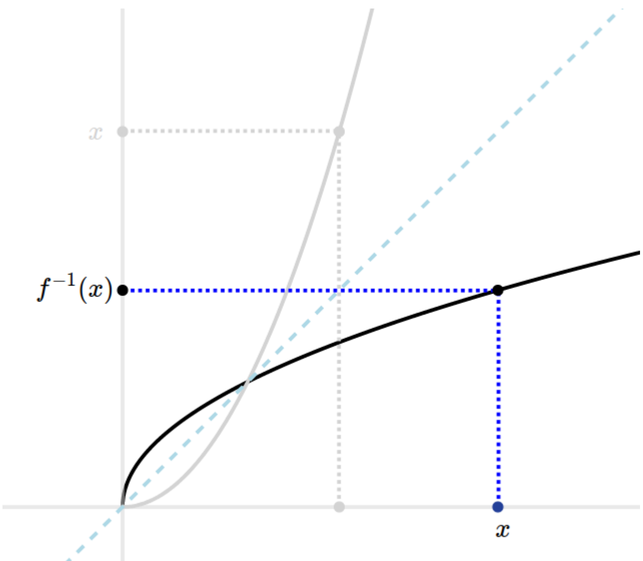
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

et une *surjection*. On montre **ici** (lien vers la section `m_fonctions_generalites_fonctions_reelles`) que c'est également une injection, et donc que cette fonction est une bijection.

Si $y \geqslant 0$, l'unique $x \geqslant 0$ tel que $x^2 = y$ se note $x = \sqrt{y}$, et se nomme **racine carrée de** y. Toute la fonction réciproque s'appelle la **fonction racine carrée** :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Comme on sait, son graphe s'obtient en réfléchissant celui de $f(x) = x^2$ à travers la diagonale du premier quadrant :



Remarque 1.24. La méthode se généralise, et permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation

$$x^n = y$$

possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. Celle-ci se note $\sqrt[n]{y}$ et se nomme **racine n-ème de** y. ◇

L'utilisation de la notion de supremum/infimum, pour construire la racine carrée ci-dessus, n'est évidemment qu'un exemple de ce que l'on peut faire dans les réels. Comme on verra dans la suite, l'utilisation de ces notions sera utilisée constamment, et fournira un socle sur lequel toute l'analyse réelle pourra être construite.

Quiz 1.7.1. *Pour montrer que dans $\mathbb{R}_+$, l'équation "$x^2 = 2$" possède une solution...*

1) □ *... on prend une calculatrice, on appuie sur la touche* $\boxed{2}$*, puis sur* $\boxed{\sqrt{}}$*, et on voit bien que c'est un nombre qui commence par* $1.41421356\ldots$*, donc ça existe.*
2) □ *... on prend la racine carrée des deux côtés,* $\sqrt{x^2} = \sqrt{2}$*, et comme* $\sqrt{x^2} = x$*, on a bien* $x = \sqrt{2}$*.*
3) □ *... on peut simplement calculer l'élément maximal de l'ensemble*

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}.$$

Quiz 1.7.2. *Vrai ou faux ?*

1) □ $\sqrt{9} = \pm 3$
2) □ *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = x$.
3) □ *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

1.8 Densité dans $\mathbb{R}$

Intuitivement, même si les rationnels sont un sous-ensemble (strict) des réels, ils doivent quand-même être un peu "partout" sur la droite des réels, dans le sens où on doit pouvoir en trouver dans n'importe quelle région de la droite, aussi petite soit-elle. On caractérise ceci précisément à l'aide de la notion de *densité*.

Définition 1.25. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est **dense dans** $\mathbb{R}$ si pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, il existe un $z \in E$ tel que $x < z < y$.

Il est clair que $\mathbb{R}$ est dense dans lui-même, puisque pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, on peut toujours considérer le point milieu $z := \frac{x+y}{2}$. Donc entre deux réels quelconques distincts, il y a toujours un autre réel.

Ce qui est plus intéressant, ce sont les ensembles denses dans $\mathbb{R}$ qui sont des sous-ensembles *stricts* de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qui sont plus petits que $\mathbb{R}$.

Théorème 1.26. *L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Dans la preuve de ce théorème, nous utiliserons la notion suivante.

Définition 1.27. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la **valeur entière de** x, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x$.

Exemple 1.28.

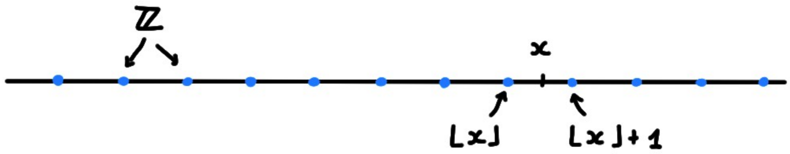
$$\lfloor \tfrac{5}{4} \rfloor = 1, \quad \lfloor -\tfrac{1}{3} \rfloor = -1, \quad \lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2, \quad \lfloor \pi \rfloor = 3.$$

◇

La définition de $\lfloor x \rfloor$ implique

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Donc l'image qu'il faut garder en tête est la suivante :



Cette dernière peut aussi s'écrire

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Passons à la preuve du théorème.
Preuve: Soient deux réels $x < y$, et soit n un entier suffisamment grand, tel que $n > \frac{1}{y-x}$. On rappelle qu'un tel entier existe car $\mathbb{N}$ n'est pas borné. Posons maintenant

$$r := \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\,.$$

Comme c'est un quotient de deux entiers, r est rationnel. Et puisque

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx\,,$$

on a

$$\underbrace{\frac{(nx-1)+1}{n}}_{=x} < r \leqslant \underbrace{\frac{nx+1}{n}}_{=x+\frac{1}{n}<y}\,,$$

ce qui implique $x < r < y$. □

La conséquence principale de ce résultat est que l'on peut *approximer les réels par des rationnels*, dans le sens suivant :

Corollaire 1. *Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - \frac{p}{q}| \leqslant \varepsilon$.*

Preuve: Posons $x' := x - \varepsilon$, $y' = x + \varepsilon$. Par le Théorème, il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $x' < \frac{p}{q} < y'$, ce qui implique bien que $-\varepsilon \leqslant x - \frac{p}{q} \leqslant +\varepsilon$. □

En particulier, n'importe quel irrationnel peut être approximé par un rationnel, à un degré arbitraire de précision.

Exemple 1.29. Nous avons donné des approximations de π dans l'introduction. Dans le langage de la présente section, ces approximations s'expriment ainsi :

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| \leqslant 0.01$$
$$\left|\pi - \frac{333}{106}\right| \leqslant 0.0001$$
$$\left|\pi - \frac{103993}{33102}\right| \leqslant 0.000000001$$

Donc même si π est irrationnel, on sait maintenant qu'on peut fixer un $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut, et le théorème garantit qu'il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ à distance au plus ε de π :

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

◇

Il se trouve que les irrationnels, eux aussi, permettent d'approximer n'importe quel réel :

Théorème 1.30. *L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Preuve: (exercice) □

On utilisera souvent les deux résultats ci-dessus, de la façon suivante : Si $x \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque, alors quel que soit $\varepsilon > 0$ (sous-entendu : aussi petit que l'on veut), il existe toujours un rationnel $r_* \in \mathbb{Q}$ et un irrationnel $i_* \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que

$$r_* \in \left]x-\varepsilon, x+\varepsilon\right[\,, \quad i_* \in \left]x-\varepsilon, x+\varepsilon\right[\,.$$

Quiz 1.8.1. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ possédant un nombre infini d'éléments, alors il est dense.*
2) □ *Si E est un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$, alors il possède un nombre infini d'éléments.*
3) □ *$\mathbb{R}$ est dense dans lui-même.*
4) □ *Si E est un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$, et si $E' \subset E$, alors E' est dense dans $\mathbb{R}$.*

Quiz 1.8.2. *Vrai ou faux ? Pour tous réels x, y,*

1) □ $\lfloor x \rfloor \geqslant 0$
2) □ $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
3) □ $\lfloor \lambda x \rfloor = \lambda \lfloor x \rfloor$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$

Quiz 1.8.3. *Soit x un réel quelconque. Vrai ou faux ?*

1) □ *Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un rationnel y tel que $0 < |x-y| \leqslant \frac{1}{10^n}$.*
2) □ *Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un irrationnel y tel que $0 < |x-y| \leqslant \frac{1}{10^n}$.*
3) □ *Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une infinité de rationnels y tels que $0 < |x-y| \leqslant \frac{1}{10^n}$.*
4) □ *Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une infinité d'irrationnels y tels que $0 < |x-y| \leqslant \frac{1}{10^n}$.*

1.9 Ensembles ouverts et fermés

La notion de "ouvert/fermé", introduite précédemment pour les intervalles, est en fait une notion plus générale, et s'applique à d'autres sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

Définition 1.31. Soit $G \subset \mathbb{R}$.

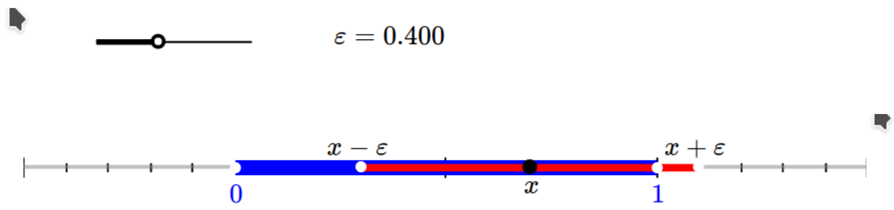
1) G est **ouvert** si pour tout $x \in G$ il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\left]x-\varepsilon, x+\varepsilon\right[\subset G\,,$$

   c.-à-d. tel que $x' \in G$ pour tout $x' \in \left]x-\varepsilon, x+\varepsilon\right[$.
2) G est **fermé** si son complémentaire (c.-à-d. $G^c := \mathbb{R} \setminus G$) est ouvert.

Un *intervalle ouvert* (au sens des sections précédentes) est effectivement *ouvert* au sens de la définition qui précède :

Exemple 1.32. Considérons $G =]0, 1[$. Si on fixe un $x \in G$ quelconque, alors en prenant un nombre $\varepsilon > 0$ qui est à la fois plus petit que $|x|$ (distance de x à l'extrémité gauche de l'intervalle) et que $|x - 1|$ (distance de x à l'extrémité droite de l'intervalle), alors l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ est entièrement contenu dans G. Clairement, le choix du ε dépend de où se trouve x : plus x est proche du bord, plus ε doit être pris petit. L'essentiel est que pour tout $x \in G$, on trouve *toujours* un $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset G$. (Sur l'animation ci-dessous, on a épaissi un peu pour y voir quelque chose.) ◇



De la même façon, on montre que les intervalles de la forme $]-\infty, a[$ et $]b, +\infty[$ sont ouverts.

Exemple 1.33. $G = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ est ouvert (voir exercices) ◇

Proposition 2. *Si un ensemble $G \subset \mathbb{R}$ est une union d'ensembles ouverts, alors il est ouvert.*

Preuve: On donne la preuve dans le cas où G est une union finie d'ouverts G_k :

$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \cdots \cup G_n .$$

Si $x \in G$, alors il existe au moins un indice k tel $x \in G_k$. Mais puisque G_k est ouvert, on sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset G_k$. Comme $G_k \subset G$, ceci implique $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset G$. □

Exemple 1.34. Considérons $G = [a, b]$. Cet ensemble n'est *pas* ouvert, puisque quel que soit la valeur de $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ contient des points qui ne sont pas dans G (utilisez l'animation ci-dessus pour l'apprécier !). De plus, puisque son complémentaire est

$$G^c = [a, b]^c =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[,$$

qui est une union d'ouverts, G^c un ouvert. Donc G est fermé. ◇

Exemple 1.35.
- ⋆ Un ensemble contenant un seul point, $\{x\}$, est fermé. En effet, son complémentaire est $\{x\}^c =]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$, qui est ouvert.
- ⋆ $\mathbb{Z}$ est fermé. En effet, son complémentaire est

$$\mathbb{Z}^c = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n + 1[,$$

et donc une union d'ouverts, donc c'est un ouvert.

◇

Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts, ni fermés.

Exemple 1.36. Si $a < b$, alors $I = [a, b[$ n'est ni ouvert ni fermé. En effet,
- ⋆ I n'est pas ouvert, car si on prend $x = a$, alors il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$.
- ⋆ I n'est pas fermé non plus, parce que son complémentaire est $I^c =]-\infty, a[\cup [b, +\infty[$, et si on prend cette fois $x' = b$, alors il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que $]x' - \varepsilon, x' + \varepsilon[\subset I^c$.

◇

Exemple 1.37. $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé.

- ⋆ $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert. En effet, fixons un $r \in \mathbb{Q}$. On a dit plus haut que les irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, donc quel que soit $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$ contient toujours un irrationnel. Donc il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que $]r-\varepsilon, r+\varepsilon[\subset \mathbb{Q}$.
- ⋆ $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé. En effet, son complémentaire est l'ensemble de tous les irrationnels, et n'est pas ouvert non plus : puisque les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, pour tout irrationnel y, un intervalle $]y-\varepsilon, y+\varepsilon[$ contient toujours un rationnel, quel que soit $\varepsilon > 0$.

◇

Quiz 1.9.1. *Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas ouvert, alors*

1) ☐ *il est fermé.*
2) ☐ *son complémentaire est ouvert.*
3) ☐ *il existe au moins un $x \in A$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\not\subset A$ pour tout $\varepsilon > 0$.*
4) ☐ *pour tout $x \in A$, il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$.*
5) ☐ *son complémentaire n'est pas ouvert non plus.*

Quiz 1.9.2. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble ouvert. Vrai ou faux ?*

1) ☐ *A est borné.*
2) ☐ *Si $x \in A$, $y \in A$, et si $x < z < y$, alors $z \in A$.*
3) ☐ *Pour tout $x \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-2\varepsilon, x+2\varepsilon[\subset A$.*
4) ☐ *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$.*
5) ☐ *Si $B \subset A$ est aussi un ensemble ouvert, alors $A \setminus B$ est un ouvert.*
6) ☐ ⚠ *Il existe une famille d'intervalles ouverts $I_1, I_2, I_3, \dots$ telle que*

$$A = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \cdots$$

Chapitre 2

Nombres : $\mathbb{C}$

2.1 Introduction

Les nombres complexes sont apparus de manière “accidentelle”, en 1545, lorsqe Cardan généralisa une méthode (inventée par Tartaglia) pour résoudre des équations du troisième degré de la forme

$$x^3 + px + q = 0\,,$$

en la variable réelle x. Sa méthode était innovante du fait qu’elle passait par un calcul qui manipulait “$\sqrt{-1}$” comme si c’était une quantité réelle.

Une vidéo qui présente l’histoire de cette méthode : **How imaginary numbers were invented (Veritasium)** (lien web)

Ce n’est que plus tard que les complexes furent introduits et étudiés de manière systématique, par Gauss en particulier.

Après les avoir introduit de manière axiomatique, nous présenterons quelques notions élémentaires au sujet des nombres complexes, en particulier leur représentation dans le plan complexe, et la formule de Moivre. Nous utiliserons aussi quelques-unes de leurs propriétés dans la factorisation de polynômes, qui sera utilisée tout à la fin du cours dans le calcul de certaines primitives de fonctions réelles.

2.2 Définition

Comme $\mathbb{R}$, l’ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est un **corps**, c’est-à-dire un ensemble muni des opérations $+, -, \cdot, \div$, satisfaisant aux propriétés usuelles.

Ce qui rend ce corps particulier est qu’il est formé de paires de réels, pour lesquelles la définition d’un *produit* “$\cdot$” n’est pas forcément naturelle :

Définition 2.1. On note $\mathbb{C}$ l’ensemble des paires de réels, $z = (x, y)$, muni des deux opérations suivantes. Si $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$,

- ⋆ leur **addition** est définie
$$z + z' := (x + x', y + y')\,,$$
- ⋆ et leur **multiplication** par
$$z \cdot z' := \big(xx' - yy', xy' + x'y\big)\,.$$

Exemple 2.2. $(1, 2) \cdot (-3, 4) = (-11, -2)$. ⋄

Exemple 2.3. $(\alpha, 0) \cdot (x, y) = (\alpha x - 0 \cdot y, \alpha y + 0 \cdot x) = (\alpha x, \alpha y)$. ⋄

Lemme 4. *(Propriétés des opérations $+$ et $\cdot$)*

1) $z + z' = z' + z$ *pour toute paire* $z, z' \in \mathbb{C}$
2) $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$ *pour tous* $z, z', z'' \in \mathbb{C}$
3) *L'élément* $(0, 0)$ *est appelé* ***élément neutre pour l'addition****, puisque* $z + (0, 0) = (0, 0) + z = z$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.
4) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *il existe un unique élément noté* $-z \in \mathbb{C}$ *et appelé* ***opposé de*** z*, tel que* $z+(-z) = 0$. *En fait, si* $z = (x, y)$*, alors* $-z = (-x, -y) = (-1, 0) \cdot z$.
5) $z \cdot z' = z' \cdot z$ *pour tous* $z, z' \in \mathbb{C}$
6) $z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z''$ *pour tout triplet* $z, z', z'' \in \mathbb{C}$
7) $z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z''$ *pour tous* $z, z', z'' \in \mathbb{C}$,
8) *L'élément* $(1, 0)$ *est appelé* ***élément neutre pour la multiplication****, puisque* $(1, 0)\cdot z = z\cdot(1, 0) = z$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.
9) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq (0, 0)$*, il existe un unique élément appelé* ***inverse****, noté* z^{-1}*, tel que*
$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = (1, 0)\,.$$
En fait, si $z = (x, y)$ *alors*
$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

Preuve: (Voir exercices.) □

- ⋆ Une fois que l'on a l'addition et la notion d'opposé, on a aussi une *soustraction* : si $z', z'' \in \mathbb{C}$, on définit leur **soustraction** :
$$z' - z'' := z' + (-z'')\,.$$
- ⋆ Une fois que l'on a la multiplication et la notion d'inverse, on a aussi une *division* : si $z, z' \in \mathbb{C}$ et si $z' \neq 0$, on définit leur **division** :
$$\frac{z}{z'} := z \cdot z'^{-1}\,.$$

Comme pour les réels, on écrira zz' au lieu de $z \cdot z'$. On utilisera aussi la notation
$$z^n := \underbrace{z \cdots z}_{n \text{ fois}}\,.$$

Informel 2.4. Remarquons que l'on n'introduira pas d'*ordre total* sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que l'on ne définira pas, comme on le fait sur $\mathbb{R}$, de symboles tels que "$\leqslant, \geqslant, <, >$".
En effet, entre $(1, 2)$ et $(2, 1)$, lequel définir comme étant le "plus grand" ?

2.2.1 Un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ identifié avec $\mathbb{R}$

Remarquons que sur le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ formé des paires dont la deuxième composante est nulle, $(x, 0)$, on a les propriétés suivantes :

- ⋆ $(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$
- ⋆ $(x, 0) \cdot (x', 0) = (xx', 0)$
- ⋆ Opposé : $-(x, 0) = (-x, 0)$
- ⋆ Inverse : Si $x \neq 0$, alors $(x, 0)^{-1} = (x^{-1}, 0)$

Ces propriétés montrent que les nombres complexes $(x, 0)$ se comportent essentiellement comme des nombres réels. Ceci mène à faire l'identification suivante, même si elle représente un abus de notation :

$$\text{“}\mathbb{R} = \{(x, 0) \in \mathbb{C} \,:\, x \in \mathbb{R}\}\text{”}$$

Cela signifie que dorénavant, nous ferons comme si $\mathbb{R}$ était un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. De plus, lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible, on écrira simplement “x” pour un réel, au lieu de “$(x, 0)$”. Par exemple, 0 sera considéré comme étant $(0, 0)$. Cette simplification aura l'avantage de faciliter l'écriture et la lecture d'expressions.

2.2.2 L'équation $z^2 + 1 = 0$ et le nombre i

Définissons le complexe

$$\mathsf{i} := (0, 1)\,.$$

On remarque que

$$(-\mathsf{i})^2 = \mathsf{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1\,,$$

et donc que i et $-\mathsf{i}$ sont solutions de l'équation

$$z^2 + 1 = 0\,.$$

En d'autres termes, dans $\mathbb{C}$, le polynôme $z^2 + 1$ peut être factorisé (ce qu'on ne peut pas faire dans les réels !) :

$$z^2 + 1 = (z - \mathsf{i})(z + \mathsf{i})\,.$$

Puisque i est un complexe dont le carré vaut -1, on pourra abuser un peu de la notation suivante :

$$\mathsf{i} \equiv \sqrt{-1}\,.$$

“Toutes les expressions comme $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, . . . sont des nombres impossibles ou imaginaires, puisqu'ils représentent les racines carrées de quantités négatives ; de ces nombres, nous pouvons seulement affirmer qu'ils ne sont ni zéro, ni supérieurs à zéro, ni inférieurs à lui, ce qui nécessairement les rend imaginaires ou impossibles. ”

Leonhard Euler, env 1750

Remarquons que

$$\mathsf{i}^1 = \mathsf{i}, \quad \mathsf{i}^2 = -1, \quad \mathsf{i}^3 = -i\,, \quad \mathsf{i}^4 = +1, \quad \mathsf{i}^5 = \mathsf{i}, \quad \text{etc}$$

2.2.3 Partie réelle, partie imaginaire

On peut maintenant écrire, pour tout complexe $(x, y) \in \mathbb{C}$,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)y \equiv x + \mathsf{i}y\,,$$

Ainsi, l'expression du produit de $(x, y) = x + \mathsf{i}y$ et $(x', y') = x' + \mathsf{i}y'$ se retrouve facilement :

$$\begin{aligned}(x, y) \cdot (x', y') &= (x + \mathsf{i}y)(x' + \mathsf{i}y') \\ &= xx' + xy'\mathsf{i} + x'y\mathsf{i} + yy'\underbrace{\mathsf{i}^2}_{=-1} \\ &= (xx' - yy') + \mathsf{i}(xy' + x'y) \\ &= (xx' - yy', xy' + x'y)\,.\end{aligned}$$

Définition 2.5. Si $z = (x, y) = x + \mathrm{i}y$,

- ⋆ $\mathrm{Re}(z) := x$ est la **partie réelle** de z.
- ⋆ $\mathrm{Im}(z) := y$ est la **partie imaginaire** de z.

On a

$$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')\,,$$
$$\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')\,.$$

Comme on a dit plus tôt, les nombres sans partie imaginaire ($\mathrm{Im}(z) = 0$) sont identifiés avec les réels. Aussi, les nombres sans partie réelle ($\mathrm{Re}(z) = 0$) sont les nombres **purement imaginaires**. En particulier, i est purement imaginaire.

2.2.4 Conjugué et module

Remarquons que

$$(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2\,.$$

Ceci mène naturellement à introduire deux notions :

Définition 2.6. Si $z = x + \mathrm{i}y$,

- ⋆ le complexe $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ est appelé **complexe conjugué à** z,
- ⋆ le réel $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé **module** de z.

Lemme 5. *Le conjugué et le module jouissent des propriétés suivantes :*

1) $\overline{\overline{z}} = z$
2) $z = \overline{z}$ *si et seulement si* $z \in \mathbb{R}$
3) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
4) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
5) $z\overline{z} = |z|^2$
6) $|\overline{z}| = |z|$
7) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
8) $\frac{z+\overline{z}}{2} = \mathrm{Re}\, z$
9) $\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{Im}\, z$

Preuve:

1) Si $z = x + \mathrm{i}y$, alors
$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x + \mathrm{i}y}} = \overline{x - \mathrm{i}y} = x + \mathrm{i}y = z\,.$$
2) Si $z = x + \mathrm{i}y$, alors $z = \overline{z}$ si et seulement $x + \mathrm{i}y = x - \mathrm{i}y$, qui signifie $y = -y$, c'est-à-dire $2y = 0$, et donc $y = 0$. Ceci signifie bien que z est réel.
3) $\overline{z + z'} = \overline{(x + \mathrm{i}y) + (x' + \mathrm{i}y')} = \overline{(x + x') + \mathrm{i}(y + y')} = (x + x') - \mathrm{i}(y + y')$

Les autres propriétés se démontrent de façon similaire. □

On peut calculer une division $\frac{z}{z'}$ en divisant et multipliant par le conjugué de z' :

$$\frac{z}{z'} = \frac{x + \mathrm{i}y}{x' + \mathrm{i}y'} = \frac{(x + \mathrm{i}y)(x' - \mathrm{i}y')}{(x' + \mathrm{i}y')(x' - \mathrm{i}y')} \tag{2.1}$$
$$= \frac{xx' + yy' + \mathrm{i}(yx' - xy')}{x'^2 + y'^2} \tag{2.2}$$
$$= \underbrace{\frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2}}_{=\mathrm{Re}(\frac{z}{z'})} + \mathrm{i}\underbrace{\frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2}}_{=\mathrm{Im}(\frac{z}{z'})}\,. \tag{2.3}$$

Cette expression permet aussi de retrouver la formule pour l'inverse :

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)\,.$$

2.2.5 Résoudre des équations complexes simples

Remarque 2.7. Soient $z = x + \mathrm{i}y$, $z' = x' + \mathrm{i}y'$. Alors

$$z = z' \qquad \Leftrightarrow \qquad x = x' \text{ et } y = y' \,.$$

On utilise cette propriété pour résoudre des équations. ◇

Exemple 2.8. Résolvons l'équation du premier degré en z donnée par

$$z - 3\mathrm{i}z - 3 + 6\mathrm{i} = 0 \,.$$

Une manière de procéder est d'isoler z, et de faire la division à l'aide du conjugué :

$$z = \frac{3 - 6\mathrm{i}}{1 - 3\mathrm{i}} = \frac{21}{10} + \mathrm{i}\frac{3}{10} \,.$$

Sinon, on peut aussi poser $z = a + b\mathrm{i}$, injecter dans l'équation de départ et réarranger :

$$\begin{aligned} 0 &= (a + b\mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(a + b\mathrm{i}) - 3 + 6\mathrm{i} \\ &= (a + 3b - 3) + \mathrm{i}(b - 3a + 6) \,. \end{aligned}$$

Or pour qu'un nombre complexe soit le complexe nul $0 + \mathrm{i}0$, ses parties réelles et imaginaires doivent toutes deux être égales à zéro, ce qui implique que a et b sont solutions du système

$$\begin{aligned} a + 3b - 3 &= 0 \\ -3a + b + 6 &= 0 \,, \end{aligned}$$

ce qui donne $a = \frac{21}{10}$, $b = \frac{3}{10}$. ◇

Quiz 2.2.1. *Parmi les identités suivantes, lesquelles sont correctes ?*

1) □ $(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) = 2$

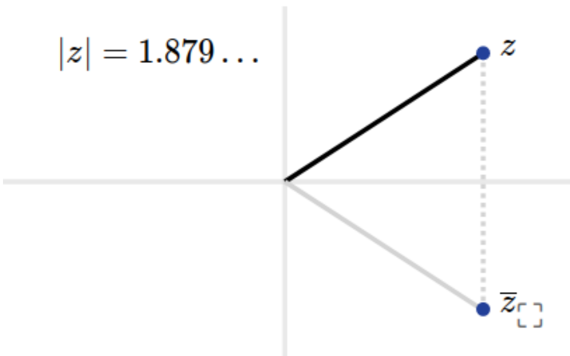
2) □ $(\mathrm{i} + 1)(\mathrm{i} + 2)(\mathrm{i} + 3) = 6 - \mathrm{i}$

3) □ $1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \cdots + \mathrm{i}^{443} = 0$

2.3 Le plan complexe

2.3.1 Identifier $\mathbb{C}$ avec le plan cartésien

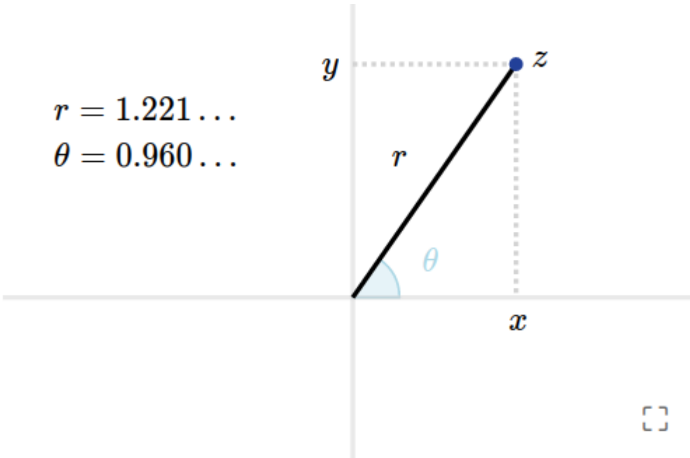
Il est naturel de représenter un nombre complexe $z = (x, y) = x + \mathrm{i}y$ à l'aide d'un point dans le plan cartésien, dont l'abscisse est x et l'ordonnée y. On remarque alors que le module $|z|$ n'est autre que la distance qui sépare z de l'origine, et que $\overline{z}$ est obtenu en réfléchissant z à travers l'axe Ox :



Les z purement réels se trouvent sur l'axe Ox, que l'on nomme alors **l'axe réel**, alors que les z purement imaginaires se trouvent sur l'axe Oy, que l'on nomme alors **l'axe imaginaire**. On parle alors du **plan complexe**.

2.3.2 Représentation polaire : module et argument

Mais il existe d'autres façons de repérer un point dans le plan. Par exemple, on peut associer à tout $z \in \mathbb{C}$ sa distance à l'origine, donnée par son module $|z| = r$, et considérer l'angle orienté θ formé par z et l'axe réel :



Si $z = x + \mathrm{i}y$, on a

$$x = \mathrm{Re}(z) = r\cos\theta$$
$$y = \mathrm{Im}(z) = r\sin\theta\,.$$

On peut donc écrire z sous **forme polaire** :

$$\boxed{z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\,.}$$

On appelle θ l'**argument** de z, et on le note $\theta = \mathrm{Arg}(z)$. Si $z = x + \mathrm{i}y$, et $x \neq 0$, son argument θ satisfait

$$\tan\theta = \frac{y}{x}\,.$$

Bien-sûr, θ étant défini à un multiple entier de 2π près (puisque sinus et cosinus sont 2π-périodiques), il n'est pas unique. Lorsqu'on considère l'unique argument pour lequel $\theta \in]-\pi, \pi]$, on appelle θ l'**argument principal de** z (comme celui de l'animation ci-dessus).

Remarque 2.9. Le seul complexe dont on ne définit pas l'argument est $z = 0$. ◇

Exemple 2.10. Mettons $z = 2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ sous forme polaire, et calculons son argument principal. D'abord,

$$r = |z| = \sqrt{4+12} = 4\,,$$

et donc

$$z = 4\big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\big)$$

Comme $\frac{1}{2} = \cos(-\frac{\pi}{3})$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{3})$, l'argument principal de z est $\theta = -\frac{\pi}{3}$. Sa forme polaire peut donc s'écrire

$$z = 4\big(\cos(-\tfrac{\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{3})\big)$$

◇

La représentation polaire des nombres complexes représente des avantages très importants par rapport à la représentation cartésienne. La principale raison est que l'argument possède quelques propriétés remarquables, que nous listons dans une proposition. (Comme l'argument n'est pas défini de manière unique, il faudrait rajouter partout "modulo 2π".)

Proposition 3. *(Propriétés de l'argument)*

1) $\mathrm{Arg}(\overline{z}) = -\mathrm{Arg}(z)$

2) $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$ ⚠

3) $\mathrm{Arg}(\frac{z}{z'}) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z')$

4) $\mathrm{Arg}(z^n) = n\,\mathrm{Arg}(z)$

Preuve:

1) Trivial

2) ⚠ Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$, alors

$$\begin{aligned} zz' &= rr'\big((\underbrace{\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'}_{=\cos(\theta+\theta')}) + \mathrm{i}(\underbrace{\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta}_{=\sin(\theta+\theta')})\big) \\ &= rr'\big(\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')\big) \end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{Arg}(zz') = \theta + \theta' = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$.

3) Calcul semblable :

$$\begin{aligned} \frac{z}{z'} &= \frac{r}{r'}\frac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta'} \\ &= \frac{r}{r'}\Big(\big(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\big) + \mathrm{i}\big(\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta'\cos\theta\big)\Big) \\ &= \frac{r}{r'}\big(\cos(\theta-\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta-\theta')\big) \end{aligned}$$

4) Si $n = 1$ il n'y a rien à démontrer :

$$\mathrm{Arg}(z^1) = 1\,\mathrm{Arg}(z)\,.$$

Supposons que la formule a été démontrée pour n, c'est-à-dire supposons que $\mathrm{Arg}(z^n) = n\,\mathrm{Arg}(z)$. On vérifie que la formule vaut aussi pour $n+1$, en calculant

$$\begin{aligned} \mathrm{Arg}(z^{n+1}) &= \mathrm{Arg}(z^n z) \\ &= \mathrm{Arg}(z^n) + \mathrm{Arg}(z) \\ &= n\,\mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z) = (n+1)\,\mathrm{Arg}(z)\,. \end{aligned}$$

□

Voyons les conséquences de ces propriétés.
D'abord, on apprend quelque chose sur l'interprétation géométrique de la multiplication complexe :

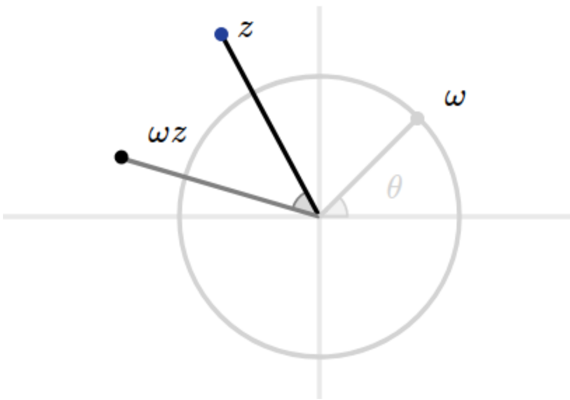
Corollaire 2. *Soit $\omega \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module r et d'argument θ. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, le complexe ωz est obtenu en faisant tourner z autour de l'origine, d'un angle de $\theta = \mathrm{Arg}(\omega)$ (dans le sens anti-horaire), et en multipliant son module par r.*

Preuve: En effet, ωz a pour module $|\omega z| = |\omega||z| = r|z|$, et pour argument

$$\mathrm{Arg}(\omega z) = \mathrm{Arg}(\omega) + \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z) + \theta\,.$$

□

En particulier, si $|\omega| = 1$, la multiplication de z par ω revient à simplement faire tourner z d'un angle $\theta = \mathrm{Arg}(\omega)$ (sur cette animation, on a représenté le cercle de rayon 1 en traitillé) :



Si, plutôt que de multiplier z par un complexe ω, on le multiplie par lui-même, un nombre arbitraire de fois, on obtient la formule de **de Moivre** (lien web) :

Théorème 2.11. *(**Formule de Moivre**) Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, alors pour tout entier $n \geqslant 2$,*

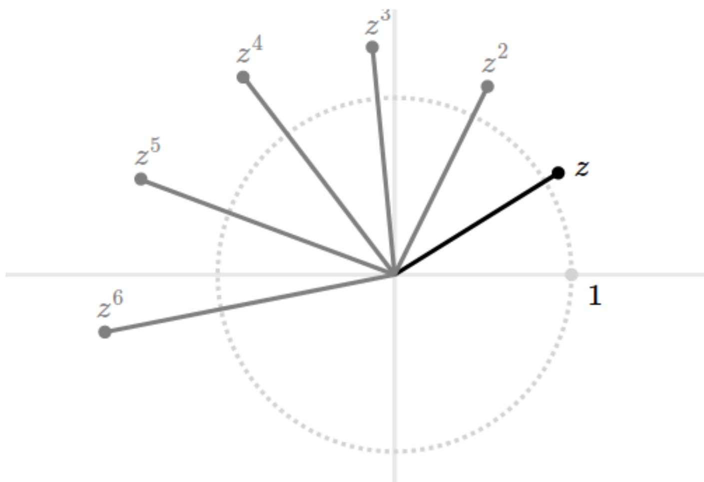
$$z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\big) .$$

Preuve: Par la propriété $\mathrm{Arg}(z^n) = n\,\mathrm{Arg}(z)$, utilisée pour le complexe $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$:

$$\begin{aligned} z^n &= \big(r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\big)^n \\ &= r^n\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big)^n \\ &= r^n(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)) . \end{aligned}$$

□

Sur l'animation ci-dessous, on a représenté un complexe z, ainsi que ses puissances z^n, pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (déplacer z !) :



Cette animation permet de voir la formule de Moivre à l'oeuvre, "à l'oeil nu". En effet,

- ⋆ l'argument de z^n est égal à l'argument de z multiplié par n, et
- ⋆ le module de z^n est égale au module de z élevé à la puissance n. Par conséquent, si $|z| < 1$ (z est à l'intérieur du cercle de rayon 1, représenté en traitillé), alors les puissances z^n sont plus proches de l'origine, et si $|z| > 1$ (z est à l'extérieur de ce cercle), alors les puissances z^n sont plus éloignées de l'origine.)

Quiz 2.3.1. *Parmi les identités suivantes, lesquelles sont correctes ?*

1) ☐ $\operatorname{Arg}(z+z') = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z')$ *pour tous* $z, z' \in \mathbb{C}$

2) ☐ $\operatorname{Arg}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Arg}(z)$ *pour tous* $\lambda \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$

3) ☐ $\operatorname{Arg}(z^{-1}) = \operatorname{Arg}(\overline{z})$ *pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

4) ☐ $|\operatorname{Arg}(z)| = \operatorname{Arg}(|z|)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$

5) ☐ $|\operatorname{Arg}(z)| = \operatorname{Arg}(|z|)$ *pour tout* $z \in \mathbb{R}$

Quiz 2.3.2. *Parmi les identités suivantes, lesquelles sont correctes ?*

1) ☐ $\overline{z} = z$ *si et seulement* $z \in \mathbb{R}$

2) ☐ $\overline{z} = -z$ *si et seulement si* z *est nul ou purement imaginaire*

3) ☐ $\overline{2+z} = 2 - \overline{z}$

4) ☐ $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$ *pour tout* $z \neq 0$

5) ☐ $z^2 \geqslant 0$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$

6) ☐ $\overline{1 + \overline{1+\overline{z}}} = 2 + \overline{z}$

7) ☐ $(\mathsf{i}+1)(\mathsf{i}+2)(\mathsf{i}+3) = 6 - \mathsf{i}$

8) ☐ $1 + 2 + 3 + \cdots + (z-1) + z = \frac{z(z+1)}{2}$

9) ☐ $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ *(lorsque* $z \neq 1$*)*

10) ☐ $\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{(1+\operatorname{Re}(z))^2 - \operatorname{Im}(z)^2 - 2(1+\operatorname{Re}(z))\operatorname{Im}(z)\mathsf{i}}{|1+\overline{z}|}$

11) ☐ $|z+z'| = |z| + |z'|$ *pour tout* $z, z' \in \mathbb{C}$

12) ☐ *Si* $|\overline{z}| = |z|$, *alors* $z \in \mathbb{R}$

2.4 Exponentielle complexe

Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(\theta) := \cos\theta + \mathsf{i}\sin\theta\,.$$

Par la propriété de l'argument,

$$\varphi(\theta)\varphi(\theta') = \varphi(\theta+\theta')\,.$$

Cette relation n'est pas sans rappeler la propriété de base de la fonction exponentielle (définie sur $\mathbb{R}$) :

$$e^x e^y = e^{x+y}\,.$$

On peut profiter de cette analogie pour introduire une nouvelle fonction sur $\mathbb{C}$:

Définition 2.12. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors l'**exponentielle de** z est définie par

$$\exp(z) := e^{\operatorname{Re}(z)}(\cos(\operatorname{Im}(z)) + \mathsf{i}\sin(\operatorname{Im}(z))).$$

Remarque 2.13. Dans cette définition, la partie "$e^{\operatorname{Re}(z)}$" est l'exponentielle classique (du réel $\operatorname{Re}(z)$), et "$\cos$" et "$\sin$" sont les fonctions trigonométriques usuelles. En particulier, si $\operatorname{Im}(z) = 0$, c'est-à-dire si z est un nombre réel, alors $\exp(z)$ coïncide avec "l'exponentielle de z" au sens classique du terme. Pour cette raison, par abus de notation, nous écrirons souvent "e^z" au lieu de "$\exp(z)$". ◇

Proposition 4. *(Propriétés de $z \mapsto \exp(z)$)*

1) $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$

2) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$

3) $\mathrm{Arg}(e^z) = \mathrm{Im}(z)$

4) $e^{z+2k\pi \mathrm{i}} = e^z$ *(périodicité dans la direction imaginaire)*

Preuve: 1) suit de la formule pour l'argument : si $z = x + \mathrm{i}y$, $z' = x' + \mathrm{i}y'$, alors en utilisant la fonction φ,

$$\begin{aligned} e^{z+z'} &= e^{(x+x')+\mathrm{i}(y+y')} \\ &= e^{x+x'}\big(\cos(y+y') + \mathrm{i}\sin(y+y')\big) \\ &= e^{x+x'}\varphi(y+y') \\ &= e^x e^{x'}\varphi(y)\varphi(y') \\ &= e^z e^{z'} . \end{aligned}$$

2) Si $z = x + \mathrm{i}y$, alors $|e^z| = |e^x\varphi(y)| = |e^x||\varphi(y)| = |e^x| = e^x$.

3) et 4) suivent directement de la définition de e^z. □

Informel 2.14. La définition de e^z donnée ci-dessus peut paraître un peu arbitraire. En analyse complexe, l'exponentielle est en général définie par une série (nous ne traiterons pas des séries complexes dans ce cours) :

$$\exp(z) := \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} .$$

On peut montrer que cette définition satisfait à toutes les propriétés énoncées ci-dessus, et qu'elle coïncide avec l'expression que nous avons utilisée pour définir e^z.

2.4.1 Exponentielle de nombres purement imaginaires, Formule d'Euler

L'exponentielle d'un nombre purement imaginaire $\mathrm{i}y$ n'est donc autre que $\varphi(y)$:

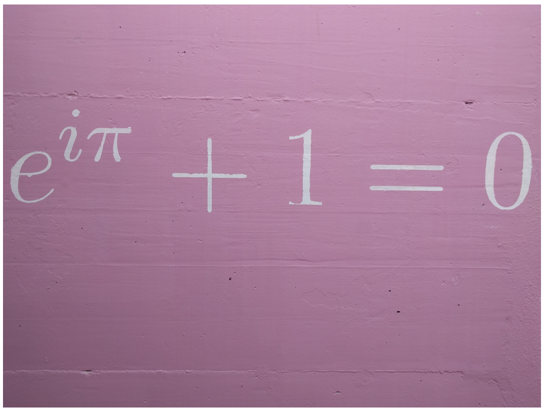
$$e^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y .$$

Ainsi, la fonction $y \mapsto e^{\mathrm{i}y}$ jouit des propriétés suivantes :

- ⋆ $|e^{\mathrm{i}y}| = 1$
- ⋆ $\overline{e^{\mathrm{i}y}} = e^{\mathrm{i}(-y)}$
- ⋆ $e^{\mathrm{i}y}e^{\mathrm{i}y'} = e^{\mathrm{i}(y+y')}$
- ⋆ $\frac{e^{\mathrm{i}y}}{e^{\mathrm{i}y'}} = e^{\mathrm{i}(y-y')}$
- ⋆ $\sin y = \frac{e^{\mathrm{i}y} - e^{-\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}}$
- ⋆ $\cos y = \frac{e^{\mathrm{i}y} + e^{-\mathrm{i}y}}{2}$

Observons $e^{\mathrm{i}y}$ pour quelques valeurs particulières de y.

- ⋆ $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$,
- ⋆ $e^{\mathrm{i}2k\pi} = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$,
- ⋆ **Formule d'Euler** : $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$.



2.4.2 Représentation polaire/exponentielle

Si un complexe $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| = r$ et $\mathrm{Arg}(z) = \theta$, on peut maintenant le représenter sous forme **polaire/exponentielle** (on dira plus simplement **polaire**) :

$$\boxed{z = re^{\mathrm{i}\theta}\,.}$$

La **formule de Moivre** devient maintenant :

$$z^n = \left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = r^n e^{\mathrm{i}n\theta} = r^n\left(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\right).$$

La représentation exponentielle des nombres complexes est utile dans de nombreuses situations, par exemple pour calculer des puissances :

Exemple 2.15. Si $z = 2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}$, que vaut z^{999} ?

Calculer cette puissance en multipliant z par lui-même 998 fois, à l'aide de la définition du produit complexe uniquement, n'est probablement pas une bonne idée. Utilisons plutôt la forme polaire de z, déjà calculée plus haut :

$$z = 4e^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{3})}\,.$$

Par la formule de Moivre,

$$z^{999} = 4^{999}e^{\mathrm{i}(-999\frac{\pi}{3})} = 4^{999}e^{\mathrm{i}(-333\pi)} = 4^{999}e^{\mathrm{i}(-166\cdot 2\pi - \pi)} \tag{2.4}$$

$$= 4^{999}\underbrace{e^{\mathrm{i}(-166\cdot 2\pi)}}_{=1}\underbrace{e^{\mathrm{i}(-\pi)}}_{=-1} \tag{2.5}$$

$$= -4^{999}\,. \tag{2.6}$$

◇

Exemple 2.16.

$$\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}e^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\right)^4 = \left(e^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{2})}\right)^4 = e^{\mathrm{i}(-2\pi)} = 1\,.$$

◇

Finalement, la notation polaire/exponentielle est utile pour résoudre des équations en une variable complexe z. Pour cela, on aura souvent besoin de se souvenir que si z, z' sont deux nombres complexes écrits sous forme polaire, $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = r'e^{\mathrm{i}\theta'}$, alors

$$z = z' \qquad \Leftrightarrow \qquad r = r' \text{ et } \theta = \theta' + 2k\pi$$

pour un entier k qui peut être quelconque.

Exemple 2.17. Considérons l'équation complexe

$$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = z\,.$$

On se rend vite compte, en essayant de poser $z = a + \mathrm{i}b$, que l'approche cartésienne n'est pas la bonne. Écrivons plutôt $z = re^{\mathrm{i}\theta}$. L'équation devient alors

$$\left(\frac{re^{\mathrm{i}\theta}}{re^{-\mathrm{i}\theta}}\right)^2 = re^{\mathrm{i}\theta}\,,$$

qui est

$$e^{\mathrm{i}4\theta} = re^{\mathrm{i}\theta}\,.$$

On a donc (voir la remarque ci-dessus) $r = 1$, et

$$4\theta = \theta + 2k\pi\,,$$

ce qui donne $\theta = k\frac{2\pi}{3}$, et donc toute solution est de la forme $z = e^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{3}}$. On obtient trois solutions distinctes en prenant $k = 0, 1, 2$. ⋄

Dans la section suivante, nous verrons l'utilité de la notation polaire/exponentielle pour trouver les *racines* d'un nombre complexe.

2.5 Racines de nombres complexes

Un autre avantage de travailler avec la forme polaire/exponentielle est qu'elle fournit une approche rigoureuse dans la recherche des *racines* d'un nombre complexe.

Définition 2.18. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ un entier. Un complexe $z \in \mathbb{C}$ qui satisfait

$$z^n = \omega$$

est appelée **racine n-ème de ω**.

Remarquons que $\omega = 0$ ne possède qu'une seule racine, car $z^n = 0$ n'a qu'une seule solution : $z = 0$. Mais un complexe $\omega \neq 0$ possède exactement n racines n-èmes :

Théorème 2.19. *Soit $\omega = se^{\mathrm{i}\varphi}$, $s > 0$. Si $n \in \mathbb{N}_*$, alors les racines n-èmes de ω sont données par*

$$\left\{z_k = \sqrt[n]{s} \cdot e^{\mathrm{i}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \;:\; k = 0, 1, 2, \dots, n-1\right\}$$

Preuve: En écrivant $z = re^{\mathrm{i}\theta}$, par de Moivre, $z^n = r^n e^{\mathrm{i}n\theta}$. Donc, $z^n = \omega$ si et seulement si $r^n e^{\mathrm{i}n\theta} = se^{\mathrm{i}\varphi}$, ce qui entraîne

$$r^n = s\,, \qquad n\theta = \varphi + 2k\pi\,,$$

où k est arbitraire, ce qui donne

$$r = \sqrt[n]{s}\,, \qquad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\,.$$

Remarquons que les entiers k qui donnent des solutions distinctes sont $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. □

Par l'expression ci-dessus, on voit que les racines n-èmes de ω sont réparties sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{s}$, aux sommets d'un polygone régulier.

Exemple 2.20. Calculons les racines 2-èmes (appelées aussi **racines carrées**) de $-1+\mathrm{i}$:

$$z^2 = -1+\mathrm{i}$$

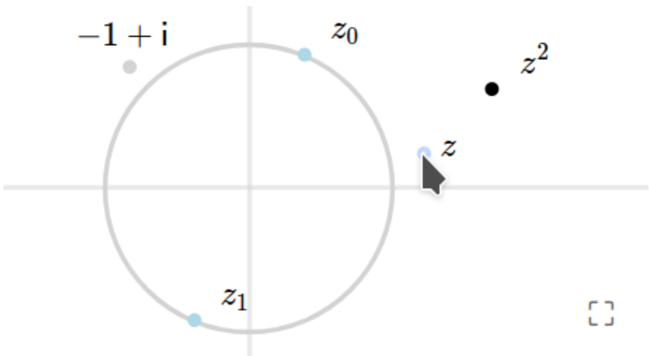
Comme ici $\omega = -1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\cdot e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, les racines sont

$$z_k = \sqrt[4]{2}\cdot e^{\mathrm{i}\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{2}} = \sqrt[4]{2}\cdot e^{\mathrm{i}(\frac{3\pi}{8}+k\pi)}\,, \qquad k=0,1\,,$$

c'est-à-dire

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}\,, \qquad z_1 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{8}}\,.$$

Les racines z_0 et z_1 sont sur un cercle de rayon $\sqrt[4]{2}$, et leur carré est bien égal à $\omega = -1+\mathrm{i}$ (sur l'animation ci-dessous, déplacer z de façon à ce que $z^2 = -1+\mathrm{i}$) : ⋄



Informel 2.21. Si $z^2 = -1+\mathrm{i}$, on pourrait être tenté d'écrire $z = \pm\sqrt{-1+\mathrm{i}}$. On évitera pourtant d'utiliser le symbole "$\sqrt{}$" pour les nombres complexes, la fonction "racine carrée" $z\mapsto\sqrt{z}$ étant une fonction qu'il est délicat de définir rigoureusement sur tout $\mathbb{C}$.

Exemple 2.22. Calculons les racines cubiques de i :

$$z^3 = \mathrm{i}\,.$$

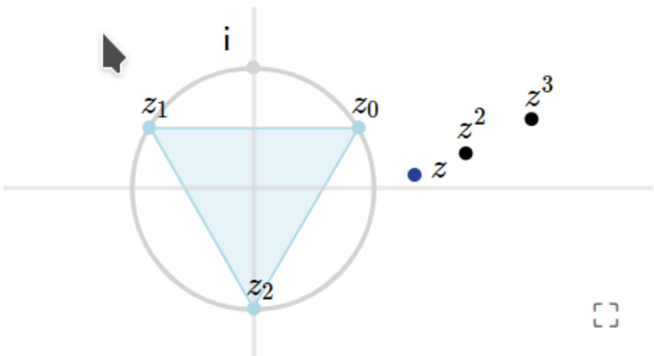
Comme $\mathrm{i} = 1\cdot e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, les racines sont

$$z_k = \sqrt[3]{1}\cdot e^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})}\,, \qquad k=0,1,2\,,$$

c'est-à-dire

$$z_0 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\,, \qquad z_1 = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\,, \qquad z_2 = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\,.$$

Ces racines sont sur le cercle trigonométrique, aux sommets d'un triangle équilatéral, rendu visible sur cette animation :



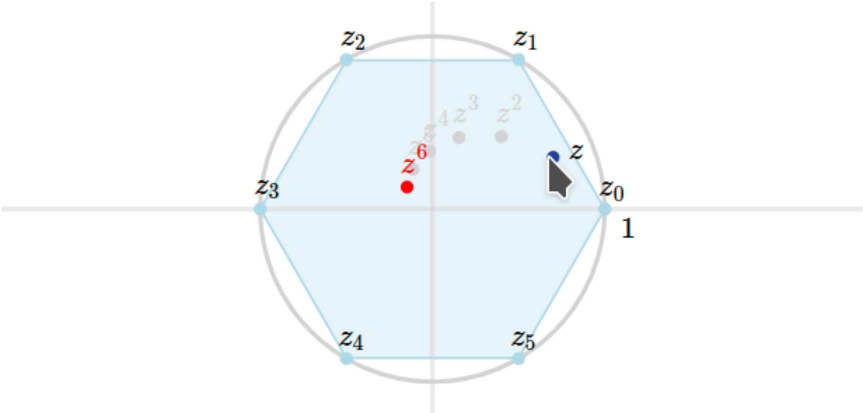
◇

Exemple 2.23. Calculons les racines sixièmes de l'unité, c'est-à-dire les solutions de

$$z^6 = 1\,.$$

Sous forme polaire, $1 = 1e^{\mathrm{i}0}$, et donc ses racines sixièmes sont

$$z_k = \sqrt[6]{1}\cdot e^{\mathrm{i}\frac{0+2k\pi}{6}} = e^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{3}}\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\,.$$



◇

Quiz 2.5.1. *Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Si $\omega \in \mathbb{C}$ est non-nul, et si $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'équation $z^n = \omega$ possède exactement n racines distinctes.*
2) ☐ *Si $f(z) \neq 0$ pour tout z, et si $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'équation $z^n = f(z)$ possède exactement n racines distinctes.*

2.6 Le Théorème Fondamental de l'Algèbre

Soit $P(z)$ un polynôme complexe en z :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\,,$$

où les coefficients $a_k \in \mathbb{C}$. On dit que P est **de degré** n si $a_n \neq 0$.

Si $z_* \in \mathbb{C}$ est tel que

$$P(z_*) = 0\,,$$

z_* est appelé **racine** du polynôme.

On sait que dans les réels, certains polynômes (comme par exemple $x^2 + 1$) ne possèdent pas de racines réelles. Dans les complexes, c'est très différent :

Théorème 2.24. *(Théorème Fondamental de l'Algèbre) Dans $\mathbb{C}$, tout polynôme P de degré $n \geqslant 1$ possède au moins une racine.*

Nous ne donnerons pas la preuve complète de ce théorème, mais nous esquisserons un argument géométrique qui contient l'idée centrale de l'argument, sur un exemple. L'adaptation au cas général ne présente pas de difficulté supplémentaire (même si des notions un peu plus avancées sont nécessaires pour l'exprimer rigoureusement).

Exemple 2.25. Considérons un polynôme de degré 5, par exemple :

$$P(z) = (2 + \mathrm{i}) + \mathrm{i}z + z^5 .$$

Comme ce polynôme contient un terme constant $2 + \mathrm{i} \neq 0$, la recherche d'une racine de P est un problème non-trivial.

Travaillons en représentation polaire,

$$z = re^{\mathrm{i}\theta} ,$$

et cherchons une racine de P en balayant tout le plan complexe, en passant des petites aux grandes valeurs du rayon $r \geqslant 0$.

Pour commencer, remarquons que si $r = 0$, alors $z = 0$, et l'image de ce point par P est égale au terme constant :

$$P(0) = 2 + \mathrm{i} \neq 0 .$$

Donc $z = 0$ n'est pas racine de ce polynôme, et on commence à augmenter le rayon.

Pour un $r > 0$ fixé, considérons le cercle $C_r \subset \mathbb{C}$ de rayon r centré à l'origine (en rouge sur l'animation ci-dessous). L'image de C_r par P,

$$P(C_r) := \{P(z) \,:\, z \in C_r\} ,$$

est une courbe fermée dans $\mathbb{C}$ que nous appellerons **lacet** (en bleu sur l'animation ci-dessous).

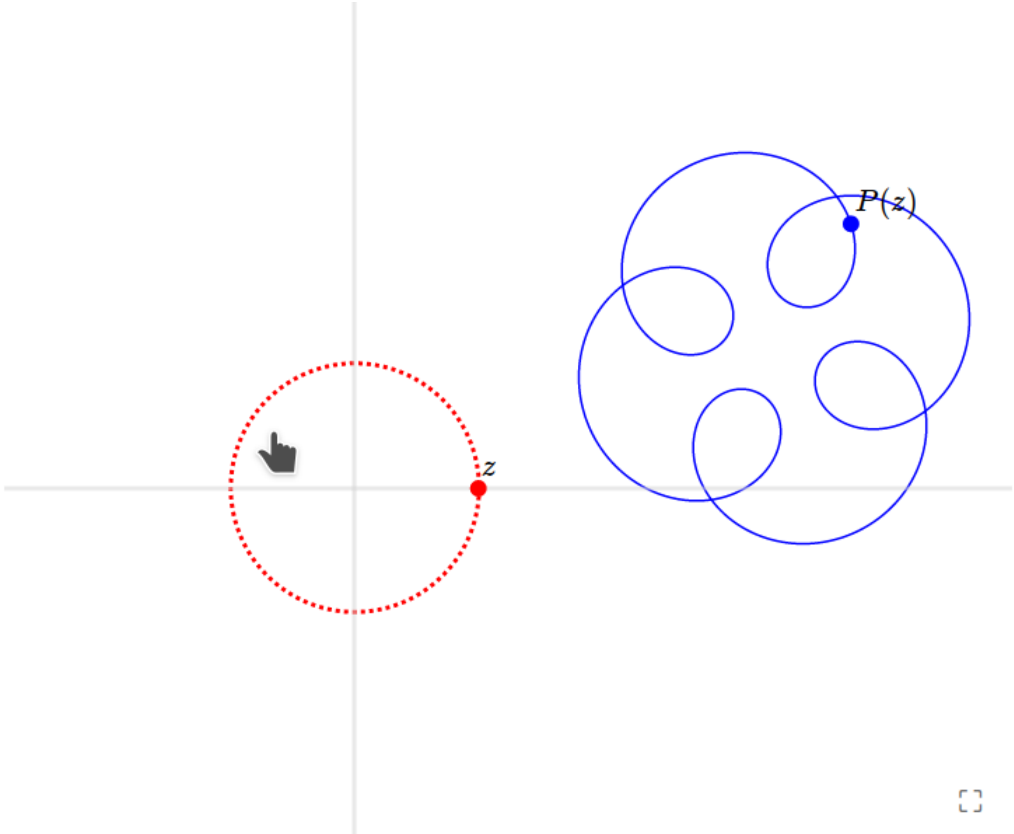
Si le lacet $P(C_r)$ touche l'origine, c'est qu'il existe un $z \in C_r$ tel que $P(z) = 0$.

Remarquons ensuite que

- ⋆ Si r est petit, $P(C_r)$ est un petit lacet qui entoure $P(0) = 2 + \mathrm{i}$.
- ⋆ Si r est grand, alors $P(C_r)$ est un grand lacet qui entoure 5 fois l'origine.

En augmentant r progressivement, il doit donc exister au moins une valeur $r_* > 0$ pour laquelle $P(C_{r_*})$ touche l'origine. Donc pour cette valeur r_*, il existe un $z_* \in C_{r_*}$ tel que $P(z_*) = 0$. ◇

$$P(z) = (2 + \mathrm{i}) + \mathrm{i}z + z^5 .$$



On comprend que la preuve du résultat général (pour un polynôme P *quelconque*) peut se faire en adaptant l'idée présentée ci-dessus. Le même argument est présenté dans **The Fundamental Theorem of Algebra (Numberphile)** (lien web).

Poursuivons :

Lemme 6. *Soit $P(z)$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$, et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ un complexe fixé. Alors il existe un unique polynôme $Q(z)$, de degré $n-1$, tel que*

$$P(z) = (z - z_0)Q(z) + P(z_0) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Preuve: Supposons que P est de la forme

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\,.$$

Considérons les nombres $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ définis inductivement par

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &:= a_n \\
b_{n-2} &:= z_0 b_{n-1} + a_{n-1} \\
&\vdots \\
b_1 &:= z_0 b_2 + a_2 \\
b_0 &:= z_0 b_1 + a_1\,,
\end{aligned}$$

et définissons

$$Q(z) := b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_{n-1} z^{n-1}\,.$$

Remarquons que si on développe le produit $(z-z_0)Q(z)$ et qu'on regroupe les puissances de z, on obtient :

$$\begin{aligned}(z-z_0)Q(z) = &- z_0 b_0 \\ &+ \underbrace{(b_0 - z_0 b_1)}_{=a_1} z \\ &+ \underbrace{(b_1 - z_0 b_2)}_{=a_2} z^2 \\ &+ \cdots \\ &+ \underbrace{(b_{n-2} - z_0 b_{n-1})}_{=a_{n-1}} z^{n-1} \\ &+ \underbrace{b_{n-1}}_{=a_n} z^n \\ &= -z_0 b_0 + (P(z) - a_0)\,,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(z-z_0)Q(z) + z_0 b_0 + a_0 = P(z)\,.$$

En évaluant cette identité en $z = z_0$, on obtient $z_0 b_0 + a_0 = P(z_0)$, et donc

$$(z-z_0)Q(z) + P(z_0) = P(z)\,.$$

□

Ce résultat implique que si z_0 est une racine de P, alors P peut se **factoriser** en un produit :

$$P(z) = (z-z_0)Q(z)\,,$$

où Q est la **division de** P **par** $z-z_0$; on peut obtenir Q par **division Euclidienne**, ou alors à l'aide de la formule de récurrence pour ses coefficients, vue dans la preuve du lemme (on appel cette relation un **Schéma de Hörner**).

On peut maintenant énoncer une version un peu plus forte du Théorème Fondamental :

Théorème 2.26. *Dans $\mathbb{C}$, tout polynôme P de degré $n \geqslant 1$ possède n racines : il existe $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que*

$$P(z_k) = 0 \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

De plus, P peut se factoriser comme suit :

$$P(z) = a_n (z-z_1)\cdots(z-z_n)\,.$$

Preuve: Soit P un polynôme de degré n. Alors le Théorème Fondamental et le lemme du dessus garantissent qu'il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ et un polynôme $Q(z)$, de degré $n-1$, tel que $P(z) = (z-z_1)Q(z)$. On peut ensuite répéter l'argument avec Q : il existe $z_2 \in \mathbb{C}$ et un polynôme $Q'(z)$, de degré $n-2$, tel que $Q(z) = (z-z_2)Q'(z)$, etc. Le procédé se termine lorsque P s'est exprimé comme un produit

$$P(z) = C(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)\,,$$

où $C \in \mathbb{C}$ est une constante. Puisque le terme de plus haut degré associé à ce produit est Cz^n, on en déduit que $C = a_n$. □

Dans la section suivante, nous verrons comment obtenir explicitement cette factorisation.

2.7 Polynômes et factorisation

Le Théorème Fondamental garantit qu'un polynôme complexe quelconque de degré n,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \,, \qquad a_n \neq 0 \,,$$

possède n racines complexes $z_1, z_2, \dots, z_n$, et peut se factoriser en

$$P(z) = a_n (z - z_1) \cdots (z - z_n) \,.$$

Passer de la première forme à la seconde est ce qu'on appelle la **factorisation** de P.

La factorisation est donc directement reliée à la connaissance des racines de P. Voyons quelques exemples.

Exemple 2.27. Factorisons le polynôme

$$P(z) = z^2 + 2z + 2 \,, \qquad (a_2 = 1 \neq 0) \,,$$

en commençant par chercher ses racines. L'équation $P(z) = 0$ ne possède pas de solutions réelles puisque $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. Mais étant de degré 2, $P(z)$ doit posséder deux racines complexes (garanti par le Théorème Fondamental de l'Algèbre). Voyons deux façons de les trouver.

1) On pose $z = a + b\mathsf{i}$ (où a et b sont réels !), que l'on injecte dans l'équation $z^2 + 2z + 2 = 0$, pour trouver

$$(\underbrace{a^2 - b^2 + 2a + 2}_{=0}) + \mathsf{i}(\underbrace{2ab + 2b}_{=0}) = 0 \,.$$

   On a donc un petit système

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 2a + 2 &= 0 \\ 2b(a+1) &= 0 \,. \end{aligned}$$

   Considérons la deuxième condition : $2b(a + 1) = 0$.

   - ⋆ Cas 1) : $b = 0$. Signifie que z est réel, or on a déjà dit qu'il n'y a pas de solution réelle.
   - ⋆ Cas 2) : $a = -1$. Inséré dans la première condition, on obtient $b = \pm\sqrt{1} = \pm 1$.

   On en déduit l'existence de deux racines, $z_1 = -1 - \mathsf{i}$ et $z_2 = -1 + \mathsf{i}$.

2) On utilise la formule classique

$$\begin{aligned} z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{-1} \\ &= -1 \pm \mathsf{i} \,. \end{aligned}$$

On a donc la factorisation de P :

$$P(z) = (z - (-1 - \mathsf{i}))(z - (-1 + \mathsf{i})) \,.$$

◇

Remarque 2.28. Dans le cas général d'une équation du deuxième degré de la forme

$$az^2 + bz + c = 0\,,$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, on peut procéder comme dans le cas réel, en commençant par remarquer que l'équation est équivalente à

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} =: \omega\,.$$

Lorsque $\omega \neq 0$, on peut alors chercher ses deux racines (au sens de la **section sur les racines de complexes** (lien vers la section m_complexes_racines)), disons $y_0 \in \mathbb{C}$ et $y_1 \in \mathbb{C}$, et conclure que les deux racines du polynôme sont

$$z_k = -\frac{b}{2a} + y_k\,, \qquad k = 0, 1$$

Donc la formule $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, habituellement utilisée pour des polynômes de degré 2 *à coefficients réels*, peut aussi s'utiliser lorsque les coefficients sont complexes, sauf que dans ce cas, toutes les grandeurs apparaissant sont complexes, et le terme "$\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$" doit se comprendre comme étant la recherche des deux racines carrées du complexe $b^2 - 4ac$. ◇

La factorisation complète d'un polynôme peut être laborieuse, surtout si celui-ci est de degré élevé. Nous verrons quelques exemples en fin de section.

Par contre, la factorisation d'un polynôme de la forme $P(z) = z^n - \omega$ s'obtient directement, à partir des racines n-èmes de ω.

Exemple 2.29. Par un des exemples traités dans la section précédente, la factorisation de $P(z) = z^3 - \mathrm{i}$ est donnée par

$$P(z) = (z - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}})(z - e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}})(z - e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}})\,.$$

◇

2.7.1 Racines multiples

Ce que le théorème fondamental ne dit pas, c'est si les racines sont distinctes ; or elles ne le sont pas toujours.

Définition 2.30. Si n_* est le plus grand entier tel que $(z - z_*)^{n_*}$ divise P, on dit que z_* est une **racine de P de multiplicité n_***.

Exemple 2.31. Le polynôme

$$P(z) = z^2 - 2\mathrm{i}z - 1 = (z - \mathrm{i})^2$$

possède deux racines confondues : $z_1 = z_2 = \mathrm{i}$. Donc i est une racine de multiplicité 2. ◇

En tenant compte des éventuelles multiplicités, la factorisation d'un polynôme de degré n est donc de la forme

$$P(z) = a_n(z - z_{i_1})^{n_1}(z - z_{i_2})^{n_2}\cdots(z - z_{i_k})^{n_k}\,,$$

où maintenant les racines $z_{i_1}, \dots, z_{i_k}$ sont toutes distinctes, et où les entiers $n_1, \dots, n_k$ satisfont à la condition : $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Exemple 2.32. Le polynôme $P(z) = z^3 - (4 - 3\mathrm{i})z^2 + (4 - 12\mathrm{i})z + 12\mathrm{i}$ peut se factoriser ainsi :

$$P(z) = (z + 3\mathrm{i})(z - 2)^2\,.$$

Ainsi, la racine $z_1 = -3\mathrm{i}$ est de multiplicité $n_1 = 1$, et $z_2 = 2$ est de multiplicité 2. ◇

2.7.2 Racines d'un polynôme à coefficients réels

Proposition 5. *Soit $P(z)$ un polynôme dont les coefficients sont tous réels ($a_k \in \mathbb{R}$). Si z_* est une racine de P,*

$$P(z_*) = 0\,,$$

alors $\overline{z_*}$ est aussi racine de P :

$$P(\overline{z_*}) = 0\,.$$

Preuve: Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$. Supposons que $P(z_*) = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
P(\overline{z_*}) &= a_0 + a_1\overline{z_*} + a_2\overline{z_*}^2 + \cdots + a_n\overline{z_*}^n \\
&= a_0 + a_1\overline{z_*} + a_2\overline{z_*^2} + \cdots + a_n\overline{z_*^n} \\
&= \overline{a_0 + a_1 z_* + a_2 z_*^2 + \cdots + a_n z_*^n} \\
&= \overline{P(z_*)} \\
&= \overline{0} \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

donc $\overline{z_*}$ est aussi racine de P. □

Une conséquence intéressante est que *si un polynôme a tous ses coefficients réels, alors à chaque racine z_* correspond une* **racine conjuguée** : $\overline{z_*}$.

Exemple 2.33. On a vu plus haut que le polynôme $P(z) = z^2 + 2z + 2$, dont tous les coefficients sont *réels* ($a_0 = a_1 = 2$, $a_2 = 1$), possède deux racines : $z_1 = -1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = -1 + \mathrm{i}$. Et effectivement, celles-ci sont conjuguées l'une par rapport à l'autre :

$$z_2 = \overline{z_1}\,.$$

◇

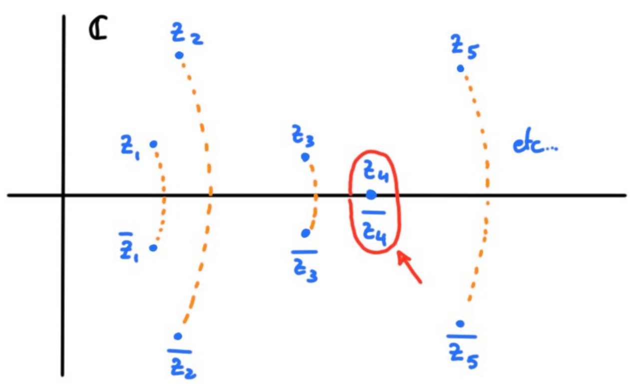
Ce résultat a deux conséquences très utiles. La première :

Corollaire 3. *Si P est de degré impair et que tous ses coefficients sont réels, alors il possède au moins une racine réelle.*

Preuve: En effet, si P est de degré impair, alors par le théorème fondamental de l'algèbre l'ensemble de ses racines,

$$R := \{z \in \mathbb{C} \,:\, P(z) = 0\}\,,$$

contient un nombre impair d'éléments (même si certaines racines sont confondues). Par la proposition ci-dessus, si $z \in R$ est une racine telle que $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, alors R contient aussi $\overline{z} \neq z$. On peut donc retirer de R toutes les paires de racines distinctes conjuguées de ce type.



Puisque R contient au départ un nombre impair d'éléments, on conclut qu'après avoir retiré toutes ces paires, il doit rester au moins une racine dont la partie imaginaire est nulle ; cette racine est donc réelle. □

Remarque 2.34. Plus tard, on démontrera ce corollaire d'une autre manière, à l'aide du *théorème de la valeur intermédiaire*. ◇

Exemple 2.35. Le polynôme

$$P(z) = z^7 - \pi z^6 + \sqrt{2} z - 1$$

est de degré impair, et tous ses coefficients sont réels. Par le corollaire, il possède au moins une racine réelle. ◇

2.7.3 Factorisation de polynômes à coefficients réels

La deuxième conséquence est sur la structure de la factorisation des polynômes réels :

Corollaire 4. *Tout polynôme à coefficients réels $P(x)$ peut se factoriser en un produit de polynômes irréductibles de degré 1 ou 2, à coefficients réels eux aussi.*

Preuve: Avec les mêmes coefficients réels, laissons la variable devenir complexe : $P(z)$. Par la proposition, si z_* est racine de P, alors $\overline{z_*}$ l'est aussi. Donc la factorisation de P sera de la forme

$$P(z) = \cdots (z - z_*) \cdots (z - \overline{z_*}) \cdots$$

Or si on met ces deux termes ensemble, on obtient

$$\begin{aligned}(z - z_*)(z - \overline{z_*}) &= z^2 - (z_* + \overline{z_*})z + z_* \overline{z_*} \\ &= z^2 - \underbrace{(2\,\mathrm{Re}(z_*))}_{\in \mathbb{R}!} z + \underbrace{|z_*|^2}_{\in \mathbb{R}!},\end{aligned}$$

qui est bien un polynôme de degré 2 à coefficients réels. Ceci prouve l'affirmation. □

Exemple 2.36. Utilisons cette méthode pour donner une factorisation du polynôme réel

$$P(x) = x^4 + 1$$

(dont tous les coefficients sont réels) par des polynômes de degré 2 *réels*. On commence par chercher ses racines complexes, qui sont solutions de $P(z) = z^4 + 1 = 0$. Ces racines satisfont donc $z^4 = -1$; ce sont les racines 4-èmes de $\omega = -1$. On trouve les racines 4-èmes de -1, par la méthode de la section précédente. On commence par écrire

$$\omega = -1 = 1 \cdot e^{\mathrm{i}\pi},$$

qui donne, par le théorème,

$$z = \sqrt[4]{1} \cdot e^{\mathrm{i}\frac{\pi + 2k\pi}{4}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

On trouve donc

$$\begin{aligned} k = 0 :\ z_0 &= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = +\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ k = 1 :\ z_1 &= e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ k = 2 :\ z_2 &= e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ k = 3 :\ z_3 &= e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}} = +\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

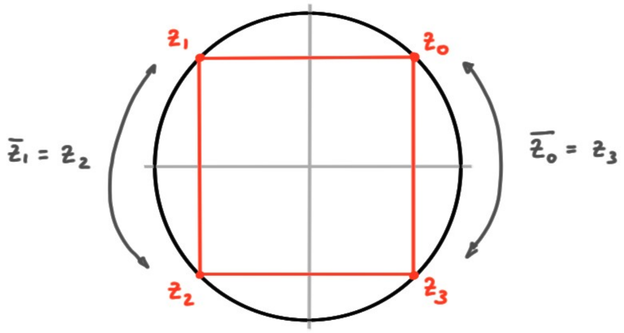
La factorisation de P en facteurs **irréductibles complexes** est donc

$$P(z) = \underbrace{1}_{a_4=1}(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\,.$$

On remarque que

$$z_3 = \overline{z_0}, \qquad z_2 = \overline{z_1}\,.$$

Les paires conjuguées de racines de $P(z) = z^4+1$ sont donc (z_0, z_3) et (z_1, z_2).



En regroupant ces termes dans la factorisation, on obtient des polynômes de degré 2 à coefficients réels :

$$\begin{aligned}(z-z_0)(z-z_3) &= (z-z_0)(z-\overline{z_0})\\ &= z^2 - 2\operatorname{Re} z_0 z + |z_0|^2\\ &= z^2 - \sqrt{2}z + 1\,,\\ (z-z_1)(z-z_2) &= (z-z_1)(z-\overline{z_1})\\ &= z^2 - 2\operatorname{Re} z_1 z + |z_1|^2\\ &= z^2 + \sqrt{2}z + 1\,.\end{aligned}$$

On obtient ainsi la factorisation de P en facteurs **irréductibles réels** :

$$P(z) = \big(z^2 - \sqrt{2}z + 1\big)\big(z^2 + \sqrt{2}z + 1\big)\,.$$

◇

Informel 2.37. Avec quelques bonnes idées, on peut parfois éviter de passer par tout ce formalisme. Par exemple,

$$\begin{aligned}z^4+1 &= (z^4 {+2z^2} + 1) {-2z^2}\\ &= (z^2+1)^2 - 2z^2\\ &= (z^2+1)^2 - (\sqrt{2}z)^2\\ &= (z^2+1-\sqrt{2}z)(z^2+1+\sqrt{2}z)\\ &= (z^2-\sqrt{2}z+1)(z^2+\sqrt{2}z+1)\,.\end{aligned}$$

Plus tard, on utilisera cette factorisation pour calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{dx}{\big(x^2-\sqrt{2}x+1\big)\big(x^2+\sqrt{2}x+1\big)}\,.$$

2.7.4 Factorisation dans le cas général

Dans le cas général, pour factoriser un polynôme complexe $P(z)$, on pourra

- ⋆ essayer de trouver une première racine z_1 par tâtonnement,
- ⋆ effectuer une division euclidienne de $P(z)$ par $(z - z_1)$, et donc obtenir $P(z) = (z - z_1)Q(z)$,
- ⋆ recommencer avec $Q(z)$, etc.

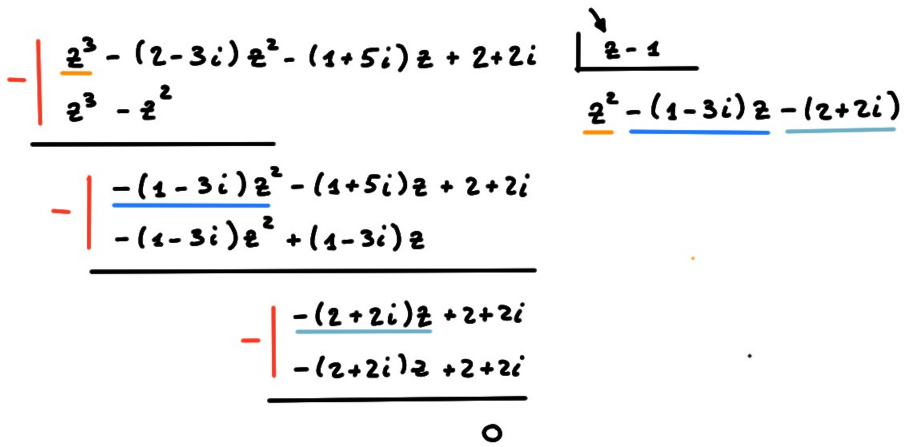
Exemple 2.38. Factorisons

$$P(z) = z^3 - (2 - 3\mathrm{i})z^2 - (1 + 5\mathrm{i})z + 2 + 2\mathrm{i}\,.$$

Pour commencer, en testant avec quelques nombres simples, on remarque que $P(1) = 0$. Maintenant qu'on a cette racine, on sait que P peut se factoriser :

$$P(z) = (z - 1)Q(z)\,.$$

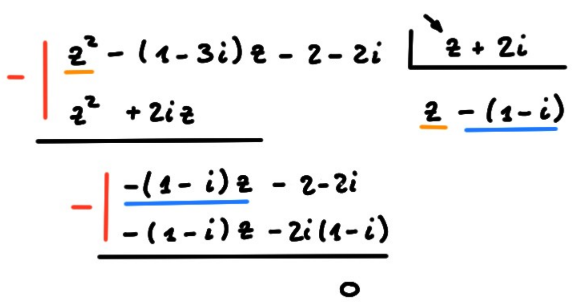
On trouve $Q(z)$ en effectuant la division euclidienne de $P(z)$ par $(z - 1)$:



On a donc

$$Q(z) = z^2 - (1 - 3\mathrm{i})z - (2 + 2\mathrm{i})\,,$$

qu'on factorise à son tour. En remarquant que $Q(-2\mathrm{i}) = 0$, on fait la division



qui donne $Q(z) = (z + 2\mathrm{i})(z - (1 - \mathrm{i}))$. On a donc factorisé P :

$$P(z) = (z - 1)(z + 2\mathrm{i})(z - (1 - \mathrm{i}))\,.$$

◇

Quiz 2.7.1. *(MAN 2021) Soit P le polynôme à coefficients réels défini par*

$$P(x) = x^4 + 1\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Vrai ou faux ?

1) ☐ *Il n'existe aucun réel x_* tel que $P(x_*) = 0$.*
2) ☐ *P ne peut pas se factoriser en un produit de monômes du premier degré (du type $ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$).*
3) ☐ *P ne peut pas se factoriser en un produit de binômes du second degré (du type $ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$).*

Chapitre 3

Suites réelles

3.1 Définitions et exemples

(ici, Video: v_suites_intro.mp4)

Dans un cours comme celui-ci, le chapitre sur les *suites* représente le premier dans lequel on rencontre pour la première fois quelques-unes de difficultés centrales de l'analyse. En particulier, on y discutera pour la première fois de la notion de *limite*.

Informel 3.1. Si on souhaite aborder quelques-unes des principales difficultés liées aux suites et à l'analyse, de manière informelle, en évitant le langage mathématique (qui est souvent responsable du blocage des novices), on pourra consulter le texte suivant : **Le marchand de billes** (billes.pdf).

3.1.1 Définition

Définition 3.2. Une **suite** est une famille infinie ordonnée de réels, indexée par des entiers :

$$a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$$

On utilisera la notation compacte suivante : $(a_n)_{n \geqslant n_0}$

La suite peut commencer par un indice n_0 quelconque, mais le plus souvent on considérera $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$. Quand le premier indice n'importe pas ou peu (ce qui sera le cas lorsqu'on étudiera le comportement de a_n pour des indices n *grands*), on écrira parfois (a_n) au lieu de $(a_n)_{n \geqslant n_0}$.

3.1.2 Représentations

On se représente en général une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ de deux façons.

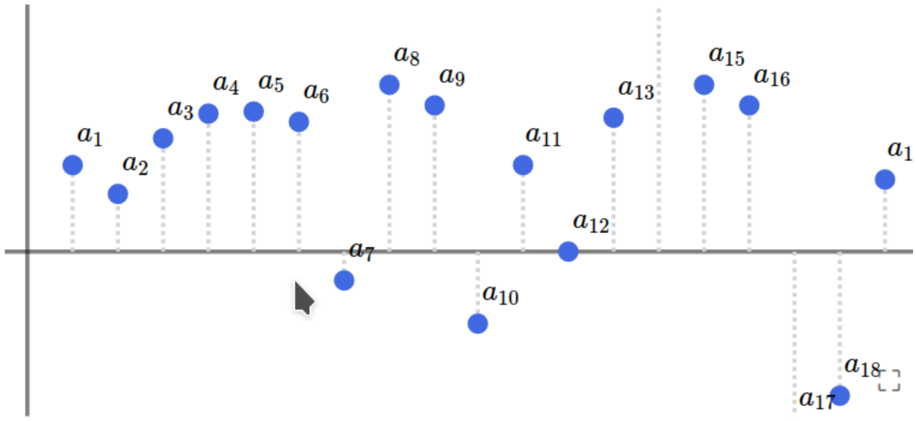
La façon la plus simple est de la représenter simplement comme un ensemble de points sur la droite, $\{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$:

Du fait que cet ensemble est ordonné, cette image peut aussi s'interpréter comme une *trajectoire* : une particule est au point a_1 au temps $n = 1$, puis au point a_2 au temps $n = 2$, etc.

Mais une façon plus intuitive de se représenter une suite est de la voir comme le graphe d'une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n) := a_n \,. \end{aligned}$$

Ceci revient à représenter les paires de points $(n, f(n)) = (n, a_n)$ dans le plan cartésien :



3.1.3 Exemples

Souvent, une suite est définie simplement en disant comment le n-ème terme a_n se calcule explicitement en fonction de l'indice n. Lorsqu'une suite est définie ainsi, chaque terme peut être calculé directement, indépendamment des autres, à l'aide d'une formule.

Exemple 3.3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie ainsi : pour chaque $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{3n^3 + n - 5}{5n^2 + 7} \,.$$

Dans cet exemple, $a_{10'000}$ peut se calculer directement, sans avoir forcément besoin de calculer les autres. ◇

Exemple 3.4. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$, définie ainsi : $a_0 = \frac{1}{3}$, puis pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = 4a_{n-1}(1 - a_{n-1}) \,.$$

Cette suite est définie *par récurrence* : à part le premier, chaque terme est défini en fonction du précédent. Donc on ne peut calculer $a_{10'000}$ que si on a déjà calculé $a_{9'999}$, $a_{9'998}$, etc. Ce type de suite sera étudié dans un chapitre à part. ◇

On peut définir une suite de façon tout à fait arbitraire, ce qui mène rapidement à des suites difficiles à étudier :

Exemple 3.5. Considérons l'expansion décimale du nombre π,

$$\pi = 3.14159265358979323846264 33\ldots \,,$$

et définissons la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$, comme suit :

$$a_1 = 1\,, \quad a_2 = 4\,, \quad a_3 = 1\,, \quad a_4 = 5\,, \quad a_5 = 9\,, \quad a_6 = 2\,, \quad \ldots$$

Plus précisément : a_n est l'entier représentant le n-ème chiffre après la virgule dans l'expansion décimale de π. Une suite facile à définir, mais très difficile à étudier... ◇

Informel 3.6. Donc plus tard, quand on dira "soit (a_n) une suite", il faudra garder à l'esprit que cela signifie que chacun de ses terme est bien défini, mais qu'un terme n'a pas forcément de lien avec les autres.

3.1.4 Suites majorées, minorées, bornées

(ici, Video: v_suites_particulieres.mp4)

Une propriété simplificatrice, pour une suite, est que ses termes ne soient globalement pas trop grands :

Définition 3.7. Une suite (a_n) est

- ⋆ **majorée** si il existe une constante M telle que $a_n \leqslant M$ pour tout n,
- ⋆ **minorée** si il existe une constante m telle que $a_n \geqslant m$ pour tout n,
- ⋆ **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Informel 3.8. Une suite bornée est une suite qui "vit" dans un intervalle, dans le sens où on peut trouver deux nombres finis $m < M$ tels que

$$a_n \in [m, M] \quad \forall n \, .$$

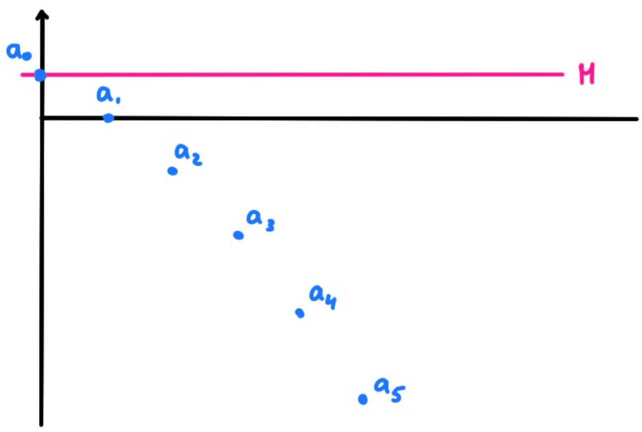
Exemple 3.9. Considérons la suite

$$a_n = 1 - n^2 \, , \qquad n \geqslant 0 \, .$$

Alors $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est majorée. En effet, $n^2 \geqslant 0$ pour tout n, et donc

$$a_n = 1 - n^2 \leqslant 1 \, , \qquad \forall n \geqslant 0 \, .$$

et donc en prenant $M = 1$, on a $a_n \leqslant M$ pour tout n.



Par contre, a_n n'est pas minorée (et donc pas bornée). En effet, montrons que pour toute constante m, il existe un indice n tel que $a_n < m$. Ceci est vrai lorsque $m \geqslant 0$ puisque $a_n \leqslant 0$ dès que $n \geqslant 1$. Si maintenant $m < 0$, alors $a_n = 1 - n^2 < m$ si et seulement si $n > \sqrt{1-m}$ (on a simplement résolu l'inéquation). Donc en prenant n'importe quel entier n plus grand que $\sqrt{1-m}$, on a bien que $a_n < m$. Ceci montre qu'il n'existe aucun minorant pour cette suite. ⋄

Exemple 3.10. Considérons la suite

$$a_n = 2\sin(5n+1) - 3\cos(\sqrt{n}) \, , \qquad n \geqslant 0 \, .$$

Puisque

$$\begin{aligned} |a_n| &= \big|2\sin(5n+1) - 3\cos(\sqrt{n})\big| \\ &\leqslant |2\sin(5n+1)| + |-3\cos(\sqrt{n})| \\ &= 2|\sin(5n+1)| + 3|\cos(\sqrt{n})| \\ &\leqslant 2 + 3 = 5 \, , \end{aligned}$$

la suite est bornée :

$$-5 \leqslant a_n \leqslant +5\,, \qquad \forall n\,.$$

◇

Exemple 3.11. La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$, où $a_n :=$ $n$ème chiffre de l'expansion décimale de π en base 10, est bornée, car minorée par 0, et majorée par 9. ◇

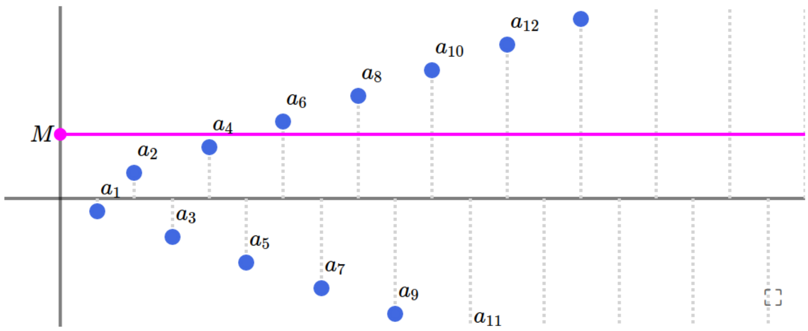
Exemple 3.12. La suite $a_n = (-1)^n n$ n'est pas majorée. En effet, fixons un seuil $M > 0$ (sous-entendu : aussi grand que l'on veut), et prenons un entier pair $n = 2k$ quelconque, tel que $k > M/2$. On a alors

$$a_n = a_{2k} = (-1)^{2k} 2k = 2k > M\,.$$

Cette suite n'est pas minorée non plus. En effet, fixons un seuil $m < 0$ (sous-entendu : aussi grand que l'on veut, négatif), et prenons un entier impair $n = 2k+1$ quelconque, tel que $k > -(m-1)/2$. On a alors

$$a_n = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1}(2k+1) = -(2k+1) < m\,.$$

◇



3.1.5 Suites monotones

Définition 3.13. Une suite (a_n) est

- ⋆ **croissante** si $a_n \leqslant a_{n+1}$ pour tout n,
- ⋆ **strictement croissante** si $a_n < a_{n+1}$ pour tout n,
- ⋆ **décroissante** si $a_n \geqslant a_{n+1}$ pour tout n,
- ⋆ **strictement décroissante** si $a_n > a_{n+1}$ pour tout n.

Si (a_n) satisfait une de ces propriétés, elle est dite **monotone**.

Exemple 3.14. La suite $a_n = n^2$, $n \geqslant 0$, est strictement croissante puisque

$$a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + \underbrace{2n+1}_{>0} > n^2 = a_n\,.$$

◇

Exemple 3.15. La suite **harmonique** $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$, est strictement décroissante puisque

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$$

◇

Exemple 3.16. Considérons la suite $a_n = \frac{n}{n+1}$ On peut écrire

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}\,,$$

ce qui implique, puisque $2 > 1$,

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n+1} = a_n\,,$$

et donc que (a_n) est croissante.

◇

Quiz 3.1.1. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si il existe une constante M_1 telle que $a_n \leqslant M_1$ pour tout n pair, et une constante M_2 telle que $a_n \leqslant M_2$ pour tout n impair, alors (a_n) est majorée.*
2) □ *Si il existe une constante $m > 0$ telle que $a_n \geqslant -\frac{1}{m}$ pour tout n, alors (a_n) est minorée.*
3) □ *Si (a_n) est majorée, alors il existe une constante $M > 0$ telle que $a_n \leqslant \frac{M}{5}$ pour tout n.*
4) □ *Si (a_n) est bornée, alors il existe une constante $C > 0$ telle que $-\frac{C}{17} < a_n < \frac{C}{11}$ pour tout n.*
5) □ *Si (a_n) est bornée, alors il existe deux constantes, $C_- < 0$ et $C_+ > 0$ telles que $C_- \leqslant a_n \leqslant C_+$ pour tout n.*

Quiz 3.1.2. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si une suite est croissante, alors elle est minorée.*
2) □ *Si une suite est croissante, alors elle n'est pas majorée.*
3) □ *Si (a_n) est croissante, alors $(-a_n)$ est décroissante.*
4) □ *Si une suite n'est pas croissante, c'est qu'elle est décroissante.*
5) □ *Si une suite est constante, alors elle est croissante.*
6) □ *Si une suite est constante, alors elle est décroissante.*
7) □ *Si une suite est à la fois croissante et décroissante, alors elle est constante.*
8) □ *Il n'existe aucune suite qui soit à la fois strictement croissante et strictement décroissante.*

3.2 Limite : $a_n \to L$

La notion centrale de l'analyse est celle de *limite*, et on va l'aborder ici pour la première fois, dans le cadre simple des suites réelles. Définir rigoureusement ce que signifie "tendre vers L" est une des difficultés rencontrées dans ce cours. Nous allons donc commencer par le cas $L = 0$ avant de passer au cas général.

3.2.1 Tendre vers zéro

(ici, Video: `v_suites_tendent_vers_zero.mp4`)

Pour un réel x, "être proche de zéro" signifie que la distance qui le sépare de 0 est petite. Donc pour voir si les valeurs d'une suite (a_n) s'approchent de zéro, il est naturel de considérer la distance

$$\mathrm{dist}(a_n, 0) = |a_n - 0| = |a_n|\,,$$

et de quantifier précisément ce qu'on entend par "cette distance devient toujours plus petite à mesure que n augmente".

Une autre façon de le décrire est de dire qu' *une suite a_n tend vers zéro si ses éléments se concentrent dans des régions de plus en plus petites autour de zéro, à mesure que l'indice n augmente*. Plus précisément :

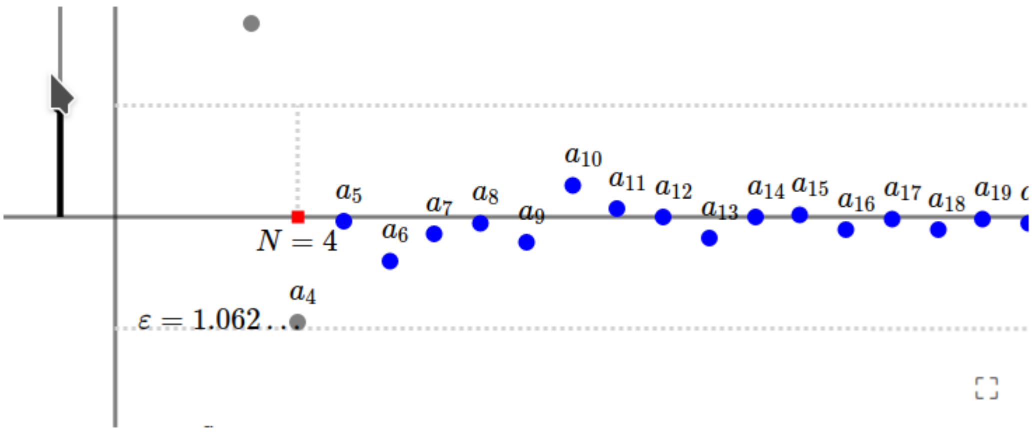
Définition 3.17. On dit qu'une suite (a_n) **tend vers zéro (lorsque $n \to \infty$)** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N (qui dépend de ε) tel que $|a_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, c'est-à-dire tel que

$$a_n \in [-\varepsilon, \varepsilon] \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

On écrira alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ou simplement $a_n \to 0$.

Une autre façon de formuler cette définition : (a_n) tend vers zéro lorsque $n \to \infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$ (une fenêtre), tous les éléments de la suite, à l'exception d'un nombre fini d'entre eux, sont dans l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Sur l'animation ci-dessous, choisir un $\varepsilon > 0$, et trouver un N tel que $a_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ pour tout $n \geqslant N$:



Exemple 3.18. Considérons la suite

$$a_n = \frac{1}{n}\,, \qquad n \geqslant 1\,.$$

Montrons que cette suite tend vers zéro, dans le sens défini ci-dessus.

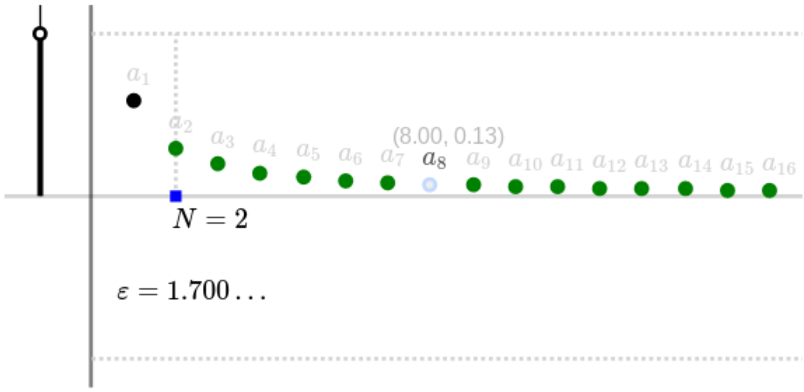
Fixons un $\varepsilon > 0$, et vérifions que l'on peut toujours trouver un entier N tel que

$$|a_n| \leqslant \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

Pour ce faire, remarquons que la condition $|a_n| \leqslant \varepsilon$ est en fait équivalente à $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$, et comme cette dernière est équivalente à $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Pour l'entier N, on peut prendre n'importe quel entier plus grand ou égal à $\frac{1}{\varepsilon}$. On peut par exemple prendre (rappelons que $\lfloor x \rfloor$:=partie entière de x) :

$$N := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1\,.$$

On a ainsi trouvé un entier N tel que $n \geqslant N$ implique $|a_n| \leqslant \varepsilon$. ⋄



Informel 3.19. On voit, dans ce dernier exemple, comme le N cherché dépend de ε ! Car en général, plus $\varepsilon > 0$ est petit, plus il faut augmenter n pour faire rentrer a_n dans l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

3.2.2 Tendre vers $L \in \mathbb{R}$

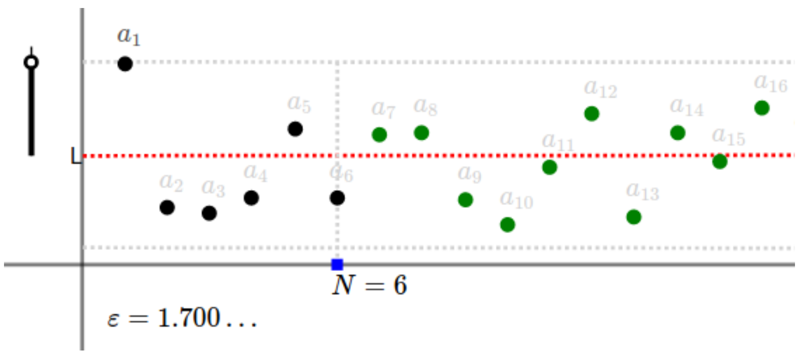
(ici, Video: v_suites_tendent_vers_L.mp4)

La définition de "tendre vers L" est seulement une adaptation de la définition de "tendre vers zéro" : pour que a_n tende vers L, il faut que la suite $a'_n := a_n - L$ tende vers zéro.

Définition 3.20. Soit $L \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite (a_n) **tend vers** L **(lorsque** $n \to \infty$**)** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier positif N tel que $|a_n - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, c'est -à-dire tel que

$$a_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon] \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

On dira alors que L est la **limite** de la suite (a_n), et on écrira $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ou simplement $a_n \to L$.



Lorsqu'il existe un $L \in \mathbb{R}$ tel que (a_n) tend vers L, on dit que la suite **converge** ; si elle ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Exemple 3.21. Considérons la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$a_n = \frac{3n+2}{2n+1}\,.$$

Montrons, en utilisant la définition de limite donnée plus haut, que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}\,.$$

Fixons donc un $\varepsilon > 0$, et vérifions que l'on peut trouver un entier N tel que

$$\left| a_n - \frac{3}{2} \right| \leqslant \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

D'abord, écrivons explicitement la différence

$$\left|a_n - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3n+2}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}\,.$$

On voit que cette dernière expression peut être rendue arbitrairement petite en prenant n suffisamment grand. Plus précisément : fixons un $\varepsilon > 0$. Une simple manipulation montre que

$$\frac{1}{2(2n+1)} \leqslant \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \geqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\Big)\,.$$

Pour N, il suffit donc de prendre n'importe quel entier plus grand ou égal à $\frac{1}{2}(\frac{1}{2\varepsilon} - 1)$. Pour être tout à fait précis, définissons (rappel : $\lfloor x \rfloor$ =valeur entière de x)

$$N := \Big\lfloor \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\Big)\Big\rfloor + 1\,.$$

Par cette définition de N, $n \geqslant N$ implique que $|a_n - \frac{3}{2}| \leqslant \varepsilon$.

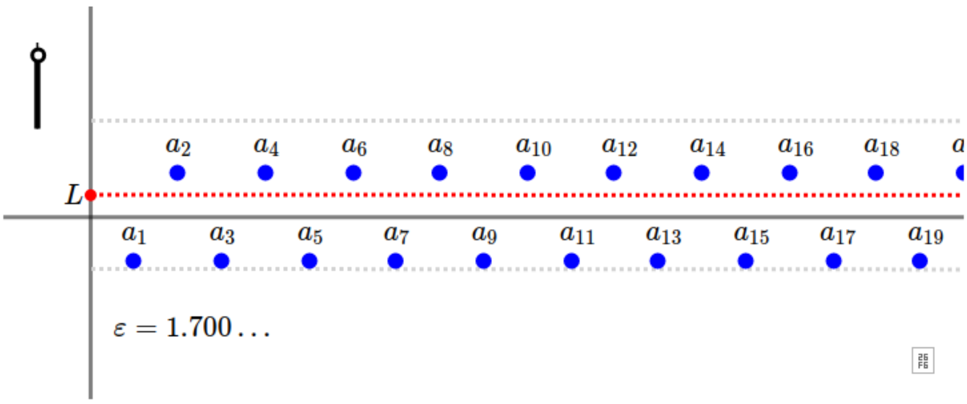
On a donc bien montré que (a_n) est convergente, et que sa limite vaut $\frac{3}{2}$.

Remarquons que peu importe comment il est choisi, N devient de plus en plus grand à mesure que $\varepsilon > 0$ devient plus petit. ◇

Exemple 3.22. Considérons la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$a_n = (-1)^n\,.$$

Comme cette suite ne prend que les valeurs $+1$ (lorsque n est pair) et -1 (lorsque n est impair), elle est nécessairement divergente. En effet, pour n'importe quel $L \in \mathbb{R}$, si $\varepsilon > 0$ est pris suffisamment petit (en fait : si $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$), alors il existe forcément une infinité d'indices n tels que $a_n \notin [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$. ◇



Quiz 3.2.1. *Soit (a_n) telle que $a_n \to 0$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?*

1) ☐ *(a_n) est décroissante.*
2) ☐ *$|a_n| \to 0$.*
3) ☐ *$a_n = 0$ pour tout n suffisamment grand.*
4) ☐ *Si (b_n) est une suite quelconque, alors $a_n b_n \to 0$.*
5) ☐ *Si (b_n) est une autre suite telle que $b_n \to 0$, alors $\frac{a_n}{b_n} \to 1$.*
6) ☐ *Il existe $M > 0$ tel que $|a_k| \leqslant M$ pour tout k.*
7) ☐ *$\frac{1}{a_n} \to \infty$*
8) ☐ *Pour tout $\delta > 0$, l'ensemble des entiers n tels que $a_n \notin \,]-\delta, \delta[$ est fini.*

Quiz 3.2.2. *Soit (a_n) une suite tendant vers $L \in \mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?*

1) ☐ *L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : a_n = L\}$ contient une infinité d'éléments.*
2) ☐ *Pour tout $\eta > 0$, le nombre d'entiers n tels que $a_n \geqslant L + \eta$ est fini.*
3) ☐ *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $a_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ pour tous les indices n, sauf éventuellement un nombre fini.*
4) ☐ *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $|a_n - L| < \varepsilon$ pour tout $n > N$.*
5) ☐ *$a_n \neq L$ pour tout n.*
6) ☐ *Si $L > 0$, alors le nombre d'indices n tels que $a_n \leqslant 0$ est fini.*
7) ☐ *Pour tout entier N, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|a_n - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.*
8) ☐ *La suite $b_n = e^{a_n}$ est bornée.*

Quiz 3.2.3. *Soit (a_n) une suite qui ne tend pas vers $L \in \mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?*

1) ☐ *Pour tout $\varepsilon < 0$ il existe un entier N tel que $|a_n - L| > \varepsilon$ pour tout $n < N$.*
2) ☐ *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que $|a_n - L| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.*
3) ☐ *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que $|a_n - L| > \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.*
4) ☐ *Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $a_n \notin [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ pour une infinité d'indices n.*
5) ☐ *Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $a_n \notin [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ pour tout $n \geqslant N$.*

3.3 Propriétés de la limite

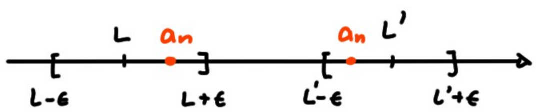
(ici, Video: v_suites_proprietes.mp4)

Le calcul de limites sera grandement facilité par l'utilisation des *propriétés générales* satisfaites par les suites convergentes, que nous commençons à décrire maintenant.

La première propriété dit qu'une suite ne peut pas tendre vers deux limites différentes :

Lemme 7. *Si une suite est convergente, alors sa limite est unique.*

Preuve: Supposons, par l'absurde, que $a_n \to L$ et $a_n \to L'$, avec $L \neq L'$. Si on suppose par exemple que $L < L'$, alors on peut toujours prendre un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, de manière à ce que les intervalles $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ et $[L' - \varepsilon, L' + \varepsilon]$ soient disjoints :



Plus concrètement, on peut garantir que ces intervalles sont disjoints en prenant par exemple

$$\varepsilon := \frac{L' - L}{3} .$$

Maintenant,

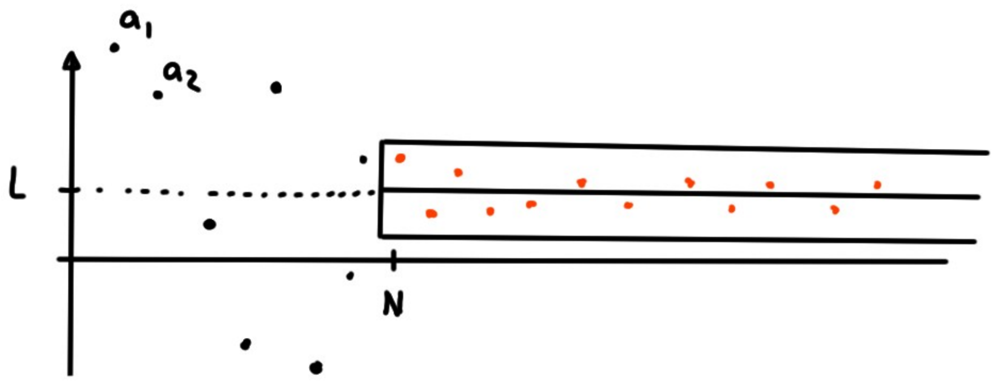
- ⋆ Comme $a_n \to L$, il existe N tel que $a_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ pour tout $n \geqslant N$.
- ⋆ Comme $a_n \to L'$, il existe N' tel que $a_n \in [L' - \varepsilon, L' + \varepsilon]$ pour tout $n \geqslant N'$.

Cela implique que pour $n \geqslant \max\{N, N'\}$, a_n doit être dans les deux intervalles en même temps, une contradiction puisque ces intervalles sont disjoints. □

La deuxième est que les valeurs des termes d'une suite convergente ne peuvent pas devenir trop grands :

Lemme 8. *Si une suite converge, alors elle est bornée.*

Preuve: Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite convergente. Nommons L sa limite. La convergence de a_n vers L implique en particulier que l'on peut fixer, par exemple, $\varepsilon := 1$, et considérer l'entier N tel que $a_n \in [L-1, L+1]$ pour tout $n \geqslant N$:



En particulier on a, pour tout $n \geqslant N$, que $L-1 \leqslant a_n \leqslant L+1$. Si on définit maintenant

$$M := \max\{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, L+1\}$$
$$m := \min\{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, L-1\}\,,$$

alors on a bien garanti que $m \leqslant a_n \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$. □

Lemme 9. *Si $a_n \to L$, alors $|a_n| \to |L|$.*

Preuve: L'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$|a_n| = |(a_n - L) + L| \leqslant |a_n - L| + |L|\,,$$

ainsi que

$$|L| = |(L - a_n) + a_n| \leqslant |a_n - L| + |a_n|\,,$$

En combinant ces inégalités, on obtient

$$-|a_n - L| \leqslant |a_n| - |L| \leqslant |a_n - L|\,,$$

qui est équivalente à

$$\big||a_n| - |L|\big| \leqslant |a_n - L|\,.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Puisque $a_n \to L$, il existe N tel que $|a_n - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Par l'inégalité ci-dessus, ceci implique aussi que $||a_n| - |L|| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. □

Remarque 3.23. Remarquons que la suite des valeurs absolues $|a_n|$ peut avoir une limite, même si a_n est divergente. C'est par exemple ce qui se passe avec la suite $a_n = (-1)^n$. Ceci implique que la réciproque du lemme précédent est fausse en général. ◇

Finalement, listons quelques propriétés qui sont utilisées constamment dans les calculs de limites.

Lemme 10. *(Opérations sur les limites) Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes : $a_n \to L_1$, $b_n \to L_2$. Alors*

1) *Limite de la somme :*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \big(\lim_{n\to\infty} a_n\big) + \big(\lim_{n\to\infty} b_n\big) = L_1 + L_2\,.$$

2) *Limite du produit :*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \big(\lim_{n\to\infty} a_n\big) \cdot \big(\lim_{n\to\infty} b_n\big) = L_1 L_2\,.$$

3) *Limite du quotient : si $L_2 \neq 0$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2}\,.$$

4) *Si $a_n \leqslant b_n$ pour tout n suffisamment grand, alors $L_1 \leqslant L_2$.*

Remarque 3.24. Dans la dernière propriété, les "$\leqslant$" ne peuvent pas être remplacés par des "$<$". En effet, on peut très bien avoir deux suites convergentes telles que $a_n < b_n$ pour tout n suffisamment grand, mais telles que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Comme exemple simple, on peut considérer les suites $a_n = -\frac{1}{n}$ et $b_n = \frac{1}{n}$. ◇

Preuve: 1. Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| &= |(a_n - L_1) + (b_n - L_2)| \\ &\leqslant |a_n - L_1| + |b_n - L_2|\,.\end{aligned}$$

Fixons un $\varepsilon > 0$, et posons $\varepsilon' := \varepsilon/2$. Comme $a_n \to L_1$, il existe N_a tel que $|a_n - L_1| \leqslant \varepsilon'$ pour tout $n \geqslant N_a$. Comme $b_n \to L_2$, il existe N_b tel que $|b_n - L_2| \leqslant \varepsilon'$ pour tout $n \geqslant N_b$. On a donc, pour tout $n \geqslant N := \max\{N_a, N_b\}$,

$$|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| \leqslant |a_n - L_1| + |b_n - L_2| \leqslant 2\varepsilon' = \varepsilon\,.$$

2. Comme a_n converge, elle est bornée : il existe $C > 0$ telle que $|a_n| \leqslant C$ pour tout n. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}|a_n b_n - L_1 L_2| &= |a_n b_n - a_n L_2 + a_n L_2 - L_1 L_2| \\ &\leqslant |a_n||b_n - L_2| + |L_2||a_n - L_1| \\ &\leqslant C|b_n - L_2| + |L_2||a_n - L_1|\,.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit N_a tel que $|a_n - L_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2|L_2|}$ pour tout $n \geqslant N_a$ (serait dommage que $L_2 = 0$!), et soit N_b tel que $|b_n - L_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C}$ pour tout $n \geqslant N_b$. On a alors que pour tout $n \geqslant N := \max\{N_a, N_b\}$,

$$\begin{aligned}|a_n b_n - L_1 L_2| &\leqslant C|b_n - L_2| + |L_2||a_n - L_1| \\ &\leqslant C\frac{\varepsilon}{2C} + |L_2|\frac{\varepsilon}{2|L_2|} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

3. Il suffit de montrer la propriété dans le cas où $a_n = 1$ pour tout n, c'est-à-dire de montrer que $b_n \to L_2 \neq 0$ implique que

$$\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{L_2}\,.$$

(En effet, on utilise alors la propriété du produit démontrée plus haut, pour conclure dans le cas général que $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to L_1 \cdot \frac{1}{L_2}$.) Pour ce faire, commençons par utiliser le fait que $b_n \to L_2$ implique $|b_n| \to |L_2| > 0$: donc il existe N_0 tel que $|b_n| \geqslant |L_2|/2 > 0$ pour tout $n \geqslant N_0$. Ensuite, on peut écrire, pour tout $n \geqslant N_0$, que

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}\right| = \frac{|b_n - L_2|}{|L_2| \cdot |b_n|} \leqslant \frac{2}{|L_2|^2}|b_n - L_2|\,.$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$, et posons $\varepsilon' = \frac{|L_2|^2 \varepsilon}{2}$. Comme $b_n \to L_2$, on sait qu'il existe N' tel que $|b_n - L_2| \leqslant \varepsilon'$ pour tout $n \geqslant N'$. Si on pose $N = \max\{N_0, N'\}$, on a aussi, pour tout $n \geqslant N$,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}\right| \leqslant \frac{2}{|L_2|^2}|b_n - L_2| \leqslant \frac{2}{|L_2|^2}\varepsilon' = \varepsilon\,.$$

On a donc montré que $1/b_n \to 1/L_2$.

4. La preuve de la dernière propriété est laissée en exercice. □

Exemple 3.25. Considérons la suite (x_n) définie ainsi :

$$x_n = \frac{6n+4}{8n^3+4n^2}$$

La convergence de cette suite peut paraître a priori difficile à étudier, mais remarquons qu'on peut l'écrire comme un produit :

$$x_n = \frac{1}{2}\frac{3n+2}{2n+1}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}a_n b_n\,,$$

où $a_n = \frac{3n+2}{2n+1}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$. On a montré précédemment que $a_n \to \frac{3}{2}$, et on montre facilement que $b_n \to 0$; en effet, si $\varepsilon > 0$, alors $|b_n| \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$, où N est un entier quelconque plus grand que $1/\sqrt{\varepsilon}$. On peut maintenant utiliser la propriété ci-dessus pour des limites de produits, et conclure que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}a_n b_n = \frac{1}{2}\big(\lim_{n\to\infty} a_n\big)\big(\lim_{n\to\infty} b_n\big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 0 = 0\,.$$

On a donc montré que x_n converge et que sa limite est égale à zéro. Il est important d'apprécier le fait que si on avait voulu le montrer uniquement à partir de la définition de limite, il faudrait montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un N tel que

$$\left|\frac{6n+4}{8n^3+4n^2}\right| \leqslant \varepsilon\,, \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

Partir à la recherche de ce N est possible, mais représente une tâche considérablement plus compliquée que la simple utilisation de la propriété pour la limite d'un produit. ◇

Quiz 3.3.1. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si $a_n \to L$ et $a_n \to 2L$, alors $L = 0$.*
2) □ *Si $a_n + b_n \to L_1 + L_2$, alors $a_n \to L_1$ et $b_n \to L_2$.*
3) □ *Si $a_n \to a$, $b_n \to b$ et $c_n \to c$, alors*

$$a_n + b_n + c_n \to a + b + c\,,$$
$$a_n b_n c_n \to abc\,.$$

4) □ *Si $a_n b_n$ converge, alors a_n et b_n convergent.*
5) □ *Si $\frac{a_n}{b_n} \to L$, alors b_n ne tend pas vers zéro.*
6) □ *Si $a_n < b_n$ pour tout n suffisamment grand, et si $a_n \to L_1$, $b_n \to L_2$, alors $L_1 < L_2$.*
7) □ *Si $a_n \leqslant b_n$ pour une infinité d'indices n, et si $a_n \to L_1$, $b_n \to L_2$, alors $L_1 \leqslant L_2$.*

3.4 Le Théorème des deux gendarmes

(ici, Video: v_suites_gendarmes.mp4)

Théorème 3.26. *Soit (x_n) une suite. Soient (a_n), (b_n) deux suites telles que*

1) $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ *pour tout n suffisamment grand,*
2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Alors (x_n) converge, et sa limite vaut L :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L\,.$$

Preuve: Soit N_0 un entier tel que $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant N_0$.

Fixons $\varepsilon > 0$.

- ⋆ Puisque $a_n \to L$, il existe N_a tel que $a_n \in [L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ pour tout $n \geqslant N_a$.
- ⋆ Puisque $b_n \to L$, il existe N_b tel que $b_n \in [L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ pour tout $n \geqslant N_b$.

Définissons l'entier

$$N := \max\{N_0, N_a, N_b\}\,.$$

Si $n \geqslant N$, alors on a en particulier que $a_n \geqslant L-\varepsilon$ et $b_n \leqslant L+\varepsilon$, ce qui implique

$$L-\varepsilon \leqslant a_n \leqslant x_n \leqslant b_n \leqslant L+\varepsilon\,.$$

De ces dernières inégalités, on tire que $|x_n - L| \leqslant \varepsilon$.

On a donc bien montré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que $|x_n - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Ceci signifie que $x_n \to L$. □

Exemple 3.27. Considérons la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, définie par

$$x_n = \frac{2+\cos(19n^2+n^7)}{n}\,.$$

La partie contenant $\cos(\cdots)$ étant compliquée, on peut utiliser le fait qu'elle est bornée : $-1 \leqslant \cos(\cdots) \leqslant +1$, ce qui permet d'écrire

$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{=a_n} = \frac{2-1}{n} \leqslant x_n \leqslant \frac{2+1}{n} = \underbrace{\frac{3}{n}}_{=b_n}$$

Mais, puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = 3\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, le théorème des deux gendarmes garantit que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. ◇

Informel 3.28. Une bonne utilisation du théorème, pour montrer qu'une suite (x_n) converge et trouver sa limite, nécessite de trouver deux "gendarmes" (a_n) et (b_n) qui non seulement encadrent (x_n), mais qui possèdent en plus la même limite ! Dans des situations simples, comme dans l'exemple précédent, on obtient souvent des gendarmes efficaces en majorant/minorant certaines parties de x_n qui ne sont pas essentielles dans le comportement pour des indices n grands. Mais parfois, trouver des gendarmes qui ont la même limite peut s'avérer plus difficile !

Exemple 3.29. Considérons la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, définie par

$$x_n = \frac{2^n}{n!}\,, \qquad n \geqslant 1\,.$$

Comme le numérateur est un produit de n fois le même nombre "2", alors que le dénominateur est un produit de n nombres dont presque tous sont *plus grands que* 2, le dénominateur doit croître beaucoup plus vite que le numérateur. Ceci suggère que $x_n \to 0$, ce que l'on va essayer de montrer à l'aide du théorème des deux gendarmes.
Comme $x_n \geqslant 0$, il suffit de trouver une suite b_n telle que

- $\star$ $0 \leqslant x_n \leqslant b_n$, et
- $\star$ $b_n \to 0$.

Or si on écrit explicitement, pour tout $n \geqslant 3$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}{n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdots 1} \\ &= \frac{2}{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{n-1}}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\frac{2}{n-2}}_{\leqslant 1} \cdots \underbrace{\frac{2}{3}}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\frac{2}{2}}_{=1} \cdot \frac{2}{1} \\ &\leqslant \frac{4}{n} =: b_n \,. \end{aligned}$$

Puisque $b_n \to 0$, ceci implique bien que $x_n \to 0$. $\diamond$

Voyons ensuite une conséquence très utile du théorème des deux gendarmes :

Corollaire 5. *Si (x_n) est bornée et si $y_n \to 0$, alors $x_n y_n \to 0$.*

Preuve: Comme (x_n) est bornée, il existe $C > 0$ telle que $-C \leqslant x_n \leqslant C$ pour tout n. On a donc $0 \leqslant |x_n y_n| = |x_n||y_n| \leqslant C|y_n|$, ce qui donne

$$-C|y_n| \leqslant x_n y_n \leqslant C|y_n| \,.$$

Puisque $y_n \to 0$, ceci implique $\pm C|y_n| \to 0$. Par le Théorème des deux gendarmes, on conclut que $|x_n y_n| \to 0$, ce qui implique $x_n y_n \to 0$. $\square$

Quiz 3.4.1. *Vrai ou faux ?*

1) $\square$ *Si $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ pour tout n suffisamment grand, et si x_n ne converge pas, alors a_n et b_n ne convergent pas non plus.*
2) $\square$ *Si $a_n < x_n < b_n$ pour tout n suffisamment grand, et si $a_n \to L$ et $b_n \to L$, alors $x_n \to L$.*
3) $\square$ *Si $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ pour tout n suffisamment grand, et si $|a_n - b_n| \to 0$, alors x_n converge.*
4) $\square$ *Si il existe N_1 tel que $x_n \geqslant a_n$ pour tout $n \geqslant N_1$ et s'il existe N_2 tel que $x_n \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant N_2$, et si a_n et b_n convergent vers la même limite, alors x_n est convergente.*
5) $\square$ *Si $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ pour tout n suffisamment grand, et si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \lim_{n\to\infty} b_n$, alors x_n n'a pas de limite.*
6) $\square$ *Si $|x_n| \leqslant n$ et si $y_n \to 0$, alors $x_n y_n \to 0$.*
7) $\square$ *Si e^{x_n} est bornée et si $y_n \to 0$, alors $x_n y_n \to 0$.*

3.5 Les suites monotones et bornées

(ici, Video: v_suites_monotones_bornees_convergent.mp4)

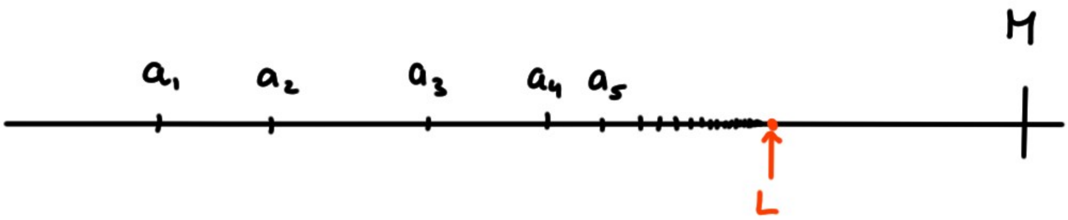
On a vu qu'une suite convergente est forcément bornée. Mais le contraire n'est pas vrai : une suite bornée ne converge pas forcément.

Exemple 3.30. La suite $a_n = (-1)^n$ ne converge pas, mais elle est bornée, puisque $|a_n| = 1$, ce qui implique $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$ pour tout n. $\diamond$

Par contre, si une suite est bornée *et monotone*, alors elle converge :

Théorème 3.31. *Soit (a_n) une suite.*

1) *Si (a_n) est croissante et majorée, elle converge.*
2) *Si (a_n) est décroissante et minorée, elle converge.*



Preuve: Soit (a_n) une suite croissante et majorée. Considérons l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$ défini comme étant l'ensemble de tous les points de la suite :

$$A := \{a_1, a_2, a_3, \dots\}\,.$$

Puisque la suite est bornée, A est majoré ; on peut donc considérer le réel L défini par

$$L := \sup A\,.$$

Nous allons montrer que $a_n \to L$.

Par définition, le supremum est un majorant, et donc $a_n \leqslant L$ pour tout n. De plus, comme le supremum est le *plus petit* majorant, on a que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_* tel que $L - \varepsilon \leqslant a_{n_*}$. Or comme la suite est croissante, on a

$$L - \varepsilon \leqslant a_{n_*} \leqslant a_{n_*+1} \leqslant a_{n_*+2} \leqslant \cdots \leqslant L\,,$$

ce qui implique $|a_n - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_*$.

On a ainsi montré que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|a_n - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout n suffisamment grand. Ceci montre que $a_n \to L$.

(Dans le deuxième cas, lorsque la suite est décroissante et minorée, on adapte cet argument après avoir défini $L := \inf A$.) □

Si le résultat peut paraître intuitif, la preuve a montré qu'il repose entièrement sur l'existence d'un supremum pour les ensembles majorés de $\mathbb{R}$.

Le théorème ci-dessus garantit que si une suite est monotone et bornée, alors elle possède une limite L, qui est soit un supremum (si la suite est croissante et majorée), soit un infimum (si la suite est décroissante et minorée). Parfois, on peut calculer cette limite L explicitement :

Exemple 3.32. Considérons la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$a_n = \frac{n}{n+1}\,.$$

Nous avons montré précédemment que cette suite est strictement croissante. Or elle est aussi majorée, puisque $n < n+1$ implique

$$a_n = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} = 1\,.$$

Le théorème ci-dessus garantit donc qu'elle converge, et que sa limite est égale à

$$L = \sup\{a_0, a_1, a_2, \dots\}\,.$$

On peut vérifier (exercice !) que $L = 1$. ◇

L'exemple suivant présente un cas dans lequel le théorème permet de montrer qu'une certaine suite converge, mais sans pour autant donner la valeur de la limite.

Exemple 3.33. Soit (b_n) la suite définie ainsi :

$$\begin{aligned}
b_1 &:= \frac{1}{1^2} \\
b_2 &:= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \\
b_3 &:= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \\
&\vdots \\
b_n &:= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
b_{n+1} &:= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Cette suite est croissante puisque $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)^2} > b_n$. Pour montrer qu'elle est bornée, remarquons que pour tout $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \cdot k} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\,.$$

En utilisant cette inégalité pour $k = 2, 3, \ldots, n$, on obtient une borne supérieure dans laquelle beaucoup de termes se **téléscopent** :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&< \tfrac{1}{1^2} + \big(\tfrac{1}{1} \underbrace{- \tfrac{1}{2}\big) + \big(\tfrac{1}{2}}_{=0} \underbrace{- \tfrac{1}{3}\big) + \big(\tfrac{1}{3}}_{=0} \underbrace{- \tfrac{1}{4}\big) + \big(\tfrac{1}{4}}_{=0} - \cdots \underbrace{- \tfrac{1}{n-1}\big) + \big(\tfrac{1}{n-1}}_{=0} - \tfrac{1}{n}\big)
\end{aligned}$$

On a donc que

$$b_n < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2\,.$$

On a ainsi montré que (b_n) est majorée par $M = 2$, et comme elle est aussi croissante, elle converge : il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} b_n = L\,.$$

Puisque $1 \leqslant b_n < 2$, on a aussi que $1 \leqslant L \leqslant 2$. ◇

Informel 3.34. Euler a montré en 1734 que cette limite vaut

$$L = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} = 1.664934\ldots\,.$$

Quiz 3.5.1. *Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?*

1) ☐ *Si a_n est majorée et $a_n < a_{n+1}$ pour tout n suffisamment grand, alors a_n converge.*
2) ☐ *Si $a_n \leqslant C$ pour tout n et si a_n est croissante, alors $a_n \to C$.*
3) ☐ *Si a_n est monotone mais pas bornée, elle ne converge pas.*
4) ☐ *Si a_n est bornée mais pas monotone, elle ne converge pas.*
5) ☐ *Si a_n est majorée et croissante mais pas strictement, alors elle converge.*
6) ☐ *Si a_n tend vers $\sup\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, alors a_n est croissante.*
7) ☐ *Si $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, alors*

$$\sup\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \sup\{a_2, a_3, \dots\}\,.$$

8) ☐ *Si a_n est bornée et si $a_n < a_{n+2}$ pour tout n et $a_n > a_{n+1}$ pour tout n pair, alors a_n diverge.*
9) ☐ *Si a_n est majorée et $a_n \leqslant a_{n+1}$ pour tout n pair, alors a_n converge.*

3.6 Suites qui tendent vers l'infini

(ici, Video: v_suites_tendent_vers_infini_2.mp4)

Dans les sections précédentes, on a surtout considéré les suites *convergentes*, c'est-à-dire celles qui tendent vers une limite finie lorsque $n \to \infty$.

On n'étudiera pas systématiquement les suites *divergentes*, dont les comportements peuvent être aussi compliqués que variés, mais nous introduirons quand-même quelques outils qui permettront de décrire certains de ces comportements divergents.

Par exemple, une classe importante de suites divergentes est celle des suites qui *tendent vers l'infini*.

Définition 3.35. Soit (a_n) une suite réelle.

1) On dit que (a_n) **tend vers $+\infty$ (lorsque $n \to \infty$)** si pour tout $M > 0$ il existe un entier positif N_0 (qui dépend en général de M) tel que

$$a_n \geqslant M \qquad \forall n \geqslant N_0\,.$$

On notera, formellement, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ou simplement $a_n \to +\infty$.

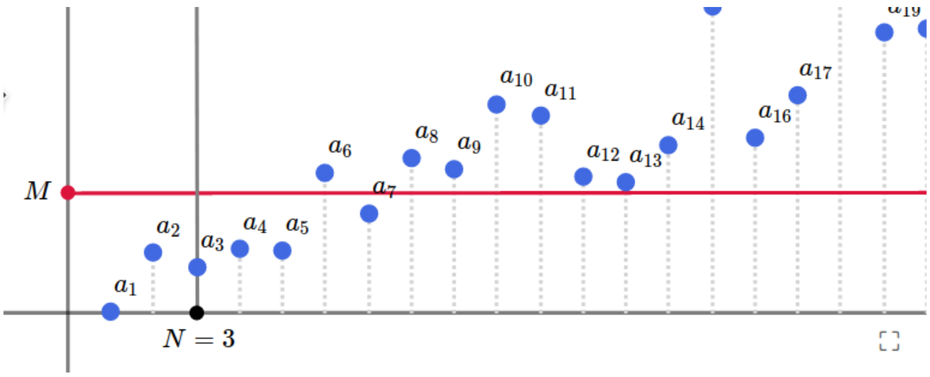
2) On dit que (a_n) **tend vers $-\infty$ (lorsque $n \to \infty$)** si pour tout $M < 0$ il existe un entier positif N_0 (qui dépend en général de M) tel que

$$a_n \leqslant M \qquad \forall n \geqslant N_0\,.$$

On notera (formellement) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ou simplement $a_n \to -\infty$.

Donc a_n tend vers $+\infty$ si elle dépasse et *reste* au-dessus de n'importe quel **seuil** $M > 0$ (sous-entendu : arbitrairement grand) lorsque son indice n est pris suffisamment grand.

Sur l'animation suivante, fixer une valeur du seuil $M > 0$, puis chercher un N tel que $a_n \geqslant M$ pour tout $n \geqslant N$:



Exemple 3.36. Montrons que la suite (a_n) définie par

$$a_n = \frac{2n-5}{7}$$

tend vers $+\infty$. Pour cela, fixons un seuil arbitraire $M > 0$, et remarquons que

$$a_n \geqslant M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2n-5}{7} \geqslant M \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{7M+5}{2}\,.$$

Soit donc $N := \lfloor \frac{7M+5}{2} \rfloor + 1$. Si $n \geqslant N$, alors $n \geqslant \frac{7M+5}{2}$ et donc $a_n \geqslant M$. Comme on peut trouver un tel N pour tout seuil $M > 0$, ceci montre bien que $a_n \to \infty$. ◇

Exemple 3.37. Considérons ensuite

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}\,,$$

et montrons que $a_n \to \infty$. Pour un seuil $M > 0$, on a

$$a_n \geqslant M \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - Mn - M \geqslant 0$$

Le polynôme $P(x) = x^2 - Mx - M$ possède deux racines,

$$x_\pm = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4M}}{2}\,,$$

et il est positif partout en dehors de l'intervalle $[x_-, x_+]$. En définissant $N := \lfloor x_+ \rfloor + 1$, on a bien $a_n \geqslant M$ dès que $n \geqslant N$. ◇

3.6.1 Propriétés des suites qui tendent vers l'infini

Tout comme les suites convergentes, celles qui tendent vers l'infini obéissent à certaines propriétés.

Théorème 3.38. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites. Si $a_n \to +\infty$,*

1) *alors $\frac{1}{a_n} \to 0$.*
2) *et si $b_n \to +\infty$, alors $a_n + b_n \to +\infty$ et $a_n b_n \to +\infty$.*
3) *et si b_n est bornée, alors $a_n + b_n \to +\infty$ et $\frac{b_n}{a_n} \to 0$.*
4) *et s'il existe $\delta > 0$ tel que $b_n \geqslant \delta$ pour tout n suffisamment grand, alors $a_n b_n \to +\infty$. (En particulier, si $b_n \to L$, avec $L > 0$, alors $a_n b_n \to +\infty$.)*
5) *et si $b_n \geqslant a_n$ pour tout n suffisamment grand, alors $b_n \to +\infty$. (Théorème du "**Chien méchant**")*

(ici, Video: `v_suites_tendent_vers_infini_preuves.mp4`)

Exemple 3.39. Considérons la suite
$$x_n = n^3 - 7\sin(\tfrac{n}{2})\cos(\sqrt{n})\,,$$
que l'on peut écrire comme $x_n = a_n + b_n$, où
$$a_n = n^3\,, \qquad b_n = -7\sin(\tfrac{n}{2})\cos(\sqrt{n})\,.$$
On voit que $a_n \to \infty$. On ne sait pas grand chose sur le signe de b_n, mais on sait qu'elle est bornée puisque
$$|b_n| = \left|-7\sin(\tfrac{n}{2})\cos(\sqrt{n})\right| \leqslant 7\,,$$
et donc
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty\,.$$
◇

Exemple 3.40. Considérons
$$x_n = \sqrt{n}(2 + \cos(n^5))\,,$$
que l'on peut écrire comme $x_n = a_n b_n$, où
$$a_n = \sqrt{n}\,, \qquad b_n = 2 + \cos(n^5)\,.$$
On a $a_n \to \infty$, mais b_n n'a visiblement pas de limite. Pourtant, on peut remarquer que $\cos(n^5) \geqslant -1$, et donc
$$b_n = 2 + \cos(n^5) \geqslant 2 - 1 = 1 =: \delta > 0\,.$$
On a donc
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty\,.$$
◇

Quiz 3.6.1. *Soit (a_n) une suite qui n'est pas majorée. Parmis les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?*

1) □ *Il existe M tel que $a_n \geqslant M$ pour tout n.*
2) □ *Pour tout $M > 0$, il existe n tel que $a_n \geqslant M$.*
3) □ *$a_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$*
4) □ *$a_n > M$ pour tout M.*

Quiz 3.6.2. *Si une suite (a_n) ne tend pas vers $+\infty$, alors*

1) □ *soit elle tend vers $-\infty$, soit elle tend vers une valeur $L \in \mathbb{R}$.*
2) □ *(a_n) est majorée.*
3) □ *il existe N telle que (a_n) est décroissante à partir de N.*
4) □ *pour tout $M > 0$, il existe un entier N tel que $a_n \leqslant M$ pour tout $n \geqslant N$.*
5) □ *il existe un $M > 0$ tel que $a_n < M$ pour une infinité d'indices n.*

Quiz 3.6.3. *Soit $a_n \to +\infty$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?*

1) □ *Si $a_n \leqslant b_n$ pour une infinité d'indices n, alors $b_n \to \infty$.*
2) □ *Si $a_n \leqslant b_n$ pour tout n, alors $\frac{1}{b_n} \to 0$.*
3) □ *Si $b_n \leqslant a_n$, alors (b_n) est majorée.*
4) □ *Si b_n est minorée, alors $a_n b_n \to \infty$.*
5) □ *Si il existe $\delta \geqslant 0$ tel que $b_n \geqslant \delta$ pour tout n suffisamment grand, alors $a_n b_n \to \infty$.*
6) □ *Si $r > 1$, alors $\frac{a_n}{r^n} \to 0$.*
7) □ $e^{-a_n} \to 0$
8) □ $\frac{\sin(a_n)}{a_n} \to 1$

3.7 Comportements polynômiaux, logarithmiques, exponentiels

(ici, Video: v_suites_comportement_polynexplog.mp4)

3.7.1 Suites et fonctions élémentaires

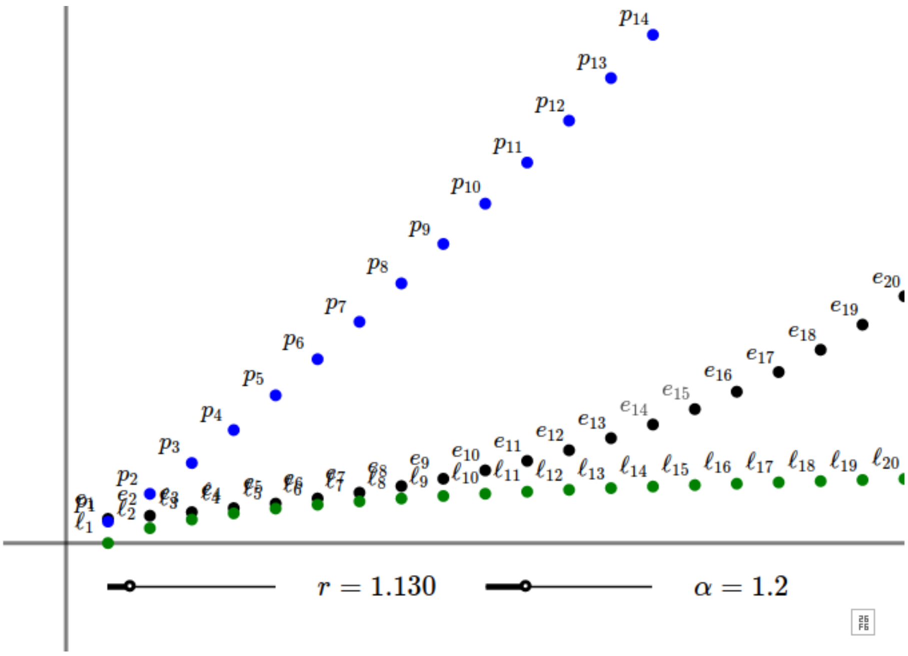
Dans cette section, on compare différents types de comportements à l'infini, à savoir

- ⋆ les **exponentielles de base** $r > 1$,
$$e_n = r^n$$
- ⋆ les **puissances positives** $\alpha > 0$,
$$p_n = n^\alpha$$
- ⋆ et les **logarithmes de base** $b > 1$:
$$\ell_n = \log_b(n)\,.$$

Toutes ces suites tendent vers l'infini lorsque $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} e_n = +\infty\,, \qquad \lim_{n\to\infty} p_n = +\infty\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \ell_n = +\infty\,.$$

Pourtant, elles ne tendent pas vers l'infini à l'infini : certaines *tendent vers l'infini plus vite que d'autres*.



Il est donc naturel d'établir rigoureusement une hiérarchie entre ces trois comportements :

Théorème 3.41. *(Comparaison des divergences lorsque $n \to \infty$)*

1) ***Un exponentielle tend vers l'infini plus vite que n'importe quelle puissance*** *: pour toute base $r > 1$ et toute puissance $\alpha > 0$,*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{r^n} = 0\,.$$
2) ***Une puissance tend vers l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de logarithme*** *: pour toute base $b > 1$, et tous $\alpha, \beta > 0$,*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\big(\log_b(n)\big)^\beta}{n^\alpha} = 0\,.$$

Preuve: 1. Remarquons d'abord que si on sait traiter les cas où α est entier, alors on sait aussi traiter le cas d'un α quelconque. (En effet, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{n^\alpha}{r^n} \leqslant \frac{n^{\lfloor\alpha\rfloor+1}}{r^n}$, donc si $\frac{n^{\alpha'}}{r^n} \to 0$, avec $\alpha' = \lfloor\alpha\rfloor + 1 \geqslant \alpha$, alors $\frac{n^\alpha}{r^n} \to 0$ aussi.)

Pour simplifier, considérons le cas $\alpha = r = 2$. On aimerait donc montrer que

$$\frac{n^2}{2^n} \to 0\,.$$

L'idée est d'utiliser la formule du binôme pour montrer que le dénominateur est plus grand qu'une puissance supérieure à n^2. En effet, la formule du binôme avec $x = y = 1$ donne

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,.$$

Or comme tout les termes de cette dernière somme sont positifs, la somme est plus grande que n'importe lequel de ces termes. Dans notre cas, il suffit de ne garder que le terme correspondant à $k = 3$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,.$$

Ceci implique que

$$0 \leqslant \frac{n^2}{2^n} \leqslant \frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)}\,.$$

On voit que dans ce dernier quotient, le numérateur se comporte en n^2, alors que le dénominateur se comporte en n^3, ce qui implique que sa limite est nulle. Plus précisément,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \underbrace{\frac{6}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}}_{\to 6} = 0\,.$$

Par le théorème des deux gendarmes, on conclut donc que $\frac{n^2}{2^n} \to 0$.

Dans le cas général, pour une exponentielle de base $r > 1$ et une puissance entière α quelconque, on peut adapter la preuve ci-dessus. En effet, en écrivant $r = 1 + \lambda$, où $\lambda > 0$, et en utilisant à nouveau la formule du binôme, on peut minorer

$$r^n = (1+\lambda)^n \geqslant \binom{n}{\alpha+1} \lambda^{\alpha+1}\,.$$

Le reste de la preuve s'adapte facilement (voir la vidéo ci-dessus), et mène à $\frac{n^\alpha}{r^n} \to 0$.

Une preuve semblable de cette première affirmation, même si ça ne se voit pas tout de suite, peut se trouver **ici** (lien web).

2. On peut démontrer la deuxième affirmation à l'aide de la première. □

Informel 3.42. Le théorème implique par exemple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{1000}}{n^{0.0001}} = 0\,.$$

Pourtant, la petitesse du quotient est difficile à *observer* (sur l'animation ci-dessus par exemple), dans le sens où il faut que n soit vraiment *très grand* pour que ce quotient commence à se rapprocher de zéro...

On reviendra sur les limites étudiées ci-dessus, lorsque nous étudierons la **Règle de Bernoulli-l'Hôpital** (lien vers la section `m_derivee_Bernoulli_lHopital`).

3.8 Indéterminations

On a pour l'instant considéré deux types de limites :

⋆ celles qui convergent vers une limite finie : $\lim_{n\to\infty} x_n = L$,

⋆ celles qui tendent vers l'infini : $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$.

Or les limites importantes de l'analyse, celles qui permettent de faire avancer le développement du calcul différentiel et intégral, sont toutes des limites qui impliquent une forme ou une autre d'*indétermination*.

Une limite représente une **indétermination** lorsqu'elle fait intervenir une combinaison de grandeurs qui est telle qu'on ne peut pas déterminer sa valeur directement à l'aide d'une des propriétés de base des limites vues précédemment . Plus précisément, une indétermination apparaît lorsque une suite est composée d'autres suites, présentant des comportement du type "tend vers zéro" ou "tend vers l'infini".

On décrit les principales indéterminations en considérant une suite x_n formée à partir de deux autres suites, que l'on notera a_n et b_n. On suppose les comportements de a_n et b_n connus lorsque $n \to \infty$.

Si...	et si ...	... alors la limite de...	... est une indétermination
$a_n \to +\infty$	$b_n \to +\infty$	$x_n = a_n - b_n$	"$\infty - \infty$"
$a_n \to 0$	$b_n \to +\infty$	$x_n = a_n b_n$	"$0 \cdot \infty$"
$a_n \to \infty$	$b_n \to \infty$	$x_n = \frac{a_n}{b_n}$	"$\frac{\infty}{\infty}$"
$a_n \to 0$	$b_n \to 0$	$x_n = \frac{a_n}{b_n}$	"$\frac{0}{0}$"
$a_n \to 1$	$b_n \to +\infty$	$x_n = a_n^{b_n}$	"1^∞"
$a_n \to +\infty$	$b_n \to 0$	$x_n = a_n^{b_n}$	"∞^0"
$a_n \to 0$	$b_n \to 0$	$x_n = a_n^{b_n}$	"0^0"

Nous ne traiterons pas les indéterminations de façon générale puisque justement, leur présence indique qu'une étude au cas par cas est nécessaire. Nous allons donc discuter certaines de ces indéterminations, et présenter quelques techniques qui permettent de les résoudre, sur des exemples. Notons que ces techniques ne sont pas spécifiques au cas $n \to \infty$: toutes seront utiles plus tard, dans d'autres types de limites (comme $x \to x_0$).

3.8.1 Indéterminations du type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Exemple 3.43. Nous avons **déjà rencontré** (lien vers la section m_suites_limites_infinies) la suite

$$x_n = \frac{n^2}{n+1}\,,$$

qui est du type "$\frac{\infty}{\infty}$" puisque $n^2 \to +\infty$ et $n+1 \to +\infty$. Nous avions également montré qu'elle tend vers $+\infty$, l'intuition derrière ce fait étant la présence de l'exposant "2" fait que le numérateur l'emporte dans la limite $n \to \infty$.

Une autre façon de traiter ce quotient est de l'écrire comme un produit :

$$\frac{n^2}{n+1} = \underbrace{n}_{=a_n} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{=b_n}$$

On a alors $a_n \to +\infty$ et $b_n \to 1$, ce qui implique (par une propriété énoncée et démontrée **ici** (lien vers la section m_suites_limites_infinies)) que

$$\frac{n^2}{n+1} = a_n b_n \to +\infty\,.$$

Ainsi, en récrivant notre suite, on a pu la mettre sous une forme qui permet de déduire son comportement à l'aide d'une propriétés de base des suites. ◇

Informel 3.44. Lorsqu'on est en présence d'un quotient $\frac{a_n}{b_n}$ dans lequel a_n et b_n sont les deux *grands*, on essaiera d'extraire ce qui est à l'origine de cette grandeur, en mettant un *terme dominant* en évidence. On pourra alors faire des simplifications dans la fraction $\frac{a_n}{b_n}$, et éventuellement faire disparaître l'indétermination.

Exemple 3.45. Considérons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 17n + 1}{5n^3 + \sin(n)}\,,$$

qui est effectivement une indétermination de la forme "$\frac{\infty}{\infty}$", puisque

- ⋆ $a_n = 3n^3 - 17n + 1 \to +\infty$ (polynôme de degré 3, dont le coefficient principal est $3 > 0$),
- ⋆ $b_n = 5n^3 + \sin(n) \to +\infty$ ($5n^3 \to \infty$ et $\sin(n)$ est bornée).

Ce que l'on peut faire ici est **extraire les termes dominants** dans a_n et b_n, qui sont les termes contenant la puissance n^3 :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3n^3 - 17n + 1}{5n^3 + \sin(n)} = \frac{n^3(3 - \frac{17}{n^2} + \frac{1}{n^3})}{n^3(5 + \frac{\sin(n)}{n^3})} = \frac{3 - \frac{17}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{\sin(n)}{n^3}} = \frac{a_n'}{b_n'}$$

En simplifiant par n^3 on a obtenu un nouveau quotient qui dans la limite $n \to \infty$ n'est *plus* indéterminé. En effet, $a_n' \to 3$ et $b_n' \to 5$, et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n'}{b_n'} = \frac{3}{5}\,.$$

◇

Exemple 3.46. Les comparaisons des comportements **logarithmiques, polynomiaux et exponentiels** (lien vers la section m_suites_hierarchie), ont consisté à résoudre les indéterminations "$\frac{\infty}{\infty}$" suivantes :

$$x_n = \frac{\left(\log_r(n)\right)^\beta}{n^\alpha} \to 0\,, \qquad x_n = \frac{n^\alpha}{r^n} \to 0\,.$$

Remarquons que ces limites ont requis une analyse plus fine, puisque numérateur et dénominateur sont de nature différente (on n'a pas pu simplement extraire de "terme dominant"). ◇

3.8.2 Indéterminations du type "$\infty - \infty$"

(ici, Video: v_suites_tendent_vers_infini_conjugue.mp4)

Souvent, une suite est définie par une différence de deux nombres qui deviennent de plus en plus grands à mesure que n augmente. Or la différence de deux nombres grands peut, a priori, avoir n'importe quel type de comportement.

Exemple 3.47. Considérons

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^3 - 5n^2\right),$$

dans laquelle $a_n = n^3 \to +\infty$ et $b_n = 5n^2 \to \infty$. Comme a_n tend vers l'infini plus vite que b_n, dû au fait qu'il contient un terme de degré $3 > 2$, on a avantage à mettre n^3 en évidence et obtenir un produit,

$$a_n - b_n = n^3 - 5n^2 = \underbrace{n^3}_{a'_n} \underbrace{\left(1 - \frac{5}{n}\right)}_{b'_n}$$

Maintenant, on a toujours $a'_n \to \infty$, mais puisque $b'_n = 1 - \frac{5}{n} \to 1 \neq 0$, leur produit tend vers $+\infty$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a'_n b'_n = +\infty\,.$$

◇

L'identité élémentaire

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

est souvent utile lorsqu'on a affaire à une différence $a - b$, si on la formule comme suit :

$$a - b = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)} = \frac{1}{a+b}(a^2 - b^2)$$

Ici, on a multiplié et divisé par le **conjugué** de $a - b$. Ainsi, à la différence "$a - b$" se substitue la différence "$a^2 - b^2$", qui est parfois plus facile à traiter.

Cette approche est particulièrement efficace lorsqu'on a des différences de racines :

Exemple 3.48. Considérons

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\},$$

qui est bien du type "$\infty - \infty$". En multipliant et divisant par le conjugué,

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\,.\end{aligned}$$

Ce quotient n'est plus indéterminé :

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0\,.$$

◇

Parfois, on pourra (même si c'est assez rare) résoudre une indétermination "$\infty - \infty$", de la forme $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$, en extrayant explicitement de a_n et de b_n la même partie divergente :

Exemple 3.49. Considérons le cas "$\infty - \infty$" suivant :

$$\lim_{n\to\infty}\big(\log(e^{\sqrt{n}}+2)-\log(e^{\sqrt{n}}+1)\big)$$

Ici, on peut remarquer qu'en écrivant

$$\begin{aligned} a_n &= \log(e^{\sqrt{n}}+2) = \log(e^{\sqrt{n}}(1+2e^{-\sqrt{n}})) = \sqrt{n} + \log(1+2e^{-\sqrt{n}})\,, \\ b_n &= \log(e^{\sqrt{n}}+1) = \log(e^{\sqrt{n}}(1+e^{-\sqrt{n}})) = \sqrt{n} + \log(1+e^{-\sqrt{n}})\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que a_n et b_n contiennent tous deux un "$\sqrt{n}$", qui tend vers l'infini, et qui disparaît lorsqu'on fait la différence :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) &= \lim_{n\to\infty}\Big(\log(1+2e^{-\sqrt{n}}) - \log(1+e^{-\sqrt{n}})\Big) \\ &= \log(1) - \log(1) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

C'est donc un cas d'une indétermination "$\infty - \infty$" dans laquelle on peut montrer que les infinis se "compensent exactement". ◇

3.8.3 Indéterminations du type "$\frac{0}{0}$"

Nous reviendrons au indéterminations "$\frac{0}{0}$", puisqu'elles sont au coeur du problème de la *dérivation*, un outil central de l'analyse.

Pour l'instant, donnons déjà une limite classique "$\frac{0}{0}$" :

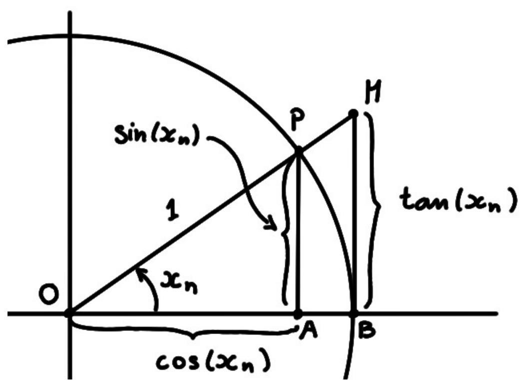
Théorème 3.50. *Soit (x_n) une suite représentant des mesures d'angles en radians. Si $x_n \neq 0$ pour tout n, et si $x_n \to 0$, alors*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1\,.$$

Informel 3.51. Attention, il est important de mentionner que le sinus, dans $\sin(x_n)$, est calculé en supposant que l'angle x_n est mesuré en **radians**. Sinon, la limite n'est pas la même !

Preuve: Comme la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est paire, on peut supposer que $x_n > 0$ pour tout n.

Puisque $x_n \to 0$, on a $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$ pour tout n suffisamment grand. Considérons donc un angle sur le cercle trigonométrique, dont la mesure en radians x_n est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:



Remarquons que le triangle OAP est inclus dans le secteur circulaire OBP, qui est lui-même inclus dans le triangle OBM. On a donc

$$\text{aire}(\triangle\, OAP) \leqslant \text{aire}(\text{secteur } OBP) \leqslant \text{aire}(\triangle\, OBM)\,.$$

On explique **ici** (lien vers la section m_elementaire_trigo) comment calculer l'aire d'un secteur. Ainsi, en exprimant chacune de ces aires en fonction de x_n,

$$\tfrac{1}{2}\cos(x_n)\sin(x_n) \leqslant \tfrac{1}{2}x_n 1^2 \leqslant \tfrac{1}{2}\tan(x_n)\,.$$

Ce deux inégalités sont équivalentes à

$$\underbrace{\cos(x_n)}_{a_n} \leqslant \frac{\sin(x_n)}{x_n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{\cos(x_n)}}_{b_n}\,.$$

Puisque $x_n \to 0$, on a $a_n = \cos(x_n) \to 1$ et $b_n \to \frac{1}{1} = 1$. On conclut donc avec le théorème des deux gendarmes. □

3.8.4 Sur l'équivalence entre les indéterminations

Toutes les indéterminations du tableau présenté plus haut sont équivalentes, dans le sens où on peut toujours transformer une indétermination en une autre. Voyons les principaux cas.

- ⋆ Supposons par exemple que la limite de $\frac{a_n}{b_n}$ soit "$\frac{\infty}{\infty}$". Cela implique que $\frac{1}{b_n} \to 0$, et donc en écrivant $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, la limite devient du type "$\infty \cdot 0$".
- ⋆ Supposons ensuite que la limite de $\frac{a_n}{b_n}$ soit "$\frac{\infty}{\infty}$". En écrivant

  $$\frac{a_n}{b_n} = \exp\Big(\log\frac{a_n}{b_n}\Big) = \exp\big(\log(a_n) - \log(b_n)\big)\,,$$

  on voit que l'on fait apparaître $\log(a_n) - \log(b_n)$, qui dans la limite est du type "$\infty - \infty$".
- ⋆ Soit finalement $a_n^{b_n}$ une suite qui dans la limite $n \to \infty$ est du type "1^∞". En écrivant $a_n^{b_n} = \exp(b_n \log(a_n))$, comme $a_n \to 1$ implique $\log(a_n) \to 0$, $b_n \log(a_n)$ est du type "$\infty \cdot 0$".

Quiz 3.8.1. *Parmi les formes suivantes, indiquer celles qui sont indéterminées.*

1) □ "$\infty + \infty$"
2) □ "$\infty - \infty$"
3) □ "$\infty - 2\infty$"
4) □ "$\frac{\infty}{0}$"
5) □ "$\frac{0}{0}$"
6) □ "$\frac{1}{0}$"
7) □ "$\frac{0}{\infty}$"
8) □ "1^∞"
9) □ "$1^{-\infty}$"
10) □ "∞^∞"
11) □ "0^∞"
12) □ "0^0"
13) □ "∞^0"
14) □ "∞^∞"
15) □ "$\infty^{-\infty}$"
16) □ "$\infty \cdot \infty$"
17) □ "$\frac{-\infty}{\infty}$"
18) □ "$\frac{1}{\infty}$"
19) □ "$\frac{0^\infty}{0^\infty}$"

Quiz 3.8.2. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si* $a_n - b_n \to +\infty$, *alors* $\sqrt{a_n - b_n} \to +\infty$.
2) □ *Si* $a_n - b_n \to +\infty$, *alors* $\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \to +\infty$.
3) □ *Si* $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$ *et si* $\frac{c_n}{b_n} \to 1$, *alors* $\frac{a_n}{c_n} \to \infty$.

3.9 Série géométrique et applications

(ici, Video: v_suites_serie_geometrique.mp4)

Théorème 3.52. *Soit $r \in \mathbb{R}$, et, pour tout $n \geqslant 1$, définissons la suite*

$$s_n := 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + r^n\,.$$

Dans la limite $n \to \infty$,

- ⋆ s_n *diverge et* $s_n \to +\infty$ *si* $r \geqslant 1$,
- ⋆ $s_n \to \frac{1}{1-r}$ *si* $|r| < 1$,
- ⋆ s_n *diverge si* $r \leqslant -1$.

Preuve: Si $r = 1$, alors

$$s_n = 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \cdots + 1^n = n + 1\,,$$

ce qui implique $s_n \to +\infty$.

Si $r \neq 1$, **on a vu** (lien vers la section m_elementaire_sommes_produits) que

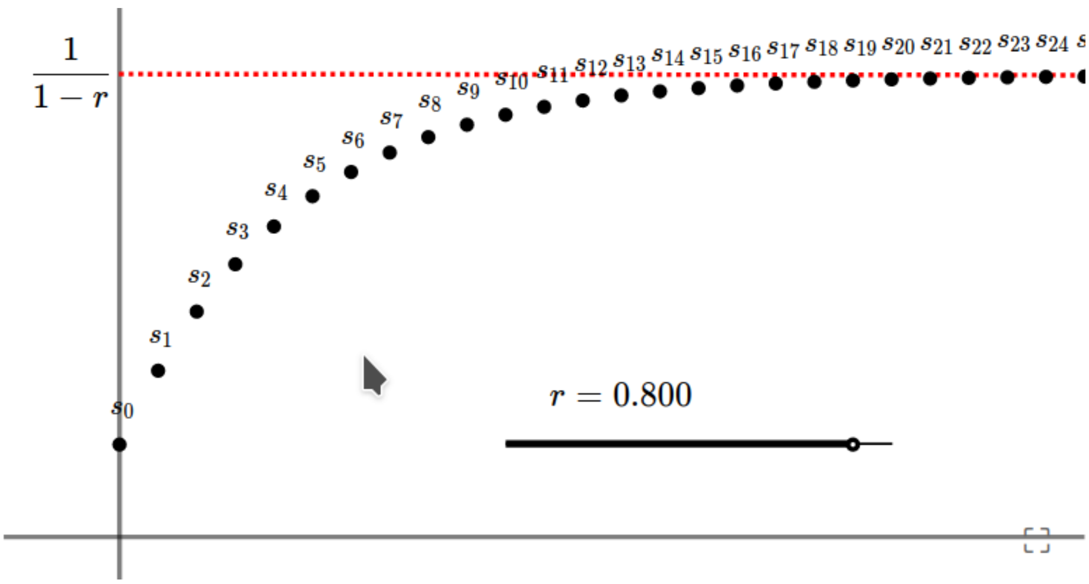
$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\,.$$

On peut alors considérer séparément les cas :

- ⋆ $\underline{r > 1}$. Dans ce cas, on écrit plutôt
$$s_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}\,.$$
Comme $r - 1 > 0$ et $r^{n+1} \to \infty$, on a $s_n \to +\infty$.
- ⋆ $\underline{-1 < r < 1}$. Dans ce cas. $|r^n| = |r|^n \to 0$ car $0 \leqslant |r| < 1$, et donc $s_n \to \frac{1}{1-r}$.
- ⋆ $\underline{r = -1}$. Dans ce cas, $s_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^{n+1})$, et donc ne converge pas.
- ⋆ $\underline{r < -1}$. Dans ce cas, $r^n = (-|r|)^n = (-1)^n |r|^n$, et puisque $|r|^n \to +\infty$, s_n n'a pas de limite lorsque $n \to \infty$.

□

On peut observer le comportement de la suite $(s_n)_{n \geqslant 0}$ en fonction de $-1 < r < 1$ sur l'animation suivante. (On peut en particulier voir comme la suite n'est plus monotone pour des valeurs négatives de r)



Dans le cas $|r| < 1$, on écrit souvent le résultat sous la forme

$$\boxed{1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}}$$

La somme infinie, dans le côté gauche, s'appelle la **série géométrique**, et sa **somme** est la valeur du côté droit, à savoir $\frac{1}{1-r}$. (On étudiera les *séries* dans un chapitre ultérieur.)

On peut utiliser la série géométrique pour obtenir des formules utiles pour des sommes infinies de même nature :

Exemple 3.53. Fixons un $|r| < 1$, et considérons la somme

$$1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - r^5 + \cdots .$$

Remarquons que cette dernière peut se récrire

$$1 + (-r) + (-r)^2 + (-r)^3 + (-r)^4 + (-r)^5 + \cdots ,$$

qui n'est autre que la série géométrique de raison $-r$. Comme $|-r| = |r| < 1$, cette dernière converge et sa somme vaut

$$1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - r^5 + \cdots = \frac{1}{1-(-r)} = \frac{1}{1+r} .$$

◇

Exemple 3.54. Fixons un $|r| < 1$, et considérons la somme

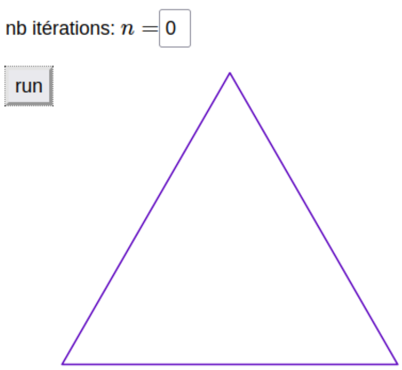
$$r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots .$$

On peut récrire cette dernière ainsi :

$$\begin{aligned} r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots &= (1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots) - 1 \\ &= \frac{1}{1-r} - 1 \\ &= \frac{r}{1-r} . \end{aligned}$$

◇

Exemple 3.55. Partons, à l'étape zéro, d'un triangle équilatéral que l'on suppose d'aire égale à $A_0 = 1$:



Puis, à l'étape 1, on divise chacun de ses trois côtés en trois parties égales, et on remplace chaque partie du milieu par un triangle équilatéral. L'objet obtenu après cette première itération (mettre $n = 1$ dans l'animation ci-dessus) a un bord constitué de 12 segments. Remarquons que l'aire de chacun des trois triangles équilatéraux rajoutés vaut $\frac{1}{9}$, et donc après une itération l'aire totale vaut

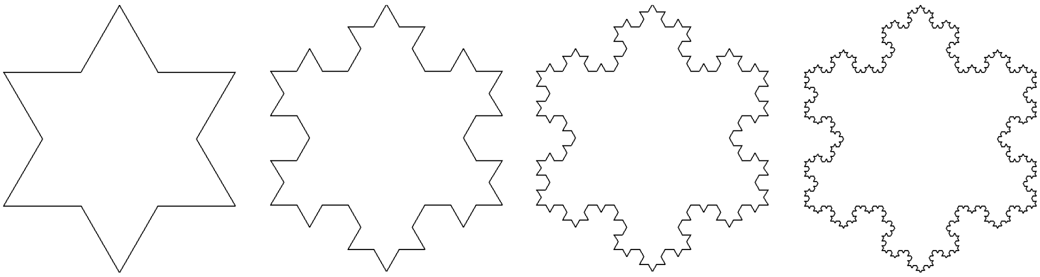
$$A_1 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{9}\,.$$

Puis on recommence avec chacun des segments du bord de A_1, que l'on divise en trois parties égales, et dont on remplace la partie du milieu par un triangle équilatéral d'aire $(\frac{1}{9})^2$. On obtient ainsi un objet dont l'aire vaut maintenant

$$A_2 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2}\,.$$

(Voir aussi l'explication de la vidéo ci-dessus.)

En itérant ce processus à l'infini (diviser à chaque étape les segments du bord en trois parties égales, remplacer celui du milieu par un triangle équilatéral, etc), on obtient un objet limite appelé **flocon de von Koch** (lien web), qui est un objet **fractal** (lien web). (Attention : dans l'animation, ne pas tester des n trop grand, cela risque de faire du mal à votre browser !)



Quelle est l'aire totale du flocon, obtenu après avoir fait $n \to \infty$?

Remarquons qu'à chaque étape, le nombre de segments du bord est multiplié par 4, et qu'à l'étape n, l'aire de chacun des petits triangles rajoutés vaut $\frac{1}{9^n}$. On a donc

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1\\
A_1 &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{9}\\
A_2 &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2}\\
A_3 &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2} + 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^3}\\
&\vdots\\
A_n &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2} + 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^3} + \cdots + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{1}{9^n}\,,
\end{aligned}$$

que l'on peut récrire plus proprement :

$$A_n = 1 + \frac{1}{3}\Big\{1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \frac{4^3}{9^3} + \dots \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\Big\}$$

On reconnaît ici une somme géométrique de raison $r = \frac{4}{9} < 1$, qui dans la limite $n \to \infty$ devient une série géométrique convergente pour laquelle on peut utiliser notre formule :

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{8}{5}\,.$$

◇

3.9.1 Application : existence du nombre e

(ici, Video: v_suites_nombre_e.mp4)

Dans cette section, on étudie la suite

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Dans la limite $n \to \infty$, e_n mène à une indétermination de la forme "1^∞", et il n'est pas clair, a priori, de comment se comporte vraiment e_n.

Informel 3.56. Donnons deux arguments légitimes, *mais tous les deux faux*, concernant le comportement de $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ dans la limite $n \to \infty$.

⋆ On peut penser, que lorsque n est grand, le terme $\frac{1}{n}$ devient négligeable, et donc écrire

$$e_n \simeq (1+0)^n = 1\,,$$

ce qui mène à penser que la limite de e_n est égale à 1.

⋆ En se rappelant que même s'il est petit, le terme $\varepsilon = \frac{1}{n}$ est toujours strictement positif, ce qui mène à penser, puisque $1 + \varepsilon > 1$, que

$$e_n \simeq (1+\varepsilon)^n \to \infty\,.$$

On va pourtant montrer que le vrai comportement de cette suite ne suit aucun de ces scénarios. On peut déjà s'en convaincre en **testant** (lien vers la section m_graphes_suite_reelle) soi-même, avec x_n =CODE>$pow(1+1/n,n)$<CODE...

Théorème 3.57. ⚠ *Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie ci-dessus. Alors*

1) (e_n) est strictement croissante,

2) (e_n) est bornée : $2 \leqslant e_n < 3$ pour tout $n \geqslant 1$.

Par conséquent, il existe $e \in [2,3]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} e_n = e\,.$$

Preuve: Pour commencer, utilisons la **formule du binôme de Newton** (lien vers la section m_recurrence) pour écrire e_n sous une forme qui permette de mieux étudier sa dépendance en n :

$$\begin{aligned} e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (\tfrac{1}{n})^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (\tfrac{1}{n})^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n \cdots n} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} (1 - \tfrac{1}{n}) \cdots (1 - \tfrac{k-1}{n}) \end{aligned}$$

On utilise deux fois cette expression.

- ⋆ Affirmation :(e_n) est croissante. En utilisant l'expression précédente, pour $n+1$

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\big(1 - \underbrace{\tfrac{1}{n+1}}_{<\frac{1}{n}}\big)\cdots\big(1 - \underbrace{\tfrac{k-1}{n+1}}_{<\frac{k-1}{n}}\big)\\
&> 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\big(1 - \tfrac{1}{n}\big)\cdots\big(1 - \tfrac{k-1}{n}\big)\\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\big(1 - \tfrac{1}{n}\big)\cdots\big(1 - \tfrac{k-1}{n}\big) = e_n\,.
\end{aligned}$$

  Dans l'avant-dernière égalité, on a utilisé le fait que si $k = n+1$, alors $1 - \frac{k-1}{n} = 0$. Comme e_n est strictement croissante, on a en particulier que $e_n > e_1 = 2$.

- ⋆ Affirmation :(e_n) est majorée par $M = 3$. En utilisant encore une fois l'expression ci-dessus,

$$\begin{aligned}
e_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\underbrace{\big(1 - \tfrac{1}{n}\big)}_{<1}\cdots\underbrace{\big(1 - \tfrac{k-1}{n}\big)}_{<1}\\
&< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

  Remarquons maintenant que pour tout $k \geqslant 2$,

$$k! = \underbrace{k}_{\geqslant 2} \cdot \underbrace{(k-1)}_{\geqslant 2} \cdots \underbrace{3}_{\geqslant 2} \cdot 2 \cdot 1 \geqslant 2^{k-1}\,,$$

  et donc

$$e_n < 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3\,.$$

On a donc montré que (e_n) est croissante et majorée, donc elle converge. Puisque $2 \leqslant e_n < 3$ pour tout n, sa limite appartient aussi à cet intervalle. □

On connaît aujourd'hui des **milliards de chiffres** (lien web) de l'expansion décimale de e. Ses **premiers termes** (lien web) sont

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497\ldots$$

Euler a montré en 1737 que e est un nombre irrationnel.

Quiz 3.9.1. *Vrai ou faux ?*

1) □ $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$

2) □ $1 + \dfrac{4}{3} + \dfrac{16}{9} + \dfrac{64}{27} + \cdots + \dfrac{65'536}{6'561} = \dfrac{242'461}{6'561}$

Quiz 3.9.2. *Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Si* $a_n \to 0$, *alors* $(1 + a_n)^n \to 1$
2) ☐ *Si* $a_n \to 0$, *alors* $(1 + a_n)^n \to e$
3) ☐ *Si* $a_n \to \infty$ *et* $b_n \to \infty$, *alors* $(1 + \frac{1}{a_n})^{b_n} \to e$
4) ☐

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (1 + \tfrac{1}{n})^n &= \lim_{n\to\infty} \left((1 + \tfrac{1}{n}) \cdots (1 + \tfrac{1}{n})\right) \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} (1 + \tfrac{1}{n})\right) \cdots \left(\lim_{n\to\infty} (1 + \tfrac{1}{n})\right) \\ &= 1 \cdots 1 = 1\,.\end{aligned}$$

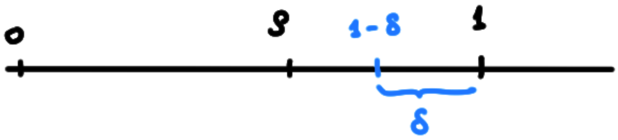
3.10 Critère de d'Alembert pour les suites

Théorème 3.58. *(Critère de d'Alembert pour les suites)*
Soit (a_n) *une suite telle que la limite suivante existe :*

$$\rho := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,.$$

- ⋆ *Si* $0 \leqslant \rho < 1$, *alors* (a_n) *converge et* $a_n \to 0$.
- ⋆ *Si* $\rho > 1$, *alors* (a_n) *diverge, et si en plus* $a_n \geqslant 0$ *pour tout* n *suffisamment grand, alors* $a_n \to +\infty$.

Preuve: Supposons pour commencer que $0 \leqslant \rho < 1$. On peut donc choisir un $\delta > 0$ tel que $\rho < 1 - \delta$,



et trouver un entier N tel que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant 1 - \delta \qquad \forall n \geqslant N\,,$$

c'est-à-dire

$$|a_{n+1}| \leqslant (1 - \delta)|a_n| \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

En utilisant cette inégalité pour N,

$$|a_{N+1}| \leqslant (1 - \delta)|a_N|\,,$$

en l'utilisant pour $N + 1$,

$$|a_{N+2}| \leqslant (1 - \delta)|a_{N+1}| \leqslant (1 - \delta)^2|a_N|\,,$$

et ainsi de suite, en l'utilisant pour $N + k$,

$$|a_{N+k}| \leqslant (1 - \delta)|a_{N+(k-1)}| \leqslant \cdots \leqslant (1 - \delta)^k|a_N|\,,$$

ce qui implique, puisque $(1 - \delta)^k \to 0$ lorsque $k \to \infty$, que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{k\to\infty} |a_{N+k}| = 0\,.$$

Ceci implique $a_n \to 0$.

Supposons maintenant que $\rho > 1$, et fixons un $\delta > 0$ tel que $\rho > 1 + \delta$. On a alors l'existence d'un entier N tel que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1 + \delta \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

En utilisant cette inégalité pour N,

$$|a_{N+1}| \geqslant (1+\delta)|a_N|\,,$$

en l'utilisant pour $N+1$,

$$|a_{N+2}| \geqslant (1+\delta)|a_{N+1}| \geqslant (1+\delta)^2|a_N|\,,$$

et ainsi de suite, en l'utilisant pour $N+k$,

$$|a_{N+k}| \geqslant (1+\delta)|a_{N+(k-1)}| \geqslant \cdots \geqslant (1+\delta)^k|a_N|\,,$$

ce qui implique, puisque $(1+\delta)^k \to +\infty$ lorsque $k \to \infty$, que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{k\to\infty} |a_{N+k}| = +\infty\,.$$

Ainsi, (a_n) n'a pas de limite, et si $a_n \geqslant 0$ pour tout n suffisamment grand, alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty\,.$$

□

Informel 3.59. Ce critère est utile, mais surtout pour déduire le comportement des suites telles que $|a_n|$ tend soit très vite vers *l'infini*, soit très vite vers *zéro*. Car si une suite a_n tend vers une limite L qui est différente de zéro, $L \neq 0$, alors $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \to 1$, un cas qui n'est pas traité par le critère. (Voir exemples plus bas.)

Exemple 3.60. Considérons la suite

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}\,.$$

On a montré précédemment que cette suite tendait vers zéro, en montrant que le comportement exponentiel l'emporte sur le polynomial. Voyons comment le critère de d'Alembert permet d'obtenir le même résultat. Calculons

$$\begin{aligned}\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n}\right| \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2} < 1\,.\end{aligned}$$

Par le critère, ceci implique que $a_n \to 0$. ◇

Le critère est souvent utile dans l'étude du comportement de quotients présentant une indétermination du type "$\frac{\infty}{\infty}$", et où on ne voit pas clairement comment extraire un terme dominant.

Exemple 3.61. Considérons

$$x_n = \frac{n!}{n^n}\,,$$

également considérée précédemment. Écrivons le quotient

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\,.$$

Ainsi,

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2.718\ldots} < 1\,.$$

On conclut que $x_n \to 0$. ◇

Il est important de souligner que le critère de d'Alembert ne dit rien dans le cas où $\rho = 1$. Or beaucoup de suites très simples, dont le comportement est bien connu, sont des suites pour lesquelles $\rho = 1$. Voyons trois exemples.

Exemple 3.62. Pour la suite $a_n = \frac{1}{n}$, on a

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1\,,$$

donc le critère ne permet pas de conclure. (Pourtant, on sait bien que $a_n \to 0$!) ◇

Exemple 3.63. Pour la suite $a_n = n$, on a aussi $\rho = 1$, donc le critère ne permet pas de conclure. (Pourtant, on sait bien que $a_n \to \infty$!) ◇

Exemple 3.64. Pour la suite $a_n = (-1)^n$, on a aussi $\rho = 1$, donc le critère ne permet pas de conclure. (Pourtant, on sait bien que a_n n'a pas de limite !) ◇

Quiz 3.10.1. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si une suite* (a_n) *est convergente, alors* $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$.
2) □ *Si une suite* (a_n) *est divergente, alors* $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ *n'a pas de limite.*
3) □ *Si* $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$*, alors* a_n *tend vers zéro exponentiellement vite.*
4) □ *Si* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ *pour tout* n*, alors* $a_n \to 0$.
5) □ *Si* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ *n'a pas de limite lorsque* $n \to \infty$*, alors* a_n *ne peut pas converger.*
6) □ *Si* $a_n \to 0$*, alors* $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$.

3.11 Limite supérieure, limite inférieure

On sait qu'une suite convergente est bornée, mais le contraire n'est pas vrai : une suite peut être bornée sans converger (par exemple : $(-1)^n$).

On va voir ici que l'on peut malgré tout associer à toute suite bornée deux nombres, appelés *limite supérieure* et *limite inférieure*, qui donnent des informations utiles sur le comportement de la suite à l'infini. On verra aussi que ces deux nombres sont utiles pour étudier la convergence de la suite, puisqu'ils sont égaux si et seulement si la suite converge.

(ici, Video: `v_suites_limsup.mp4`)

Soit (a_n) une suite bornée. On définit deux nouvelles suites, (M_n) et (m_n) en posant, pour tout n,

$$\begin{aligned} M_n &:= \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\,, \\ m_n &:= \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\,. \end{aligned}$$

Ces deux suites de réels sont bien définies puisque l'on suppose (a_n) bornée. De plus,

- ⋆ Comme M_n majore $\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, on a en particulier que $a_n \leqslant M_n$.
- ⋆ Comme m_n minore $\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, on a en particulier que $a_n \geqslant m_n$.

On peut donc écrire

$$m_n \leqslant a_n \leqslant M_n \qquad \forall n\,. \tag{3.1}$$

Lemme 11. *Les suites* (M_n) *et* (m_n) *sont monotones et bornées. Plus précisément,*

- ⋆ (M_n) *est décroissante et minorée.*
- ⋆ (m_n) *est croissante et majorée.*

En particulier, ces deux suites sont convergentes.

Preuve: Définissons $A_n := \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$. Puisque $A_{n+1} \subset A_n$, on a d'une part que $\sup A_{n+1} \leqslant \sup A_n$, ce qui donne

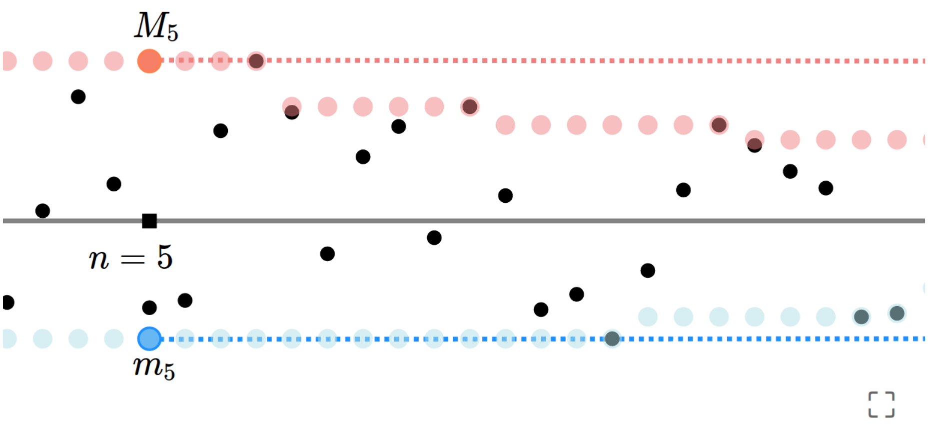
$$M_{n+1} \leqslant M_n,$$

et d'autre part que $\inf A_{n+1} \geqslant \inf A_n$, ce qui donne

$$m_{n+1} \geqslant m_n\,.$$

Comme (a_n) est bornée, (M_n) est minorée, et (m_n) est majorée. On a donc existence des limites $\lim_{n\to\infty} M_n$ et $\lim_{n\to\infty} m_n$. □

On observe ces propriétés sur l'animation ci-dessous. La suite (a_n) est représentée par les points noirs, (M_n) par les points rouges, et (m_n) par les points bleus :



Maintenant que l'on sait que ces suites sont convergentes, il est naturel de donner des noms à leurs limites :

Définition 3.65. Soit (a_n) une suite bornée, (M_n) et (m_n) définies comme ci-dessus.

1) La **limite supérieure de** (a_n) est définie par

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} M_n\,.$$

2) La **limite inférieure de** (a_n) est définie par

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} m_n\,.$$

Remarque 3.66.
- ⋆ Une suite bornée peut ne pas converger, mais ses limites supérieures et inférieures existent toujours.
- ⋆ Puisque $m_n \leqslant M_n$ pour tout n, on a que

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n\,.$$

◇

Exemple 3.67. Considérons la suite $a_n = (-1)^n$, qui comme on le sait est bornée mais ne possède pas de limite. Quel que soit la valeur de n, l'ensemble $\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ contient une infinité de $+1$, et une infinité de -1, ce qui implique $M_n = +1$ et $m_n = -1$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} M_n = +1\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} m_n = -1\,,$$

qui signifie

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +1\,,$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1\,.$$

◇

Exemple 3.68. Considérons $a_n = \frac{1}{n}$. Puisque (a_n) est décroissante,

$$\begin{aligned} M_n &= \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \\ &= \sup\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right\} \\ &= \frac{1}{n} \to 0\,. \end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned} m_n &= \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \\ &= \inf\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right\} = 0 \end{aligned}$$

On a donc

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Remarquons que dans ce cas, on sait aussi que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ◇

On a vu dans ce dernier exemple un cas d'une suite convergente pour laquelle les limites supérieures et inférieures avaient une valeur commune. C'est en fait un critère :

Théorème 3.69. *Soit (a_n) une suite bornée. Alors (a_n) converge si et seulement si ses limites inférieures et supérieures sont égales. Plus précisément :*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L\,.$$

Bien-sûr ce résultat est aussi utile si on veut montrer qu'une suite bornée ne converge pas : il suffit de voir que ses limites supérieures et inférieures sont différentes.
Preuve: (Voir aussi la vidéo)
$\Rightarrow$: Si $a_n \to L$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $|a_n - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Ceci implique que

$$L - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant L + \varepsilon\,, \quad \forall n \geqslant N\,,$$

et donc en particulier que pour tout $n \geqslant N$,

$$M_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \leqslant L + \varepsilon\,,$$

et

$$m_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \geqslant L - \varepsilon\,.$$

Par conséquent,

$$L - \varepsilon \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant L + \varepsilon\,.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L\,.$$

$\Leftarrow$: Supposons que $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L$. Si on fixe $\varepsilon > 0$, alors on a d'une part qu'il existe un N_+ tel que

$$\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \leqslant L + \varepsilon\,, \qquad \forall n \geqslant N_+$$

et d'autre part qu'il existe un N_- tel que

$$\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \geqslant L - \varepsilon\,, \qquad \forall n \geqslant N_-$$

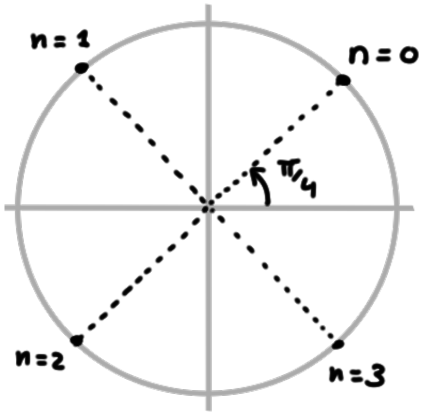
Ceci implique, en particulier, que

$$L - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant L + \varepsilon\,, \qquad \forall n \geqslant N\,,$$

où on a posé $N = \max\{N_-, N_+\}$. Ceci montre que $a_n \to L$. □

Exemple 3.70. Considérons la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$a_n = \sin(\tfrac{\pi}{4} + n\tfrac{\pi}{2})\,.$$



Ses premiers termes $n = 0, 1, 2, 3$ sont

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

Par la périodicité du sinus, le reste de la suite s'obtient en répétant cette séquence. On a en particulier que pour tout n,

$$M_n = +\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \qquad m_n = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

On a donc

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Par le théorème précédent, on en conclut que (a_n) est divergente. ◇

Quiz 3.11.1. *Soit (a_n) une suite bornée dont la limite supérieure vaut L. Vrai ou faux ?*

1) □ $a_n \to L$.
2) □ $a_n \leqslant L$ *pour tout* $n \geqslant 1$.
3) □ *Si* $a_n = C$ *pour tout* n *suffisamment grand, alors* $L = C$.
4) □ (a_n) *est croissante.*
5) □ L *est la plus grande valeur de la suite* $\{a_1, a_2, \dots\}$.
6) □ $\sup\{a_1, a_2, \dots\} = L$.
7) □ *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une infinité d'indices* n *pour lesquels* $a_n \geqslant L - \varepsilon$.
8) □ *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* N *tel que* $a_n \leqslant L + \varepsilon$ *pour tout* $n \geqslant N$.

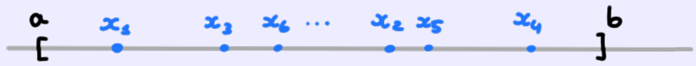
Quiz 3.11.2. *Vrai ou faux ?*

1) ☐ $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \big(\limsup_{n\to\infty} a_n\big) + \big(\limsup_{n\to\infty} b_n\big)$

2) ☐ $\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \big(\limsup_{n\to\infty} a_n\big)\big(\limsup_{n\to\infty} b_n\big)$

3.12 Le Théorème de Bolzano-Weierstrass

Informel 3.71. Supposons qu'à l'aide d'un stylo bleu, on place une infinité de points, un à un, dans un intervalle $[a, b]$:



Le *Théorème de Bolzano-Weierstrass* affirme que peu importe comment on choisit ces points, il existe forcément un point de l'intervalle proche duquel vont s'accumuler une infinité de points bleus.

(ici, Video: v_suites_Bolzano_Weierstrass.mp4)

Pour énoncer le théorème rigoureusement, il nous faut un peu de terminologie :

Définition 3.72. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite, et $0 \leqslant n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ une suite d'entiers, strictement croissante. Si on pose

$$b_k := x_{n_k}\,,$$

la suite $(b_k)_{k\geqslant 0} = (x_{n_k})_{k\geqslant 0}$ est appelée **sous-suite** de $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

Une sous-suite s'obtient donc à partir de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en ne gardant que certains termes, et en ignorant tous ceux dont l'indice est entre deux entiers consécutifs de la suite $(n_k)_{k\geqslant 0}$:

En choisissant les entiers n_k et en considérant $(x_{n_k})_k$, on dit qu'on a **extrait une sous-suite** de $(x_n)_n$.

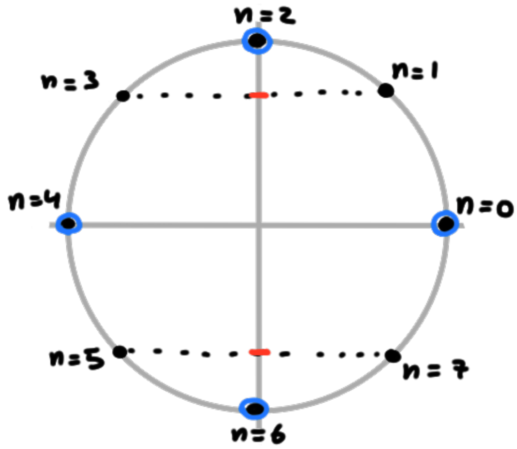
Exemple 3.73. Considérons la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$x_n = \sin(n\tfrac{\pi}{4})\,.$$

On comprend cette suite en plaçant l'angle $n\frac{\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique et en regardant son sinus évoluer sur l'axe Oy. Ses premiers termes, en partant de $n = 0$, sont

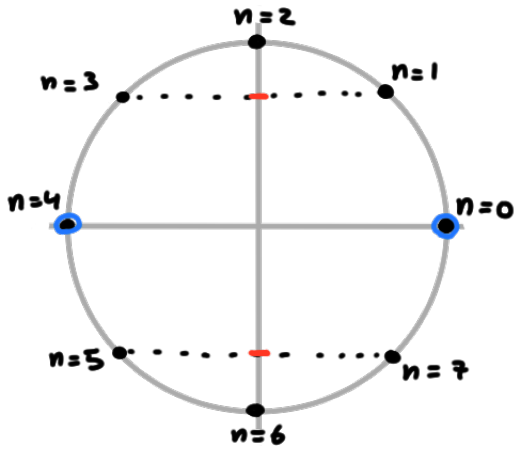
$$0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\,.$$

⋆ Si on considère les indices pairs, à savoir $n_k = 2k$,



alors $(x_{n_k})_{k\geqslant 0}$ est la suite $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$

⋆ Si on considère les entiers multiples de 4, $n_k = 4k$,



alors $(x_{n_k})_{k\geqslant 0}$ est une suite constante puisque $x_{n_k} = x_{4k} = \sin(k\pi) = 0$ pour tout k.

Ces deux exemples ont proposé des sous-suites le long desquelles on observait une certaine régularité, mais on peut considérer des sous-suites arbitraires, par exemple celle obtenue en prenant $n_k = k^2 + [\sqrt{k}]$, pour lesquelles on n'observe en général aucune régularité particulière. ◇

Théorème 3.74. *(Théorème de Bolzano-Weierstrass) De toute suite bornée $(x_n)_n$ on peut extraire une sous-suite convergente. Plus précisément : Si $x_n \in [a,b]$ pour tout n, alors il existe $L \in [a,b]$ et une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $x_{n_k} \to L$.*

Preuve: Soit $L := \limsup_{n\to\infty} x_n$, c'est-à-dire

$$L = \lim_{n\to\infty} M_n \,,$$

où $M_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Considérons une suite $(\varepsilon_j)_{j\geqslant 1}$ positive, tendant vers zéro. (Pour fixer les idées, on peut choisir $\varepsilon_j := \frac{1}{j}$.)

⋆ $\underline{j = 1}$: Par définition de la limite, il existe n_1' tel que

$$L - \tfrac{\varepsilon_1}{2} \leqslant M_{n_1'} \leqslant L + \tfrac{\varepsilon_1}{2} \,.$$

Par définition du supremum, il existe $n_1 \geqslant n_1'$ tel que

$$L - \varepsilon_1 \leqslant x_{n_1} \leqslant L + \varepsilon_1 \,.$$

- ⋆ $j = 2$: Par définition de la limite, il existe $n'_2 > n_1$ tel que
$$L - \tfrac{\varepsilon_2}{2} \leqslant M_{n'_2} \leqslant L + \tfrac{\varepsilon_2}{2}\,.$$
Par définition du supremum, il existe $n_2 \geqslant n'_2$ tel que
$$L - \varepsilon_2 \leqslant x_{n_2} \leqslant L + \varepsilon_2\,.$$
- ⋆ etc.

Ainsi, on a construit une suite (n_k) strictement croissante telle que pour tout k,
$$L - \varepsilon_k \leqslant x_{n_k} \leqslant L + \varepsilon_k\,.$$
Ceci signifie bien que $x_{n_k} \to L$. □

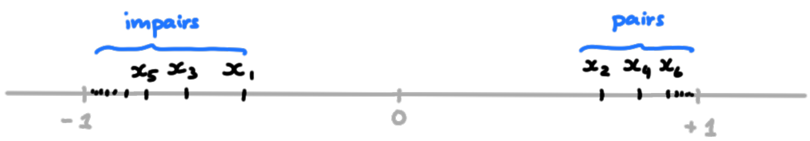
Exemple 3.75. Considérons la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par
$$x_n = \cos(e^{3n} + e^{n^2}\sin(5n^3))\,.$$
Puisque $x_n \in [-1,1]$ pour tout n, le théorème garantit l'existence d'un réel $L \in [-1,1]$ et d'une sous suite $(x_{n_k})_k$ telle que $x_{n_k} \to L$ lorsque $k \to \infty$. ◇

Voyons un exemple simple dans lequel la sous-suite peut être donnée explicitement.

Exemple 3.76. Considérons la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par
$$x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}\,,$$
qui est bornée puisque $|x_n| = \frac{n}{n+1} \leqslant 1$. Cette suite ne converge pas, mais le théorème garantit l'existence d'une sous-suite convergente. Ici, on peut extraire explicitement deux sous-suites convergentes, assez naturellement :

- ⋆ Si on ne regarde que les indices *pairs*, c'est-à-dire que l'on considère $n_k = 2k$, alors on obtient la sous-suite
$$x_{2k} = \frac{2k}{2k+1}\,,$$
qui converge vers 1 lorsque $k \to \infty$.
- ⋆ Si on ne regarde que les indices *impairs*, c'est-à-dire que l'on considère $n_k = 2k+1$, alors on obtient la sous-suite
$$x_{2k+1} = -\frac{2k+1}{2k+2}\,,$$
qui converge vers -1 lorsque $k \to \infty$.

Donc dans cet exemple, on peut extraire de la suite deux sous-suites différentes, qui ont des limites différentes :



◇

Pour finir, remarquons qu'en général, la conclusion du théorème n'est plus vraie si la suite n'est pas bornée :

Exemple 3.77. La suite $x_n = n$ n'est pas bornée, et elle ne possède aucune sous-suite convergente. ◇

Quiz 3.12.1. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si une suite est bornée, alors elle converge.*
2) □ *Si une suite n'est pas bornée, alors elle diverge.*
3) □ *Si toutes les sous-suites d'une suite sont bornées, alors cette suite est bornée.*
4) □ *Si une suite possède une sous-suite bornée, alors elle est bornée.*
5) □ *Si une suite est minorée, alors elle possède une sous-suite convergente.*
6) □ *Toute suite possède une sous-suite convergente.*
7) □ *Si une suite possède une sous-suite convergente, alors elle est bornée.*
8) □ *Si (a_n) est bornée, alors au moins une des suites $(a_{2k})_k$, $(a_{2k+1})_k$, est convergente.*
9) □ *Si une suite a_n est bornée, alors il existe un unique réel L et une unique sous-suite a_{n_k} telle que $a_{n_k} \to L$.*
10) □ ⚠ *Il existe une suite $a_n \in [0,1]$ possédant la propriété suivante : pour tout $L \in [0,1]$, il existe une sous-suite $(a_{n_k})_k$ telle que $a_{n_k} \to L$ lorsque $k \to \infty$.*

3.13 Suites de Cauchy

(ici, Video: v_suites_Cauchy.mp4)

Remarquons que si une suite (a_n) converge, alors *la distance entre deux de ses éléments consécutifs tend vers zéro* :

$$|a_{n+1} - a_n| \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty\,.$$

En effet, si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, on peut écrire

$$\begin{aligned}|a_{n+1} - a_n| &= |(a_{n+1} - L) - (a_n - L)| \\ &\leqslant \underbrace{|a_{n+1} - L|}_{\to 0 \text{ quand } n\to\infty} + \underbrace{|a_n - L|}_{\to 0 \text{ quand } n\to\infty}\,.\end{aligned}$$

Mais on peut en fait en dire un peu plus : *la distance entre deux de ses éléments quelconques tend vers zéro à mesure que leurs indices grandissent*.

$$|a_m - a_n| \to 0 \quad \text{lorsque } m, n \to \infty\,.$$

En effet, on peut toujours écrire

$$\begin{aligned}|a_m - a_n| &= |(a_m - L) + (L - a_n)| \\ &\leqslant \underbrace{|a_m - L|}_{\to 0 \text{ quand } m\to\infty} + \underbrace{|a_n - L|}_{\to 0 \text{ quand } n\to\infty}\,.\end{aligned}$$

Cette propriété porte un nom :

Définition 3.78. (a_n) est une **suite de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que

$$|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon \quad \forall m, n \geqslant N\,.$$

On a donc démontré, ci-dessus, que *toute suite convergente est une suite de Cauchy*, qui est la première moitié du théorème fondamental suivant :

Théorème 3.79. *Dans $\mathbb{R}$, une suite (a_n) est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Preuve: Soit (a_n) une suite convergente : $a_n \to L$. Fixons $\varepsilon > 0$, et considérons un entier N tel que $|a_n - L| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant N$. Si on considère deux entiers $m, n \geqslant N$, on peut utiliser l'inégalité triangulaire et écrire

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |(a_m - L) + (L - a_n)| \\ &\leqslant |a_m - L| + |a_n - L| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Et donc (a_n) est une suite de Cauchy.

Pour montrer que toute suite de Cauchy est également convergente, voir la vidéo ci-dessus. □

Exemple 3.80. Considérons

$$a_n := 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

Montrons que cette suite possède une limite, en montrant que c'est une suite de Cauchy. Pour ce faire, étudions la différence $|a_n - a_m|$. En prenant $n > m \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \\ &= \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \\ &\leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= \sum_{j=m}^{n-1} \frac{1}{2^j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - (\frac{1}{2})^m}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= (\tfrac{1}{2})^{m-1} - (\tfrac{1}{2})^{n-1} \\ &\leqslant (\tfrac{1}{2})^{m-1}\,. \end{aligned}$$

On a utilisé $k! \geqslant 2^{k-1}$ (pour tout $k \geqslant 2$), fait le changement d'indice $j = k - 1$, et utilisé la formule pour une somme géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$.

Donc si on fixe $\varepsilon > 0$, puisqu'il existe N tel que $\frac{1}{2^{m-1}} \leqslant \varepsilon$ pour tout $m \geqslant N$, on peut conclure que si $n \geqslant m \geqslant N$, alors

$$|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon\,.$$

Ceci montre que (a_n) est une suite de Cauchy. Par le théorème, la limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe. ◇

Le fait que dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy et convergente est une des propriétés centrales des réels ; ici, c'est une conséquence (pas directe, certes) de l'Axiome qui garantit que dans $\mathbb{R}$ tout ensemble non-vide majoré possède un supremum. Et en fait, on peut même montrer que la convergence des suites de Cauchy est *équivalente* à l'existence du supremum.

Il est important de souligner que cette équivalence n'a pas lieu dans les rationnels. En effet, on peut introduire la même notion de suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, et montrer que toute suite convergente

$a_n \in \mathbb{Q}$ est une suite de Cauchy. Par contre, il existe des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ *qui ne convergent pas* dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, la suite

$$a_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

est une suite de rationnels (puisque a_n est une somme finie de rationnels), et on peut montrer comme ci-dessus que c'est une suite de Cauchy, et donc qu'elle converge.

Par contre, on peut montrer que la limite de a_n est $e = 2.718\ldots$, qui est irrationnel (voir par exemple **ici (Michael Penn)** (lien web), ou **là** (lien web)). Donc (a_n) est une suite de Cauchy (de rationnels), qui converge dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$.

On dit que $\mathbb{R}$ est un **corps complet** (car toute suite de Cauchy converge), alors que $\mathbb{Q}$ est aussi un corps, mais qui n'est pas complet.

Quiz 3.13.1. *Si (a_n) est une suite de Cauchy, alors*

1) ☐ $a_m \leqslant a_n$ *pour tout* $m \geqslant n$
2) ☐ (a_n) *est bornée.*
3) ☐ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $a_{n+k} - a_n \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$
4) ☐ $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ *et* $\lim_{m\to\infty} |a_m| = 0$.
5) ☐ $a_{2^{2^k}} - a_{2^k} \to 0$ *lorsque* $k \to \infty$.
6) ☐ *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* N *tel que* $|a_n - a_m| < \varepsilon$ *pour tout* $n, m \geqslant N$.

Quiz 3.13.2. *Pour que (a_n) soit une suite de Cauchy, il suffit*

1) ☐ *qu'il existe un entier* k *suffisamment grand tel que* $a_{n+k} - a_n \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$.
2) ☐ *que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* N *tel que* $|a_n - a_m| < \varepsilon/5$ *pour tout* $n, m > N$.
3) ☐ *qu'il existe deux entiers* m, n *tels que pour tout* $\varepsilon > 0$, *on ait* $|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon$.
4) ☐ *que* a_n *soit convergente.*
5) ☐ *qu'il existe pour tout* n *un entier* $m(n)$ *tel que* $|a_n - a_{m(n)}| \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$.

Chapitre 4

Suites définies par récurrence

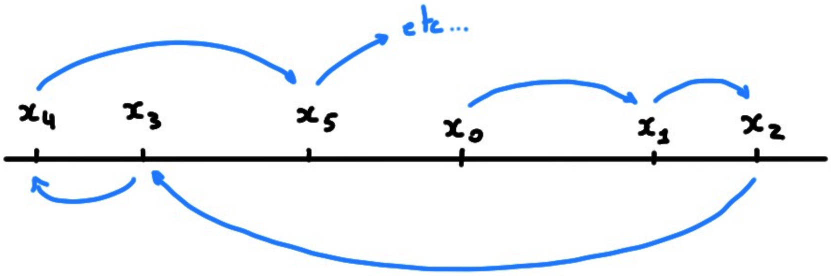
4.1 Définition, exemples

Une suite est définie **par récurrence** lorsque chacun de ses termes est défini en fonction du précédent. Plus précisément :

Définition 4.1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, et x un réel. On définit alors la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par :

- ⋆ son premier terme (appelé aussi **condition initiale**) : $x_0 := x$,
- ⋆ puis, par récurrence pour $n \geqslant 0$,
$$x_{n+1} := g(x_n)\,.$$

On peut voir une telle suite comme un **système dynamique**, où x_n est la position d'une particule sur la droite au temps n ; à chaque instant la particule détermine sa prochaine position en fonction de l'actuelle. La suite $x_0, x_1, x_2, \ldots$ est alors la **trajectoire** de la particule.



À l'inverse de la plupart des exemples de suites rencontrés jusqu'ici, pour lesquels le n-ème terme de la suite était défini explicitement comme fonction de l'entier n (comme "$x_n = \frac{n}{n+1}$"), l'étude des suites définies par récurrence est en général bien plus difficile (on ne peut pas facilement extraire des "termes dominants", etc.).

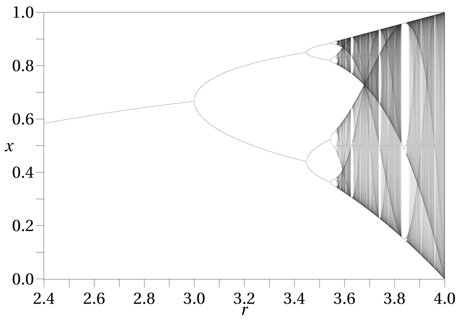
À titre de curiosité, mentionnons deux exemples célèbres.

Exemple 4.2. Un exemple fameux est celui de la **suite logistique** (lien web), associée à la fonction $g(x) = rx(1-x)$, où $r > 0$ est un paramètre fixé :

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$$

Ici, x_n modélise la taille d'une population à sa n-ème génération.

Le comportement de cette suite, dans la limite $n \to \infty$, dépend fortement de la valeur du paramètre r. Pour des petites valeurs de r, on peut montrer (voir exercices) que $x_n \to 0$, quelle que soit la condition initiale $x_0 \in [0,1]$. Par contre, pour des grandes valeurs de r, le comportement de x_n devient plus compliqué. Pour des valeurs $r > 3.8$, le comportement de la suite devient *chaotique*. (Voir l'animation à la fin du chapitre.)



Source : **Wikipedia : Logistic map** (lien web) ◇

Exemple 4.3. Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$g(x) := \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si x est pair,} \\ 3x+1 & \text{si x impair.} \end{cases}$$

En choisissant une condition initiale $x_0 \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres entiers, et est construite en commençant avec x_0, puis en définissant

$$x_{n+1} := g(x_n)\,.$$

La compréhension du comportement de cette suite dans la limite $n \to \infty$ est un des grands problèmes ouverts "fameux" des mathématiques.

On remarque, en essayant plusieurs conditions initiales, que la suite termine sur la boucle "$4, 2, 1$". Par exemple, en prenant $x_0 = 3$, la suite est

$$3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$$

En prenant $x_0 = 12$,

$$12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$$

La **Conjecture de Collatz** affirme que la suite termine toujours par la boucle "$4, 2, 1$", quelle que soit la condition initiale. Voir **Veritasium : The simplest math problem no one can solve** (lien web) ◇

4.1.1 Contenu de ce chapitre

Il n'existe pas de "théorie générale" permettant de comprendre le comportement asymptotique de toutes les suites définies par récurrence, donc nous nous contenterons de considérer quelques exemples, et de présenter quelques techniques qui permettent de les étudier.

4.2 Étude d'un cas simple

Commençons par un exemple simple de suite définie par récurrence,

$$x_{n+1} = g(x_n)\,,$$

avec la fonction affine

$$g(x) = 1 + \frac{x}{2}\,.$$

Ce cas a l'avantage de pouvoir être étudié par plusieurs méthodes ; on apprendra donc quelques "trucs" qui seront utiles pour la suite.

Nous étudions donc la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, avec une condition initiale x_0, et

$$x_{n+1} = 1 + \tfrac{1}{2}x_n\,.$$

Voyons trois méthodes très différentes, qui mènent toutes à la même conclusion sur le comportement de cette suite dans la limite $n \to \infty$.

4.2.1 Méthode 1 : Observer, puis travailler

On regarde si les premiers termes suggèrent un certain comportement, puis on essaie de montrer rigoureusement que la suite suit effectivement ce comportement pour tout n.

Par exemple, commençons avec $x_0 = 5$, et regardons quelques termes :

$$x_0 = 5,\, x_1 = 3.5\,,\, x_2 = 2.75\,,\, x_3 = 2.375\,,\, x_4 = 2.1875\,,\dots$$

Ces premiers termes semblent indiquer que la suite décroît.

Pour commencer, essayons donc de montrer que cette suite est monotone. Pour ce faire, considérons la différence $x_{n+1}-x_n$, en écrivant explicitement deux termes consécutifs, chacun en fonction du précédent :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + \tfrac{1}{2}x_n \\ x_n &= 1 + \tfrac{1}{2}x_{n-1} \end{aligned}$$

En soustrayant, on obtient

$$x_{n+1} - x_n = \tfrac{1}{2}(x_n - x_{n-1})\,,$$

et comme cette dernière vaut pour tout n, on peut l'itérer :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \tfrac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) \\ &= \tfrac{1}{2^2}(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= \tfrac{1}{2^n}(x_1 - x_0) \\ &= \tfrac{1}{2^n}\big((1 + \tfrac{x_0}{2}) - x_0\big) = \tfrac{1}{2^n}(1 - \tfrac{x_0}{2}) \end{aligned}$$

Cette suite d'égalités montre en particulier que pour tout n, le signe de $x_{n+1} - x_n$ est le même que celui de $1 - \frac{x_0}{2}$:

$$x_{n+1} - x_n = \tfrac{1}{2^n}(1 - \tfrac{x_0}{2}) \begin{cases} < 0 & \text{si } x_0 > 2 \\ = 0 & \text{si } x_0 = 2 \\ > 0 & \text{si } x_0 < 2\,. \end{cases}$$

On peut donc conclure sur la monotonie de notre suite :

- ⋆ (x_n) est strictement décroissante si $x_0 > 2$,
- ⋆ (x_n) est constante égale à 2 si $x_0 = 2$,
- ⋆ (x_n) est strictement croissante si $x_0 < 2$,

Dans le cas où $x_0 = 2$, la suite reste constante $x_n = 2$, et donc

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2\,.$$

Dans le cas où $x_0 \neq 2$, la suite n'est pas constante mais elle est strictement monotone, donc on peut espérer montrer qu'elle converge en la majorant (dans le cas où elle croît) ou en la minorant (dans le cas où elle décroît).

- ⋆ Si $x_0 < 2$, on montre par récurrence que (x_n) reste majorée par $M = 2$. En effet, l'affirmation est vraie pour $n = 0$, et si on suppose que $x_n < 2$, alors

$$x_{n+1} = 1 + \underbrace{\frac{x_n}{2}}_{<1} < 1 + 1 = 2\,.$$

⋆ Si $x_0 > 2$, on montre par récurrence que (x_n) reste minorée par $m = 2$. En effet, l'affirmation est vraie pour $n = 0$, et si on suppose que $x_n > 2$, alors

$$x_{n+1} = 1 + \underbrace{\frac{x_n}{2}}_{>1} > 1 + 1 = 2\,.$$

On sait donc, dans les deux cas ($x_0 < 2$ et $x_0 > 2$), que la suite est convergente, puisque monotone et bornée. Donc on a garanti l'existence de la limite

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

Reste à savoir ce que vaut L...

Or si on reprend encore une fois la relation qui définit toute la suite,

$$x_{n+1} = 1 + \tfrac{1}{2}x_n\,,$$

maintenant que l'on sait que $x_n \to L$, on peut prendre la limite $n \to \infty$ des deux côtés :

$$\underbrace{x_{n+1}}_{\to L} = 1 + \tfrac{1}{2}\underbrace{x_n}_{\to L}\,.$$

Ainsi, L doit être solution de l'équation

$$L = 1 + \tfrac{1}{2}L\,.$$

En résolvant, on obtient $L = 2$. On a donc montré que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Remarque 4.4. Il est utile d'apprécier ce que nous venons de faire en prenant une calculatrice et en observant qu'effectivement, en commençant par n'importe quel $x_0 \in \mathbb{R}$, et en calculant $x_1 = 1+\frac{x_0}{2}$, $x_2 = 1+\frac{x_1}{2}$, etc., on observe la monotonie de la suite (en fonction du choix de x_0), et sa convergence vers 2. ◇

4.2.2 Méthode 2 : Chercher la dépendance en n

On essaie d'*exprimer chaque x_n explicitement en fonction de n*. Pour cela, il est bien d'écrire les quelques premiers termes, pour essayer de voir apparaître une certaine structure

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 + \tfrac{1}{2}x_0\\
x_2 &= 1 + \tfrac{1}{2}x_1 = 1 + \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2}x_0) = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 x_0\\
x_3 &= 1 + \tfrac{1}{2}x_2 = 1 + \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2}x_1) = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 x_0\,.
\end{aligned}$$

On peut donc conjecturer que pour tout n,

$$x_n = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^{n-1} + (\tfrac{1}{2})^n x_0\,.$$

On a vérifié que cette expression est vraie pour $n = 1, 2, 3$. Maintenant, si elle est vraie pour n, alors

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= 1 + \tfrac{1}{2}x_n\\
&= 1 + \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^{n-1} + (\tfrac{1}{2})^n x_0)\\
&= 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^n + (\tfrac{1}{2})^{n+1} x_0\,,
\end{aligned}$$

et donc elle est vraie aussi pour $n+1$. Par récurrence, elle est vraie pour tout n.

Maintenant, on remarque dans l'expression générale de x_n une somme géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$:

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^{n-1} = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-(\tfrac{1}{2})^n)\,.$$

On a donc réussi à exprimer x_n explicitement en fonction de n :

$$x_n = 2(1-(\tfrac{1}{2})^n) + (\tfrac{1}{2})^n x_0\,,$$

ce qui permet de calculer la limite $n \to \infty$. En effet, $(\frac{1}{2})^n \to 0$ et $(\frac{1}{2})^n x_0 \to 0$, quelle que soit la valeur de x_0. Donc la limite ne dépend pas de la condition initiale, et vaut

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

4.2.3 Méthode 3 : Chercher une suite de Cauchy.

On essaie de montrer que la suite converge, en montrant que *c'est une suite de Cauchy*.

D'après le calcul fait dans la Méthode 1,

$$|x_{k+1} - x_k| = \tfrac{1}{2^k}|1 - \tfrac{x_0}{2}| \quad \forall k\,.$$

On peut alors étudier, pour $n > m$,

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \big|(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_{m+1} - x_m)\big| \\
&\leqslant \sum_{k=m}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| \\
&\leqslant |1 - \tfrac{x_0}{2}| \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\
&= |1 - \tfrac{x_0}{2}| \Big\{ \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-(\frac{1}{2})^m}{1-\frac{1}{2}} \Big\} \\
&= |1 - \tfrac{x_0}{2}| \Big\{ \frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} \Big\}\,,
\end{aligned}$$

qui tend vers zéro lorsque $n, m \to \infty$, quelle que soit la valeur de x_0. Ceci montre que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy, et donc qu'elle converge :

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

On obtient la valeur de L comme on l'a fait avant, en prenant la limite $n \to \infty$ des deux côtés de la relation $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2}$. On a donc montré que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

4.3 Remarques générales

L'étude de l'exemple de la section précédente a montré qu'une information utile peut être obtenue en prenant la limite $n \to \infty$ des deux côtés de la relation

$$x_{n+1} = g(x_n)\,.$$

Ceci mène à la définition suivante.

Définition 4.5. Un réel x_* est un **point fixe de** g si $g(x_*) = x_*$.

Exemple 4.6. $g(x) = 1 + \frac{x}{2}$ possède un unique point fixe $x_* = 2$. ◇

Exemple 4.7. $g(x) = 4x(1-x)$ possède deux points fixes, $x_*^1 = 0$ et $x_*^2 = \frac{3}{4}$. ◇

Exemple 4.8. $g(x) = e^x$ ne possède aucun point fixe. ◇

A priori, l'existence ou non d'un point fixe n'est pas *forcément* reliée au comportement de la suite dans la limite $n \to \infty$, mais la recherche de points fixes est un bon point de départ dans l'étude d'une suite définie par récurrence.

Par exemple, si on sait que g possède un point fixe x_*, et si on utilise ce point comme condition initiale

$$x_0 := x_* ,$$

alors la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ est constante :

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) = g(x_*) = x_* \\ x_2 &= g(x_1) = g(x_*) = x_* \\ x_3 &= g(x_2) = g(x_*) = x_* \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ce qui est plus intéressant est d'utiliser la connaissance de points fixes pour guider l'étude de la suite.

Pour commencer, si une condition de régularité est satisfaite par g, alors l'éventail de scénarios possibles pour le comportement de la suite est considérablement réduit :

Théorème 4.9. *Si une suite définie par récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$ est convergente, et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue , alors la limite de x_n est un point fixe de g.*

Preuve: Si $x_n \to L$, alors $x_{n+1} \to L$ et la continuité de g au point L implique $g(x_n) \to g(L)$. Donc en prenant la limite $n \to \infty$ des deux côtés de la relation

$$x_{n+1} = g(x_n) ,$$

on obtient

$$L = g(L) .$$

Donc L est un point fixe de g. □

Voyons un exemple où la recherche de points fixes est utile dans l'étude de la limite :

Exemple 4.10. Considérons la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, avec condition initiale $x_0 = 4$, et $g(x) = 2 - \frac{1}{x}$, c'est-à-dire

$$x_{n+1} = g(x_n) = 2 - \frac{1}{x_n} .$$

Cherchons les points fixes de g :

$$2 - \frac{1}{x_*} = x_* \quad \Leftrightarrow \quad (x_* - 1)^2 = 0 .$$

Donc $x_* = 1$ est l'unique point fixe de g, et c'est a priori un candidat pour la limite. Puisque notre condition initiale est $x_0 = 4 > 1$, on peut essayer de voir si la suite décroît. C'est effectivement ce qu'indiquent les premières valeurs :

$$\begin{aligned}
x_0 &= 4 \\
x_1 &= 2 - \frac{1}{x_0} = 2 - \frac{1}{4} = 1.75 \\
x_2 &= 2 - \frac{1}{x_1} = 2 - \frac{1}{1.75} = 1.428\dots \\
x_3 &= 2 - \frac{1}{x_2} = 2 - \frac{1}{1.428\dots} = 1.3 \\
x_4 &= 2 - \frac{1}{x_3} = 2 - \frac{1}{1.3\dots} = 1.230\dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

On a donc un scénario qui semble raisonnable : montrer rigoureusement que la suite converge, puis que sa limite vaut $x_* = 1$.

Montrons d'abord que la suite est minorée par 1. Pour la condition initiale, on a $x_0 = 4 > 1$. Ensuite, si on suppose que $x_n > 1$, alors

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} > 2 - \frac{1}{1} = 1\,.$$

Ceci montre en particulier que x_n est toujours bien définie.

Ensuite, en calculant

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= 2 - \frac{1}{x_n} - x_n \\
&= \frac{2x_n - 1 - x_n^2}{x_n} \\
&= \frac{-(x_n - 1)^2}{x_n} \leqslant 0\,,
\end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que $x_n > 1 > 0$) on voit que (x_n) est décroissante.

Étant minorée et décroissante, la suite converge :

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

Puisque toute la suite évolue sur le domaine $]0, +\infty[$, sur lequel g est continue, on en déduit par le théorème du dessus que L ne peut être qu'un point fixe de g ; comme il n'y en a qu'un, $x_* = 1$, on en déduit que $L = 1$. ◇

Informel 4.11. En fait, on a calculé la valeur d'une **fraction continue**

$$2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \cdots}}}} = 1$$

Une fonction continue g peut posséder plusieurs points fixes. Dans ce cas, si la suite converge le théorème ne dit pas vers quel point fixe elle converge. Dans un tel cas, une étude détaillée est nécessaire (voir les exercices).

Mais le théorème est utile dans le cas suivant : si g est continue et ne possède *pas* de point fixe, alors (x_n) n'a pas de limite. (En effet, si elle convergeait, alors sa limite serait un point fixe, une contradiction.)

Exemple 4.12. Considérons une suite (x_n) pour laquelle

$$x_{n+1} = x_n^2 + 3\,.$$

Ici, puisque $g(x) = x^2 + 3$ est continue et n'a pas de point fixe (car l'équation $g(x) = x$ n'a pas de solutions), on en déduit que x_n ne peut pas converger, quelle que soit la condition initiale choisie. ◇

Quiz 4.3.1. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 := 1$, $a_{n+1} = g(a_n)$. Quelles affirmations sont toujours vraies ?*

1) □ *$(a_n)_{n\geqslant 0}$ est toujours convergente, $a_n \to L$, et $L = g(L)$.*
2) □ *Si $a_n \to L$, alors $L = g(L)$.*
3) □ *Si $a_n \to L$ et si $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$, alors $L > 0$.*
4) □ *Si g est croissante, alors $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.*
5) □ *Si g est décroissante, alors $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.*
6) □ *Si g est monotone, alors $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone.*

4.4 Approche graphique

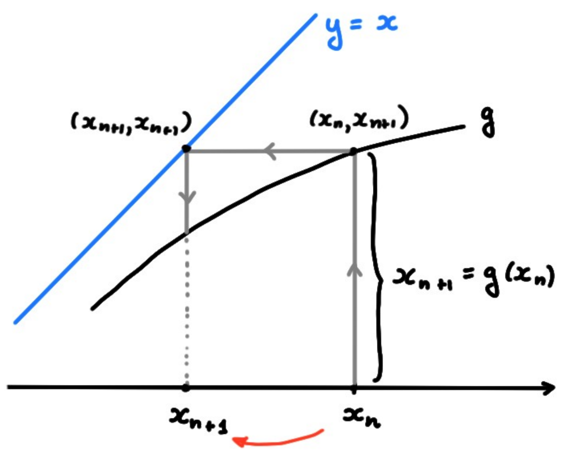
La difficulté, dans l'étude d'une suite $x_{n+1} = g(x_n)$, est parfois de savoir par où commencer. Montrer que la suite est majorée/minorée ? Si oui, avec quel majorant/minorant ? Montrer que la suite est croissante/décroissante ?

Nous allons voir maintenant que le *graphe* de g peut être une aide précieuse dans cette analyse, et peut donner des pistes.

Remarque 4.13. L'approche graphique que nous allons présenter est utile car elle suggère des façons de commencer à étudier la suite, mais elle ne fournit en aucun cas une étude rigoureuse. ◇

Supposons que le graphe de la fonction g est connu, et que la valeur de x_n a déjà été calculée. Montrons comment construire x_{n+1} **graphiquement** à partir de x_n et du graphe de g :

1) Commencer en $(x_n, 0)$
2) Monter verticalement sur le graphe de g, au point $(x_n, g(x_n)) = (x_n, x_{n+1})$
3) Glisser horizontalement jusque vers la diagonale $y = x$, au point (x_{n+1}, x_{n+1})
4) Redescendre sur $(x_{n+1}, 0)$

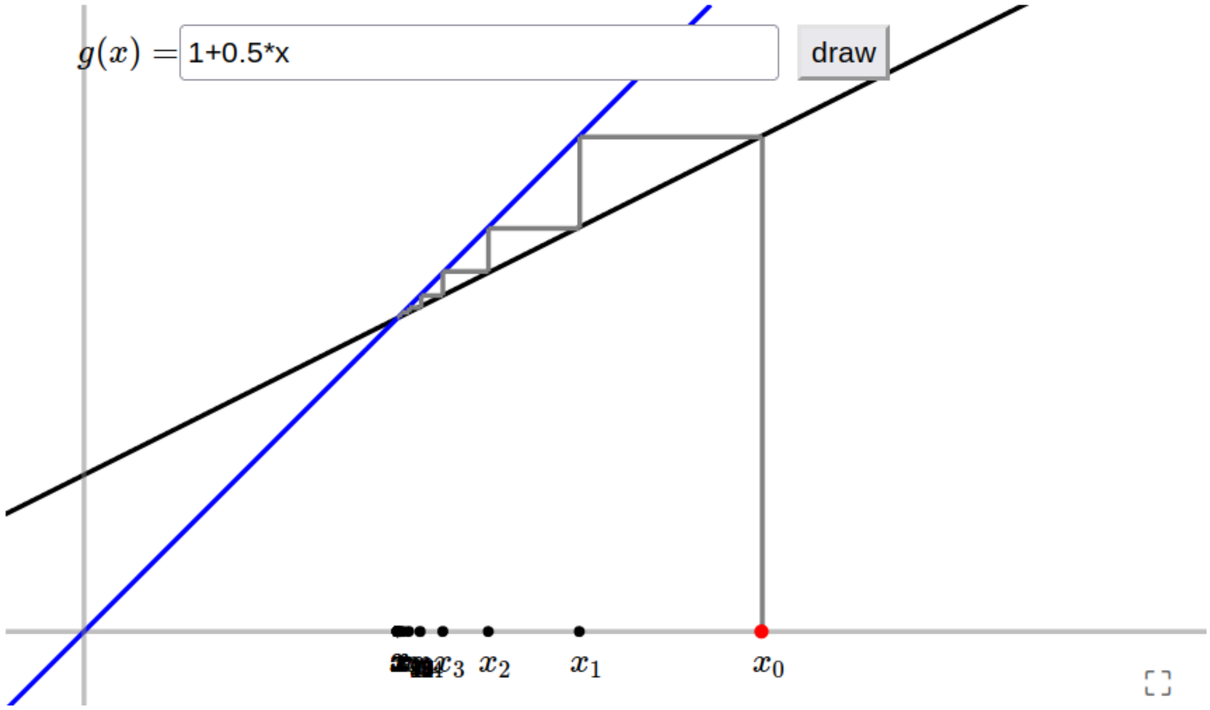


Bien-sûr, on peut sur le même dessin représenter x_{n+2} à partir de x_{n+1}, etc. Donc en partant de x_0, on a un moyen graphique de suivre la trajectoire $x_0, x_1, x_2, \ldots$

Exemple 4.14. Reprenons le premier exemple considéré dans ce chapitre, associée à

$$g(x) = 1 + \frac{x}{2}\,.$$

Sur l'animation ci-dessous, observer le comportement de la suite en fonction de la condition initiale x_0 :



On observe graphiquement tout ce que nous avions obtenu analytiquement. En particulier, on voit le point fixe $x_* = 2$, à l'intersection entre le graphe de g et la droite $y = x$. Puis, une fois la condition initiale x_0 choisie,

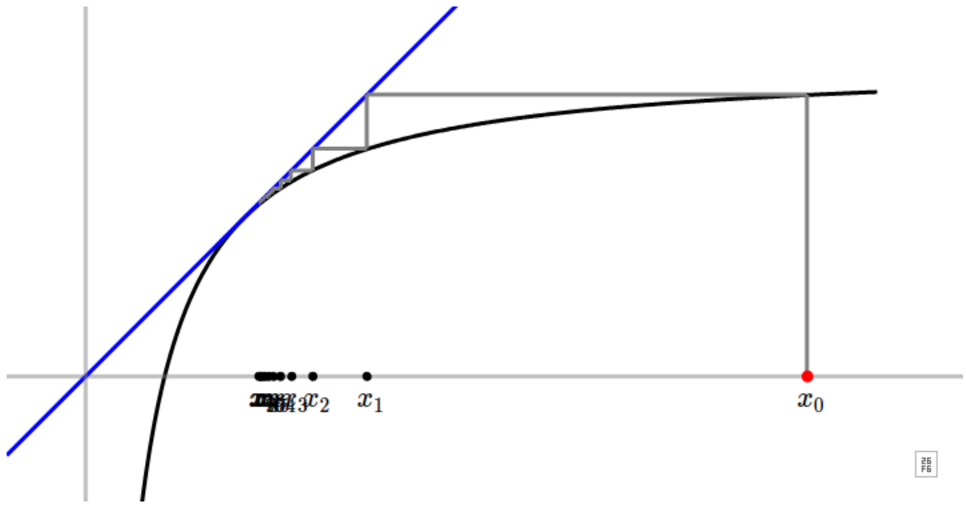
- ⋆ x_n est décroissante si $x_0 > 2$
- ⋆ x_n est croissante si $x_0 < 2$
- ⋆ dans les deux cas, x_n converge vers le point fixe

◇

Exemple 4.15. Considérons la suite traitée dans la section précédente, associée à

$$g(x) = 2 - \frac{1}{x}\,,$$

avec la condition initiale $x_0 = 4$:

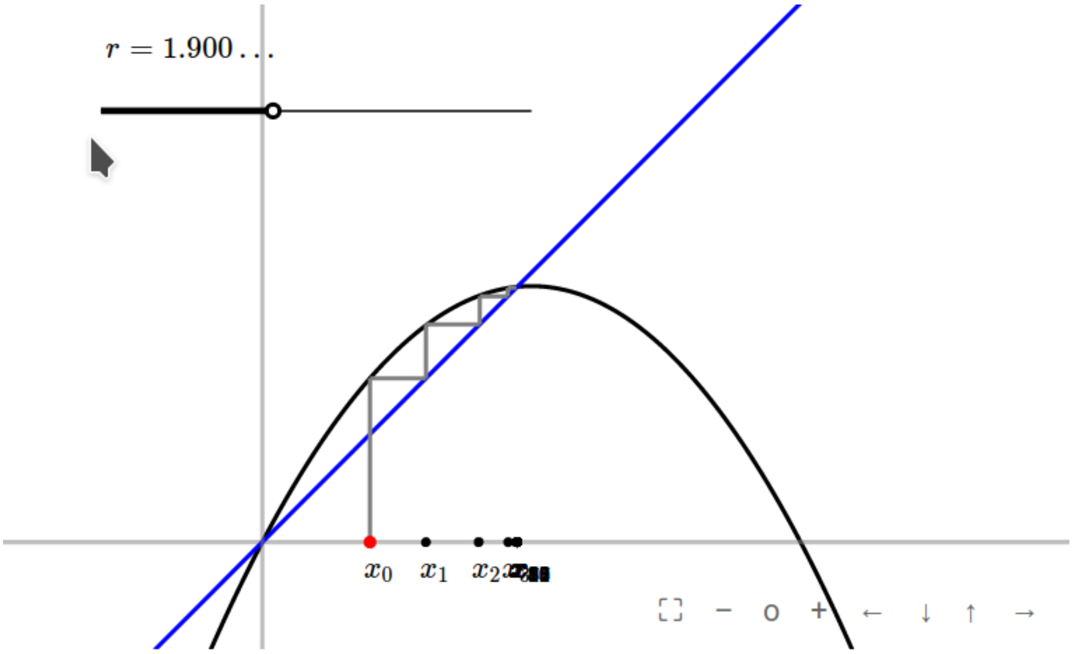


On remarque que le graphe de g est tangent à la diagonale au point fixe, et comme n'importe quelle condition initiale au-dessus du point fixe mène toujours à la même limite, qui est atteinte en décroissant, comme vu précédemment. D'autres conditions initiales mènent à la même limite, mais sans que la suite soit forcément monotone. ◇

Exemple 4.16. Considérons la suite logistique de l'introduction,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) .$$

L'animation ci-dessous montre les grandes différences dans le comportement asymptotique de la suite, en fonction de la valeur du paramètre $r > 0$. (Pour ne pas rendre le dessin incompréhensible, on n'a représenté que les 20 premiers termes de la suite.)



◇

Chapitre 5

Séries numériques

5.1 Définitions et exemples

(ici, Video: v_series_intro_definition.mp4)

Une *série*, en analyse, est une somme infinie.

Dans ce chapitre, nous étudierons les **séries numériques**, qui ne sont rien d'autre que des sommes infinies dans lesquelles on somme tous les termes d'une suite donnée $(a_n)_{n\geqslant 0}$, à partir du premier :

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Le symbole utilisé pour représenter un telle somme est

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \,, \text{ ou } \sum_{n\geqslant 0} a_n \,,$$

ou encore, puisque l'indice est *muet*,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \,, \text{ ou } \sum_{k\geqslant 0} a_k \,,$$

que l'on lit "la somme de tous les a_k, pour k allant de zéro à l'infini", et on dit que son **terme général** est a_k.

Nous aimerions donc définir rigoureusement ce que signifie "sommer une infinité de nombres". Pour ce faire, nous allons fixer une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$, et commencer par sommer un à un ses éléments, en commençant par le premier. Ceci mène à définir les sommes successives obtenues :

Définition 5.1. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. On définit la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi :

$$\begin{aligned} s_0 &:= a_0 \\ s_1 &:= a_0 + a_1 \\ s_2 &:= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\ \vdots \\ s_n &:= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

On appelle $(s_n)_{n\geqslant 0}$ **la suite des sommes partielles associée à** $(a_n)_{n\geqslant 0}$. s_n est **la n-ème somme partielle**.

On donne alors un sens à la somme infinie en prenant une limite :

Définition 5.2. Soit $(s_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des sommes partielles associée à $(a_n)_{n\geqslant 0}$. Si la limite

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n\,.$$

existe et est finie, on dit que la **série** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **converge**, et que **sa somme vaut** s. On écrit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\,.$$

Dans les autres cas, on dit que la série **diverge**.
Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, on écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty\,.$$

Exemple 5.3. Soit $a_n = n$ pour tout n. Alors

$$s_n = 1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\,,$$

ce qui implique que $s_n \to \infty$, donc la série diverge :

$$1+2+3+4+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty\,,$$

◇

Exemple 5.4. (Suite constante) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$a_n = c$$

pour tout $n \geqslant 0$, où c est une constante. Alors

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n \\ &= \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n+1 \text{ fois}} \\ &= c(n+1)\,. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} c(n+1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } c > 0\,, \\ 0 & \text{si } c = 0\,, \\ -\infty & \text{si } c < 0\,, \end{cases}$$

ce qui implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge si et seulement si $c = 0$, et dans ce cas

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n = 0\,.$$

Lorsque $c \neq 0$, la série diverge et

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } c > 0\,, \\ -\infty & \text{si } c < 0\,. \end{cases}$$

◇

Ce dernier exemple a montré, sans surprise, qu'une somme infinie de nombres strictement positifs, tous égaux, est infinie.

Or même si cela peut sembler contre-intuitif, il est possible de sommer une infinité de nombres non-nuls, et d'obtenir une somme totale finie ; nous avions déjà rencontré ce phénomène dans l'étude de la série géométrique ; celle-ci fournit notre premier exemple non-trivial de série convergente :

Exemple 5.5. La série de terme général $a_n = r^n$, où $r \in \mathbb{R}$ est fixé, n'est autre que la **série géométrique** de raison r :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

Par un résultat élémentaire sur les **sommes géométriques finies** (lien vers la section m_elementaire_sommes_produits), on sait calculer exactement n'importe quelle somme partielle. En particulier, si $r \neq 1$, alors

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} .$$

On peut ainsi conclure :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } |r| < 1, \\ \text{diverge} & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, dans le cas où $|r| < 1$, nous avons calculé exactement la valeur de sa somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} .$$

Par exemple,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 ,$$
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4} .$$

◇

Nous connaissons un autre cas de série convergente (de termes non-nuls), plus compliqué :

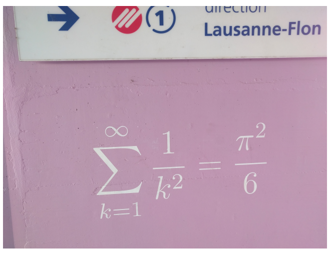
Exemple 5.6. Nous avons vu que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n^2}$,

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \qquad \text{converge} .$$

En effet, nous avions montré que la suite des sommes partielles,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} ,$$

est croissante et majorée.



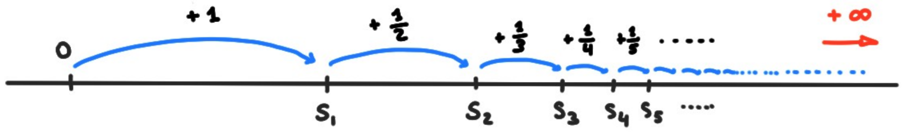
◇

5.1.1 Divergence de la série harmonique

Considérons maintenant un des exemples les plus importants de série divergente :

Théorème 5.7. *La **série harmonique**, de terme général $a_n = \frac{1}{n}$, est divergente :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = +\infty\,.$$



En d'autres termes, si l'on fait un pas de longueur 1, puis un pas de longueur $\frac{1}{2}$, puis un pas de longueur $\frac{1}{3}$, et ainsi de suite (toujours vers la droite), alors on part à l'infini.

Preuve: Remarquons que la suite des sommes partielles associée à la suite $a_n = \frac{1}{n}$ est strictement croissante : $s_{n+1} > s_n$. Pour montrer que $s_n \to \infty$, il suffit donc de trouver une sous-suite $(s_{n_k})_k$ telle que $s_{n_k} \to \infty$.

Considérons les indices qui sont des puissances de 2 :

$$s_2 = s_{2^1} = \underbrace{1 + \tfrac{1}{2}}_{\geqslant \frac{1}{2}} \geqslant \tfrac{1}{2}$$

$$s_4 = s_{2^2} = \underbrace{1 + \tfrac{1}{2}}_{\geqslant \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{\geqslant 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} \geqslant 2 \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$s_8 = s_{2^3} = \underbrace{1 + \tfrac{1}{2}}_{\geqslant \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{\geqslant 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}}_{\geqslant 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} \geqslant 3 \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$s_{16} = s_{2^4} = \underbrace{1 + \tfrac{1}{2}}_{\geqslant \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{\geqslant 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}}_{\geqslant 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}}_{\geqslant 8\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{2}} \geqslant 4 \cdot \tfrac{1}{2}$$

Plus généralement, on peut montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$s_{2^k} \geqslant \frac{k}{2}\,.$$

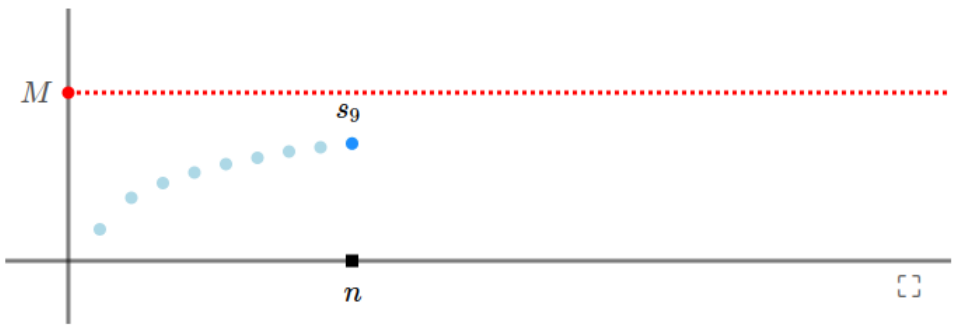
Comme $\frac{k}{2} \to \infty$ lorsque $k \to \infty$, par le "chien méchant", on conclut que $s_{2^k} \to \infty$.

Une autre preuve (très semblable) de la divergence de la série harmonique : **A stylish proof that... (Michael Penn)** (lien web) □

Nous venons de montrer que la suite partielle associée à la série harmonique,

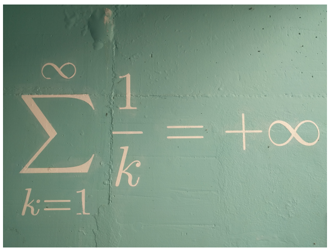
$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\,,$$

tend vers l'infini : Cela signifie que quel que soit le seuil $M > 0$ que l'on fixe, aussi grand soit-il, il existe toujours un indice N tel que $s_n \geqslant M$ pour tout $n \geqslant N$.



Informel 5.8. La suite s_n tend vers l'infini, mais **très** lentement... Pour donner une idée, si dans l'animation ci-dessus on fixait $M = 50$ (un point sur l'axe Oy, à environ 50 centimètres au-dessus de votre écran), il faudrait pousser le "n" à au moins $2.5 \cdot 10^{16}$ kilomètres pour que $s_n \geqslant 50$...

On pourra également lire les commentaires se trouvant **ici** (lien web).



.

5.1.2 Sur l'importance de la définition de convergence pour une série

Exemple 5.9. Considérons $a_n = (-1)^n$, $n \geqslant 0$. Les sommes partielles sont alors

$$\begin{aligned}
s_0 &= (-1)^0 = 1\\
s_1 &= (-1)^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0\\
s_2 &= (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 = 1 - 1 + 1 = 1\\
s_3 &= (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{si n est impair,}\\ 1 & \text{si n est pair.}\end{cases}$$

Donc s_n n'a pas de limite, ce qui signifie que la série

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots$$

est divergente. ◇

Informel 5.10. On serait peut-être tenté de calculer la somme infinie du dernier exemple,

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots$$

à l'aide d'opérations algébriques injustifiées.

Par exemple, on pourrait réorganiser les termes de la série par paquets de deux :

$$s = \underbrace{(1-1)}_{=0} + \underbrace{(1-1)}_{=0} + \cdots = 0\,.$$

Mais une autre façon de réarranger donnerait

$$s = 1 + \underbrace{(-1+1)}_{=0} + \underbrace{(-1+1)}_{=0} + \cdots = 1$$

Ou alors, en multipliant la somme par 2,

$$\begin{aligned} 2s = s + s &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots \\ &\quad + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1\,, \end{aligned}$$

et donc $s = \frac{1}{2}$... (Voir aussi **ici** (lien web) pour une autre façon de formuler la même absurdité.)

Les opérations formelles faites sur cet exemple sont toutes interdites, parce qu'on est en présence d'une série *divergente*. Ceci montre que l'on ne peut pas manipuler une série comme on manipule une somme contenant un nombre fini de termes, et souligne l'importance de la *définition* de convergence que nous avons adoptée pour une série (via les sommes partielles).

Quiz 5.1.1. *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série numérique, et $(s_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de ses sommes partielles. Vrai ou faux ?*

1) ☐ $(s_n)_{n\geqslant 0}$ *est monotone*
2) ☐ $(s_n)_{n\geqslant 0}$ *est bornée*
3) ☐ *Si* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *converge, alors* s_n *est monotone*
4) ☐ *Si* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *converge, alors* a_n *est monotone*
5) ☐ *Si* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *converge, alors* s_n *est bornée*
6) ☐ *Si* (s_n) *est bornée, alors* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *converge.*
7) ☐ *Si* $s_n \to \infty$*, alors* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *diverge.*
8) ☐ *Si* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *diverge, alors* $s_n \to \infty$*.*
9) ☐ *Si* $\lim_{k\to\infty} s_{2k}$ *et* $\lim_{k\to\infty} s_{2k+1}$ *existent, alors* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *converge.*

Quiz 5.1.2. *Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels, telle que $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$, et soit $(s_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de ses sommes partielles. Vrai ou faux ?*

1) ☐ $(s_n)_{n\geqslant 0}$ *est croissante.*
2) ☐ $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *converge si et seulement si* $(s_n)_{n\geqslant 0}$ *est majorée.*
3) ☐ *Si* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *converge, alors* a_n *est décroissante.*
4) ☐ *Si* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *converge, alors* $\sum_{n\geqslant 0}(-a_n)$ *diverge.*

5.2 Propriétés des séries convergentes

(ici, Video: v_series_proprietes.mp4)

5.2.1 Le terme général tend vers zéro

Intuitivement, il est clair que pour pouvoir sommer une infinité de nombres a_n, il faut que ceux-ci deviennent toujours plus petits à mesure que n devient grand :

Lemme 12. *Si $\sum_n a_n$ converge, alors $a_n \to 0$.*

Preuve: Si la série converge, cela signifie que la suite des sommes partielles a une limite : $s_n \to s$. On a donc

$$\begin{aligned} a_n &= \underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n)}_{=s_n} - \underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})}_{=s_{n-1}} \\ &= s_n - s_{n-1}\,, \end{aligned}$$

ceci implique que $a_n \to s - s = 0$. □

Le lemme ci-dessus est surtout utile lorsqu'on veut montrer, à moindre coût, qu'une série *diverge*. En effet, si le terme général ne tend pas vers zéro, la série doit diverger.

Exemple 5.11. La série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1 + 3^n}{2^n + 3^n}$$

diverge. En effet, la limite de son terme général

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3^n}{2^n+3^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(1+3^{-n})}{3^n(1+(\frac{2}{3})^n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+3^{-n}}{1+(\frac{2}{3})^n} = 1\,, \end{aligned}$$

qui est différent de zéro. ◇

Informel 5.12. ⚠ Attention : *il ne suffit pas que $a_n \to 0$ pour que $\sum_n a_n$ converge !* Par exemple, la série harmonique a son terme général qui tend vers zéro, $a_n = \frac{1}{n} \to 0$; mais elle diverge.

Donc pour qu'une série converge, son terme général doit faire plus que juste "tendre vers zéro" : il doit tendre vers zéro suffisamment vite.

5.2.2 Converger : un propriété asymptotique

La deuxième qualité importante peut être formulée en disant que *la convergence/divergence d'une série est un propriété qui ne dépend pas d'un nombre fini de ses termes*. En effet, si une série converge (resp. diverge), alors *on peut modifier un nombre arbitraire (mais fini) de termes, elle continuera à converger (resp. diverger)*.

Exemple 5.13. On sait que la série harmonique $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge, et que la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge. Fixons un entier N_0, arbitrairement grand.

⋆ Si on définit

$$a_n := \begin{cases} 0 & \text{si } n < N_0\,, \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \geqslant N_0\,, \end{cases}$$

alors $\sum_n a_n$ diverge.

⋆ Si on définit

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n < N_0\,, \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \geqslant N_0\,, \end{cases}$$

alors $\sum_n b_n$ converge.

◇

5.2.3 Sommes et multiplication par un scalaire

Finalement, donnons deux propriétés simples utilisées constamment dans la manipulation des séries convergentes :

Proposition 6. *Soient* $\sum_n a_n$ *et* $\sum_n b_n$ *des séries convergentes.*

1) $\sum_n (a_n \pm b_n) = \sum_n a_n \pm \sum_n b_n$
2) *Pour toute constante* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_n \lambda a_n = \lambda \sum_n a_n$

Preuve: Pour des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, considérons les sommes partielles associées, notées respectivement $(s_n)_{n\geqslant 0}$ et $(s'_n)_{n\geqslant 0}$. On a donc, par hypothèse, existence des limites

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k\geqslant 0} a_k$$
$$\lim_{n\to\infty} s'_n = \sum_{k\geqslant 0} b_k\,.$$

Soit $(s''_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des sommes partielles associées à la suite $(a_n + b_n)_{n\geqslant 0}$. On a, pour tout n,

$$s''_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = s_n + s'_n\,.$$

Étant la somme de deux suites convergentes, s''_n est également convergente, et de plus sa somme est

$$\begin{aligned} \sum_{k\geqslant 0} (a_k + b_k) &= \lim_{n\to\infty} s''_n \\ &= \lim_{n\to\infty} (s_n + s'_n) = \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} s'_n \\ &= \sum_{k\geqslant 0} a_k + \sum_{k\geqslant 0} b_k\,. \end{aligned}$$

L'autre propriété se démontre de la même façon. □

Exemple 5.14. Dans

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{7^n} \right)\,,$$

on reconnaît deux séries géométriques convergentes,

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{7^n}\,,$$

On peut donc utiliser la proposition, pour calculer

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{7^n}\right) &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}+\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{7^n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{-1}{7}} \\ &= \frac{23}{8}\end{aligned}$$

◇

Quiz 5.2.1. *Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Si* $\sum_n a_n$ *converge, alors* $a_n = 0$ *pour tout* n *suffisamment grand.*
2) ☐ *Si* $a_n > 0$ *pour tout* n*, alors* $\sum_n a_n$ *diverge.*
3) ☐ *Si* $\sum_n a_n$ *diverge, alors* $a_n \to +\infty$.
4) ☐ *Si* a_n *converge, alors* $\sum_n a_n$ *converge.*
5) ☐ *Si* $\sum_n a_n$ *converge, alors* $\sin(a_n)$ *n'a pas de limite lorsque* $n \to \infty$.
6) ☐ *Si* $\sum_n a_n$ *converge, alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un entier* N *tel que* $|a_n| \leqslant \varepsilon$ *pour tout* $n \geqslant N$.
7) ☐ *Si* $\sum_n (1 + a_n)$ *converge, alors* $a_n < 0$ *pour tout* n *suffisamment grand.*
8) ☐ *La série* $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1+\sqrt{n}+n^2}{5n^2+3\sqrt{n}+1}$ *converge.*
9) ☐ *Si* $\sum_n e^{-a_n}$ *converge, alors* $a_n \to +\infty$.
10) ☐ *Si* $\sum_n (a_n^2 - a_n - 2)$ *converge, alors* $a_n \to 2$ *ou* $a_n \to -1$.
11) ☐ *Si il existe une sous-suite* $(a_{n_k})_k$ *telle que* $a_{n_k} = 1$ *pour tout* k*, alors* $\sum_n a_n$ *diverge.*
12) ☐ *Si* $\sum_n a_n$ *converge, et si* $f(x) \geqslant 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, alors* $\sum_n f(a_n)$ *converge aussi.*

Quiz 5.2.2. *Vrai ou faux ?*

1) ☐ $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *converge si et seulement si* $\sum_{n\geqslant N} a_n$ *converge.*
2) ☐ *Si* $\sum_n (a_n - b_n)$ *converge, alors* $\sum_n a_n$ *et* $\sum_n b_n$ *convergent.*
3) ☐ *Si* $\sum_n a_n$ *et* $\sum_n b_n$ *convergent, alors* $\frac{a_n}{b_n} \to 1$.
4) ☐ *Si* $\sum_n a_n$ *converge, alors la suite* $b_k := \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ *tend vers zéro.*

Quiz 5.2.3. *Si* $a_n > 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$*, et si* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *converge et que sa somme vaut* $s = 3$*, alors*

1) ☐ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n+1}}{a_0 + a_1 + \cdots + a_n} = 1$
2) ☐ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n+1}}{a_0 + a_1 + \cdots + a_n} = \frac{4}{3}$
3) ☐ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (3 - (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n^2})) = -6$
4) ☐ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi a_n)}{a_n} = 0$
5) ☐ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi a_n)}{a_n} = \pi$
6) ☐ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi a_n)}{a_n} = 1$

5.3 Le critère de comparaison

(ici, Video: v_series_critere_comparaison.mp4)

Le critère le plus utilisé dans l'étude des séries. Il permet, lorsqu'il s'applique, d'étudier la convergence/divergence d'une série donnée, en la comparant avec une autre série donc la convergence/divergence est connue.

Théorème 5.15. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que*

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n$$

pour tout n suffisamment grand.

1) *Si $\sum_n b_n$ converge, alors $\sum_n a_n$ converge aussi.*
2) *Si $\sum_n a_n = +\infty$, alors $\sum_n b_n = +\infty$.*

Preuve: Supposons pour commencer que $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ **pour tout** $n \geqslant 1$ (au lieu de juste "pour tout n suffisamment grand"). Définissons les sommes partielles :

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \,, \qquad s'_n := \sum_{k=1}^{n} b_k \,.$$

Par définition, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge si et seulement si s_n est convergente, et $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge si et seulement si s'_n est convergente.
Puisque $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ pour tout n, on a aussi que

$$0 \leqslant s_n \leqslant s'_n \qquad \forall n \geqslant 1 \,.$$

De plus, comme tous les termes que leurs sommes contiennent sont positifs, s_n et s'_n sont des suites croissantes. En effet, on peut écrire, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + \cdots + a_n) \\ &= a_{n+1} \geqslant 0 \,, \end{aligned}$$

et donc $s_{n+1} \geqslant s_n$. (Pareil avec s'_n.)

1) Si $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge, alors il existe $s' \in \mathbb{R}$ tel que $s'_n \to s'$. Comme s'_n est croissante, on a $s'_n \leqslant s'$, et donc aussi $s_n \leqslant s'$. Donc s_n est croissante et majorée, donc aussi convergente, ce qui signifie que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.
2) Si $\sum_{n\geqslant 1} a_n = +\infty$, c'est que $s_n \to \infty$, et donc comme $s'_n \geqslant s_n$ pour tout $n \geqslant 1$, le théorème du chien méchant implique $s'_n \to \infty$, c'est-à-dire $\sum_{n\geqslant 1} b_n = +\infty$.

Maintenant, si on a $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ seulement à partir d'un certain n_0, on peut adapter l'argument sans difficulté, en redéfinissant

$$s_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k \,, \qquad s'_n := \sum_{k=n_0}^{n} b_k \,.$$

□

Exemple 5.16. Considérons la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n + n + \sin(n)} \,.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, $n + \sin(n) \geqslant 1 - 1 = 0$. On peut donc comparer :

$$0 \leqslant \underbrace{\frac{1}{2^n + n + \sin(n)}}_{=:a_n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{=:b_n} .$$

Puisque $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est une série géométrique de raison $r = \frac{1}{2} < 1$, elle converge. Donc $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge aussi. ◇

Exemple 5.17. Considérons

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p} ,$$

où p est un réel fixé.

- ⋆ On sait déjà que dans le cas $p = 2$,

  $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge.}$$

  Or si on prend n'importe quel $p > 2$, alors $n^p \geqslant n^2$ (pour tout $n \geqslant 1$), et donc

  $$0 \leqslant \underbrace{\frac{1}{n^p}}_{=a_n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{=b_n} \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1 .$$

  Donc par le critère de comparaison, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p}$ converge aussi.
- ⋆ D'autre part, on sait que la série harmonique

  $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} = \infty .$$

  Or si on prend n'importe quel $p < 1$, alors $n^p \leqslant n$ (pour tout $n \geqslant 1$), et donc

  $$0 \leqslant \underbrace{\frac{1}{n}}_{=a_n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n^p}}_{=b_n} \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1 .$$

  Donc par le critère de comparaison, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p} = +\infty$.

On a donc montré que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{diverge si } p \leqslant 1 , \\ \text{converge si } p \geqslant 2 . \end{cases}$$

Nous verrons plus loin ce qu'il en est des valeurs intermédiaires $p \in]1, 2[$. ◇

Quiz 5.3.1. *Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Si $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant 1$, et si $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge aussi.*
2) ☐ *Si il existe deux sous-suites $(a_{n_k})_k$ et $(b_{n_k})_k$ telles que $0 \leqslant a_{n_k} \leqslant b_{n_k}$ pour tout k suffisamment grand, et si $\sum_n b_n$ converge, alors $\sum_n a_n$ converge aussi.*
3) ☐ *Si il existe deux sous-suites $(a_{n_k})_k$ et $(b_{n_k})_k$ telles que $0 \leqslant a_{n_k} \leqslant b_{n_k}$ pour tout k suffisamment grand, et si $\sum_k b_{n_k}$ converge, alors $\sum_k a_{n_k}$ converge aussi.*

5.4 Le critère de Leibniz

(ici, Video: v_series_critere_alternee.mp4)

Certaines séries, très particulières, ont un terme général dont le signe est opposé au signe du terme précédent ; on les appelle **alternées**. Sous certaines conditions additionnelles, on peut garantir que ces séries convergent :

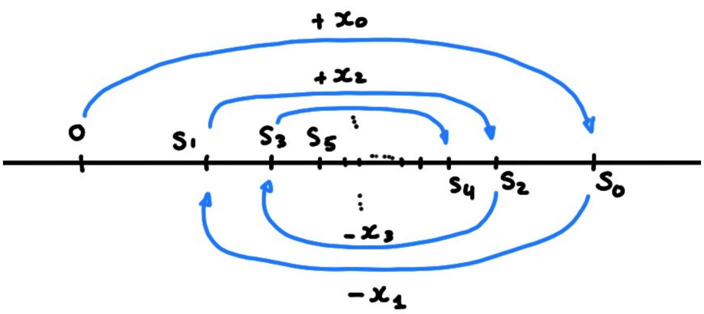
Théorème 5.18. *(Critère de Leibniz pour les séries alternées) Soit $a_n = (-1)^n x_n$, où*

1) $x_n \geqslant 0$,

2) x_n est décroissante, et

3) $x_n \to 0$.

Alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n = x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \cdots$ converge.



Preuve: Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante et soit s_n la suite des sommes partielles associée à la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x_n$:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= x_0 \\
s_1 &= x_0 - x_1 \\
s_2 &= x_0 - x_1 + x_2 \\
s_3 &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

Remarquons (voir l'image ci-dessus) que

$$s_1 \leqslant s_3 \leqslant s_5 \leqslant \cdots s_6 \leqslant s_4 \leqslant s_2 \leqslant s_0$$

Considérons donc les sous-suites s_{2k} et s_{2k+1}. Puisque (s_{2k}) est décroissante et minorée par s_1,

$$s_{\text{pairs}} = \lim_{k\to\infty} s_{2k} \quad \text{existe.}$$

Puisque (s_{2k+1}) est croissante et majorée par s_2, elle converge :

$$s_{\text{impairs}} = \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} \quad \text{existe.}$$

Mais comme $|s_{2k+1} - s_{2k}| = |x_{2k+1}| \to 0$, on a $s_{\text{pairs}} = s_{\text{impairs}}$. □

Exemple 5.19. La **série harmonique alternée** est définie par

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Elle s'obtient simplement en changeant le signe de tous les indices pairs de la série harmonique. Comme on peut écrire cette série sous la forme

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=-\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n x_n\,,$$

où $x_n=\frac{1}{n}$ est positif, décroissant, et tend vers zéro, on conclut par le théorème qu'elle converge. (On verra plus tard que sa somme vaut $\log(2)$). ◇

Exemple 5.20. Considérons la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+1}$$

Puisque $\sin(n\frac{\pi}{2})=0$ dès que n est pair, cette série est en fait

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+1}=\sum_{k\geqslant 0}\frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})}{2k+2}$$

Mais maintenant, $\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})=(-1)^k$, et donc

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+1}=\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{2k+2}$$

Puisque $x_k:=\frac{1}{2k+2}\to 0$, cette série converge. ◇

Quiz 5.4.1. *Parmi les séries ci-dessous, lesquelles ont une structure de série alternée ? (Plus précisément : quelles sont celles qui peuvent être transformées en une série qui satisfait aux hypothèses du critère de Leibniz, et donc qui garantissent la convergence de la série ?)*

1) □ $\sum_{n\geqslant 4}\frac{(-1)^{n+3}}{n+3}$

2) □ $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos(n\pi)}{n+1}$

3) □ $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{2n+1}}$

4) □ $\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n \text{ pair}}}\frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$

5) □ $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n(n+1)}{3n}$

6) □ $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\sin(n)}{n}$

Quiz 5.4.2. *Vrai ou faux*

1) □ *Si* $\sum_n a_n$ *diverge, alors* $\sum_n(-1)^n a_n$ *diverge aussi.*
2) □ *Si* $\sum_n a_n$ *diverge, alors* $\sum_n(-1)^n a_n$ *converge.*
3) □ *Si* $\sum_n a_n$ *converge, alors* $\sum_n(-1)^n a_n$ *converge aussi.*
4) □ *Si* $\sum_n a_n$ *diverge, et si* $x_n\in\{0,+1\}$ *pour tout* n*, alors* $\sum_n x_n a_n$ *converge.*
5) □ *Si* $|a_n|>\frac{1}{n}$ *pour tout* n *suffisamment grand, alors* $\sum_n a_n$ *diverge.*

Quiz 5.4.3. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si* $a_n\to 0$*, si* $a_n>0$ *pour une infinité d'indices* n *et* $a_n<0$ *pour une infinité d'indices* n*, alors* $\sum_n a_n$ *converge.*
2) □ *Si* $x_n\to 0$*, alors* $\sum_n(-1)^n x_n$ *converge.*
3) □ *Si* $x_n\geqslant 0$ *et* $x_n\to 0$*, alors* $\sum_n(-1)^n x_n$ *converge.*

5.5 Séries téléscopiques

Considérons une série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ dans laquelle le terme général a_n est une différence,

$$a_n = x_n - x_{n-1} \qquad \forall n \geqslant 1\,.$$

où $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite fixée. On appelle les séries de ce type des séries **téléscopiques**.
En effet, on remarque que la n-ème somme partielle associée à $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ peut se calculer exactement, puisque en réarrangeant les termes, beaucoup de paires se *téléscopent* :

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\
&= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \\
&= -x_0 + (x_1 - x_1) + (x_2 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-1}) + x_n \\
&= x_n - x_0\,.
\end{aligned}$$

On conclut de là que si la suite x_n possède une limite, $x_n \to L$, alors la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge, et de plus sa somme vaut

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - x_0) = L - x_0\,.$$

Exemple 5.21. La série téléscopique

$$\sum_{n\geqslant 2} \bigl(\cos(\tfrac{1}{\sqrt{n}}) - \cos(\tfrac{1}{\sqrt{n-1}})\bigr)$$

converge puisque $d_n = \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}) \to 1$, et sa somme vaut

$$\sum_{n\geqslant 2} \bigl(\cos(\tfrac{1}{\sqrt{n}}) - \cos(\tfrac{1}{\sqrt{n-1}})\bigr) = 1 - \cos(1)\,.$$

◇

Exemple 5.22. La série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

converge puisque

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

Or si on regarde de plus près, on peut la voir comme une série téléscopique, puisque

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\,.$$

(On verra plus tard comment faire ce genre de décomposition de façon plus systématique, appelée *décomposition en éléments simples*.) La n-ème somme partielle s'écrit donc

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\
&= \Bigl(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Bigr) + \Bigl(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Bigr) + \cdots + \Bigl(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Bigr) + \Bigl(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Bigr) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}\,,
\end{aligned}$$

où on a pu "téléscoper" les termes 2 à 2. On a donc que

$$s = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1\,.$$

◇

Quiz 5.5.1. *Soit* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite convergente, et* $a_n = x_n - x_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$*. Quelles affirmations sont toujours vraies ?*

1) ☐ a_n *converge et sa limite vaut* $L = \lim_{n\to\infty} x_n$
2) ☐ a_n *converge et sa limite vaut* 0
3) ☐ *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$*, alors* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *diverge.*
4) ☐ $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *converge et sa somme vaut* $s = \lim_{n\to\infty} x_n$
5) ☐ $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *converge et sa somme vaut* $s = \{\lim_{n\to\infty} x_n\} - x_0$

5.6 Séries $\sum_n \frac{1}{n^p}$

(ici, Video: v_series_np.mp4)

Dans cette section, on regarde de plus près les séries de la forme

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p}\,,$$

où p est un réel fixé. On a déjà traité les cas $p = 1$ (série harmonique, divergente) et $p = 2$ (convergente), et on en a déduit, par comparaison, les cas $p < 1$ et $p > 2$. Ici on complète cette analyse, en particulier en traitant les valeurs intermédiaires $1 < p < 2$.

Théorème 5.23. *Soit* $p \in \mathbb{R}$*. Alors*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \textit{converge} & \textit{si } p > 1\,, \\ \textit{diverge} & \textit{si } p \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Preuve: La divergence pour tous les $p \leqslant 1$ peut se faire par comparaison avec la série harmonique. En effet, si $p \leqslant 1$, alors $\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}$, et puisque $\sum_n \frac{1}{n} = \infty$, cela implique que $\sum_n \frac{1}{n^p} = +\infty$.

Soit maintenant $p > 1$. Comme s_n est monotone croissante, il suffit de montrer qu'elle est majorée, et pour montrer qu'elle est majorée, il suffit de montrer qu'une sous-suite quelconque est majorée. Pour ce faire, on considère la sous-suite s_{2^k-1}. L'idée va être de majorer cette suite, en la comparant à la somme partielle d'une série géométrique convergente.

Pour $k = 1$, on a

$$s_{2^1-1} = \tfrac{1}{1^p} = 1\,.$$

Pour $k = 2$, on peut majorer

$$\begin{aligned} s_{2^2-1} &= \tfrac{1}{1^p} + \underbrace{\tfrac{1}{2^p} + \tfrac{1}{3^p}}_{\leqslant 2\frac{1}{2^p}} \\ &\leqslant 1 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right). \end{aligned}$$

Pour $k = 3$,

$$\begin{aligned} s_{2^3-1} &= \tfrac{1}{1^p} + \underbrace{\tfrac{1}{2^p} + \tfrac{1}{3^p}}_{\leqslant 2\frac{1}{2^p}} + \underbrace{\tfrac{1}{4^p} + \cdots + \tfrac{1}{7^p}}_{\leqslant 4\frac{1}{4^p}} \\ &\leqslant 1 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right) + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^2. \end{aligned}$$

Pour $k = 4$,

$$\begin{aligned} s_{2^4-1} &= \tfrac{1}{1^p} + \underbrace{\tfrac{1}{2^p} + \tfrac{1}{3^p}}_{\leqslant 2\frac{1}{2^p}} + \underbrace{\tfrac{1}{4^p} + \cdots + \tfrac{1}{7^p}}_{\leqslant 4\frac{1}{4^p}} + \underbrace{\tfrac{1}{8^p} + \cdots + \tfrac{1}{15^p}}_{\leqslant 8\frac{1}{8^p}} \\ &\leqslant 1 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right) + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^3 \end{aligned}$$

Comme $p > 1$, on a $\frac{2}{2^p} < 1$, et donc pour tout k,

$$\begin{aligned} s_{2^k-1} &\leqslant 1 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right) + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^3 + \cdots + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^{k-1} \\ &< 1 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right) + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^3 + \cdots + \left(\tfrac{2}{2^p}\right)^{k-1} + \underbrace{\cdots}_{\text{le reste de la série}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2}{2^p}} < \infty\,. \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 5.24. Ce résultat montre à quel point la convergence/divergence d'une série peut être *sensible* au comportement de ses coefficients ! En effet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.000001}} < \infty\,,$$

alors que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.999999}} = \infty\,.$$

$\diamond$

Dans certaines séries, on pourra parfois identifier dans le terme général a_n une contribution dominante de la forme $\frac{1}{n^p}$, ce qui pourra donner des idées quant à la convergence/divergence de la série.

Exemple 5.25. Considérons la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{4n^3+7}}\,.$$

Gardons la contribution venant uniquement du "n^3". Comme $7 \geqslant 0$, on peut majorer le terme général comme suit :

$$0 \leqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4n^3+7}}}_{=a_n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4n^3}} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{3/2}} =: b_n$$

Par le théorème, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, puisqu'elle correspond au cas $p = 3/2 > 1$. Donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge aussi, et par le critère de comparaison, on conclut que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{4n^3+7}}$ converge. $\diamond$

Exemple 5.26. Considérons la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1}\,.$$

On remarque dans le terme général la présence d'un comportement du type $\frac{1}{n^2}$; on peut l'extraire en mettant le n^2 en évidence au dénominateur, et en majorant le reste :

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{n^2}\frac{1}{4-\frac{1}{n^2}} \leqslant \frac{1}{3n^2}\,.$$

(En effet, $4 - \frac{1}{n^2} \geqslant 3$ pour tout $n \geqslant 1$.) Mais puisque la série $\sum_n \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3}\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (car $p = 2 > 1$), le critère de comparaison implique que $\sum_n \frac{1}{4n^2-1}$ converge. $\diamond$

Quiz 5.6.1. *Parmi les séries ci-dessous, lesquelles convergent ?*

1) $\square \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\pi)}{n^{1/7}}$ *3)* $\square \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ *5)* $\square \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{e^{3\log(n)-1}}$

2) $\square \sum_{n\geqslant 1} \frac{2^{-n}}{n^p}\ (p>0)$ *4)* $\square \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{n^6+1}}$ *6)* $\square \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3n+1}{2n-1}}}$

5.7 Le critère de la limite du quotient

(ici, Video: v_series_critere_limite_quotient.mp4)

Théorème 5.27. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites. Supposons que $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour tout n suffisamment grand, et que*

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \textit{existe.}$$

Si $\alpha > 0$, alors soit $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ convergent toutes les deux, soit elles divergent toutes les deux.

Preuve: Si le quotient $\frac{a_n}{b_n}$ tend vers $\alpha > 0$, cela signifie qu'il est loin de zéro pour tous les indices n suffisamment grands. Soit $\varepsilon := \alpha/2$. Alors il existe N tel que $|\frac{a_n}{b_n} - \alpha| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, c'est-à-dire que

$$\underbrace{(\alpha-\varepsilon)}_{=\alpha/2} b_n \leqslant a_n \leqslant \underbrace{(\alpha+\varepsilon)}_{=3\alpha/2} b_n\,.$$

Donc si $\sum_n a_n$ converge, $\sum_n b_n$ converge aussi, et si $\sum_n a_n$ diverge alors $\sum_n b_n$ diverge aussi, et vice versa. $\square$

Le théorème ci-dessus est très utile lorsqu'on a un terme général dans lequel on peut identifier un terme qui doit dominer, mais pour lequel aucune comparaison simple ne se présente.

Exemple 5.28. Considérons

$$\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n^3-5n-1}\,.$$

Ici, la présence du "n^3" dans le terme général $a_n = \frac{1}{n^3-5n-1}$ suggère de considérer $b_n = \frac{1}{n^3}$. En effet, a_n et b_n sont tous deux positifs pour n suffisamment grand, et

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3-5n-1} = 1 > 0\,.$$

Donc la série $\sum_n a_n$ converge. Remarquons pourtant que $a_n > b_n$ pour tout $n \geqslant 2$! $\diamond$

Exemple 5.29. Considérons la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{3}{n^2+1}\right)\,.$$

Remarquons que $a_n = \sin(\frac{3}{n^2+1}) > 0$ pour tout n suffisamment grand. Si on se souvient du résultat qui dit que si $x_n \to 0$, alors $\frac{\sin(x_n)}{x_n} \to 1$, cela suggère de poser $b_n = \frac{3}{n^2+1}$; on a alors que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{3}{n^2+1})}{\frac{3}{n^2+1}} = 1 > 0\,.$$

Puisque $\sum_n b_n = 3\sum_n \frac{1}{n^2+1}$ converge (son terme général étant $\leqslant \frac{3}{n^2}$), on conclut que $\sum_n a_n$ converge aussi. $\diamond$

5.8 Séries absolument convergentes

(ici, Video: v_series_absolument_conv.mp4)

Définition 5.30. Si $\sum_n |a_n|$ converge, on dit que $\sum_n a_n$ est **absolument convergente**.

Exemple 5.31. La série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

est convergente (car c'est une série alternée satisfaisant au critère de Leibniz), mais elle est aussi absolument convergente, car

$$\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}\,,$$

qui est convergente ($p = 2 > 1$). Donc l'alternance de signes, dans la série de départ, n'est pas essentielle pour garantir sa convergence. ◇

Exemple 5.32. La série harmonique alternée est convergente, comme on sait, mais elle n'est *pas* absolument convergente, car en prenant la valeur absolue de chacun de ses termes on obtient

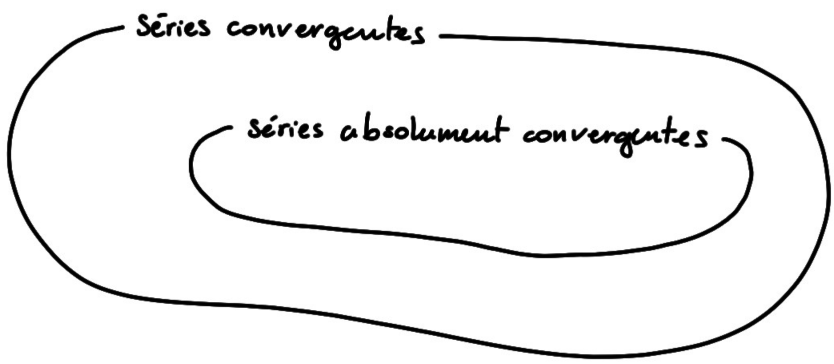
$$\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\,,$$

la série harmonique, qui est divergente. Donc la série harmonique alternée a "besoin" de l'alternance de ses signes pour pouvoir converger. ◇

Ce dernier exemple montre qu'une série peut être convergente sans être absolument convergente. D'autre part, on a le résultat important suivant, qui montre que la notion de convergence absolue est plus forte que celle de convergence :

Théorème 5.33. *Si $\sum_n a_n$ converge absolument, alors elle converge.*

Donc l'ensemble des séries absolument convergentes forme un sous-ensemble de l'ensemble des séries convergentes :



Preuve: Définissons

$$\begin{aligned} s_n &:= a_1 + \cdots + a_n \\ \bar{s}_n &:= |a_1| + \cdots + |a_n|\,. \end{aligned}$$

Comme $\sum_n a_n$ est absolument convergente, la suite $\bar{s}_n$ converge, ce qui implique que c'est aussi une suite de Cauchy. Or pour tout $n \geqslant m$, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= |a_{m+1} + \cdots + a_n| \\ &\leqslant |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| \\ &= \bar{s}_n - \bar{s}_m \\ &= |\bar{s}_n - \bar{s}_m| \,. \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $(\bar{s}_n)$ est une suite de Cauchy, il existe N tel que $|\bar{s}_n - \bar{s}_m| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n, m \geqslant N$. Par l'inégalité ci-dessus, ceci implique que $|s_n - s_m| \leqslant \varepsilon$ pour tout $m, n \geqslant N$. On a donc montré que (s_n) est une suite de Cauchy, et donc elle converge : $\sum_n a_n$ est convergente. □

Ce résultat peut parfois être utile pour l'étude d'une série :

Exemple 5.34. Étudions la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{3\sin(n) - 5\cos(n^2)}{2^n + \sqrt{n}} \,.$$

Le numérateur contient des parties oscillantes qui compliquent l'étude de la convergence. Pourtant,

$$|3\sin(n) - 5\cos(n^2)| \leqslant 3 + 5 = 8 \,,$$

et donc

$$0 \leqslant |a_n| = \left| \frac{3\sin(n) - 5\cos(n^2)}{2^n + \sqrt{n}} \right| \leqslant \frac{8}{2^n} =: b_n \,.$$

Comme $\sum_n b_n = 8\sum_n \frac{1}{2^n}$ converge (géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$), le critère de comparaison implique que $\sum_n |a_n|$ converge. Donc $\sum_n a_n$ converge absolument, et par le théorème ci-dessus, ceci implique que $\sum_n a_n$ converge. ◇

Dans les deux prochaines sections, nous verrons deux critères très utiles qui garantissent la convergence absolue (et donc la convergence) d'une série.

Quiz 5.8.1. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Soit (s_n) la suite des sommes partielles d'une série $\sum_n a_n$. Si $|s_n|$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge absolument.*
2) □ *Soit $\bar{s}_n := |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$. Si $(\bar{s}_n)$ est majorée, alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge absolument.*
3) □ *Si $\sum_n a_n$ converge absolument, alors $a_n \geqslant 0$ pour tout n suffisamment grand.*
4) □ *Si $\sum_n a_n$ converge absolument, et si $\sum_n |a_n| = |L|$, alors $\sum_n a_n = \pm L$.*
5) □ *Si $\sum_n a_n$ ne converge pas absolument, alors $|a_n|$ ne tend pas vers zéro.*
6) □ *Si $\sum_n a_n$ diverge, alors $\sum_n |a_n|$ diverge.*
7) □ *Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, que sa somme vaut $s > 0$, alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge absolument.*
8) □ *Si $\sum_n a_n$ converge, et si $b_n \to 0$, alors $\sum_n a_n b_n$ converge.*

5.9 Le critère de d'Alembert

(ici, Video: v_series_critere_quotient.mp4)

Théorème 5.35. *Soit (a_n) une suite pour laquelle la limite*

$$\rho := \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

existe, ou est $+\infty$.

1) *Si $\rho < 1$, alors $\sum_n a_n$ converge absolument (donc converge).*
2) *Si $\rho > 1$, alors $\sum_n a_n$ diverge.*

Preuve: La preuve commence de la même façon que celle pour le critère de l'Alembert pour les suites :
1) Si $\rho < 1$, on sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ et un entier N tel que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant 1-\varepsilon \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

On a donc, pour tout $n > N$,

$$\begin{aligned}|a_n| &\leqslant (1-\varepsilon)|a_{n-1}|\\ &\leqslant (1-\varepsilon)^2|a_{n-2}|\\ &\leqslant \dots\\ &\leqslant (1-\varepsilon)^{n-N}|a_N| =: c_n\,.\end{aligned}$$

Mais comme c_n est, à une constante près, le terme général d'une série géométrique (de raison $r = 1-\varepsilon < 1$), la série $\sum_{n=N+1}^\infty c_n$ converge. Par le critère de comparaison, $\sum_{n=N+1}^\infty |a_n|$ converge aussi, et donc $\sum_n a_n$ converge absolument.

2) On a déjà vu (Critère de d'Alembert pour les suites) que $\rho > 1$ implique que $|a_n| \to \infty$, et donc a_n ne tend pas vers zéro, ce qui implique que $\sum_n a_n$ diverge. □

Exemple 5.36. Considérons

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-9)^k}{k!}\,.$$

Si une comparaison avec une série plus simple n'est pas immédiatement facile, on peut calculer

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-9)^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{(-9)^k}{k!}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{9}{k+1} = 0\,.$$

Par le théorème, la série est absolument convergente, et donc convergente. ◇

Le cas où $\rho = 1$ n'est pas résolu par le théorème, parce qu'il ne permet pas de conclure, et une autre méthode doit être utilisée.

Exemple 5.37. Pour le terme général $a_n = C > 0$, on a $\rho = 1$, donc le critère ne dit rien. Pourtant, on sait que $\sum_n a_n$ diverge. ◇

Exemple 5.38. Pour le terme général $a_n = \frac{1}{n}$, on a

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1/(k+1)}{1/k} = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1} = 1\,,$$

donc le critère ne dit rien. Pourtant, on sait que $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge. ◇

Exemple 5.39. Pour le terme général $a_n = \frac{1}{n^2}$, on a

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1/(k+1)^2}{1/k^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{(k+1)^2} = 1\,,$$

donc le critère ne dit rien. Pourtant, on sait que $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge. ◇

Informel 5.40. Ces exemples montrent que le critère de d'Alembert est inefficace pour toutes les séries du type $\sum_n \frac{1}{n^p}$. Donc ce critère est efficace dans les situations où le terme général tend vers zéro au moins exponentiellement vite. L'avantage est qu'on peut l'appliquer *sans savoir si le terme décroît exponentiellement vite*.

Exemple 5.41. Considérons la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n!)^3}{(2n)!}$$

On a

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!^3}{(2(k+1))!}}{\frac{(k!)^3}{(2k)!}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!^3}{k!^3} \frac{(2k)!}{(2(k+1))!} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^3}{(2k+2)(2k+1)} = +\infty\,.
\end{aligned}$$

Donc la série est divergente, et puisque tous ses termes sont positifs on peut écrire

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n!)^3}{(2n)!} = +\infty$$

$\diamond$

Quiz 5.9.1. *Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Si* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ *pour tout* n*, alors* $\sum_n a_n$ *converge absolument.*
2) ☐ *Si il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leqslant 1-\varepsilon$ *pour tout* n *suffisamment grand, alors* $\sum_n a_n$ *converge absolument.*
3) ☐ *Si* $\sum_n a_n$ *converge absolument, alors* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ *pour tout* n *suffisamment grand.*
4) ☐ *Si* $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ *n'existe pas, alors* $\sum_n a_n$ *ne converge pas absolument.*
5) ☐ *Si* $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$*, alors* $\sum_n |a_n|$ *peut être comparée à une série géométrique de raison* $0 \leqslant r < 1$.

5.10 Le critère de Cauchy

(ici, Video: v_series_critere_Cauchy.mp4)

Théorème 5.42. *Soit* (a_n) *une suite réelle, telle que la limite*

$$\sigma := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

est soit finie, soit $+\infty$.

1) *Si* $\sigma < 1$*, alors* $\sum_n a_n$ *converge absolument (et donc converge).*
2) *Si* $\sigma > 1$*, alors* $\sum_n a_n$ *diverge.*

Preuve: 1) Supposons $\sigma < 1$. Alors il existe $0 < \varepsilon < 1$ et un entier N tel que

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant 1-\varepsilon \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

On a donc que
$$|a_n| \leqslant (1-\varepsilon)^n \qquad \forall n \geqslant N\,,$$
Par le critère de comparaison, comme la série associée $b_n := (1-\varepsilon)^n$ converge (géométrique de raison $r = 1-\varepsilon$), celle associée à a_n converge aussi.

2) Semblable, mais dans ce cas on montre que $|a_n| \to \infty$, et donc a_n ne tend pas vers zéro, et donc la série $\sum_n a_n$ diverge. □

Exemple 5.43. La série
$$\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\,.$$
converge, puisque
$$\begin{aligned}\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{(n-1)+1}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\\ &= \tfrac{1}{e}\cdot 1 < 1\,.\end{aligned}$$
◇

Remarque 5.44. Le critère de Cauchy existe en fait dans une forme un peu plus forte, dans laquelle la définition de σ est légèrement différente :
$$\sigma := \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,,$$
mais où la conclusion est la même : si $\sigma < 1$ alors la série converge absolument, et si $\sigma > 1$ alors la série diverge.

L'avantage de cette deuxième version est que l'on peut étudier certaines séries pour lesquelles la limite qui définit σ dans la première définition n'existe pas, alors qu'elle possède une limite supérieure. ◇

Exemple 5.45. Considérons la série
$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}(-1)^n\right)^n\,.$$
Remarquons qu'ici,
$$\sqrt[n]{|a_n|} = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}(-1)^n\,,$$
qui n'a pas de limite lorsque $n\to\infty$. Pourtant,
$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1\,,$$
et donc par la nouvelle version du critère, la série converge.

Remarquons qu'on aurait aussi simplement pu écrire
$$|a_n| = \left|\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}(-1)^n\right|^n \leqslant (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4})^n = (\tfrac{3}{4})^n\,.$$
Ainsi, par comparaison avec la série géométrique de raison $r=\frac{3}{4}$, on conclut que $\sum_n a_n$ converge absolument. ◇

Quiz 5.10.1. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} < 1$, *alors* $\sum_n a_n$ *converge absolument.*
2) □ *Si* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} < 1$, *alors* $\sum_n a_n$ *converge absolument.*
3) □ *Si* $0 \leqslant x_n < 1$ *pour tout* n, *alors* $\sum_n {x_n}^n$ *est convergente.*
4) □ *Si* $x_n \in [0,1]$ *est telle que* $\sup\{x_0, x_1, x_2, \dots\} < 1$, *alors* $\sum_n {x_n}^n$ *converge.*

5.11 Séries dépendant d'un paramètre

Souvent, les séries sont utilisées pour définir des *fonctions d'une variable réelle*.

Supposons que le terme général d'une série dépende d'un paramètre réel. Cela signifie que pour chaque $n \geqslant 1$, on a une fonction

$$x \mapsto a_n(x)\,.$$

Pour simplifier, on supposera que toutes ces fonctions sont définies sur le même intervalle $a_n : I \to \mathbb{R}$.

On peut donc définir, formellement, la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ par

$$x \mapsto f(x) := \sum_{n\geqslant 1} a_n(x)\,.$$

Évidemment, on ne peut étudier cette fonction que sur les points x où la série qui définit $f(x)$ est convergente. Le *domaine* de f est donc

$$D(f) = \Big\{ x \in I \;\Big|\; \sum_{n\geqslant 1} a_n(x) \text{ converge} \Big\}\,.$$

Exemple 5.46. Considérons le terme général

$$a_n(x) = x^n\,.$$

Alors pour tout $n \geqslant 0$, a_n est une fonction définie sur $I = \mathbb{R}$. On remarque alors que $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^n$ n'est autre que la série géométrique, où x joue le rôle de raison. On sait donc qu'elle converge si et seulement si $|x| < 1$. On a donc $D(f) =]-1,1[$.

Il est intéressant de remarquer que pour $x \in D(f)$, $f(x)$ est en fait $\frac{1}{1-x}$! ◇

Exemple 5.47. Si on considère

$$a_n(x) = \frac{(x+3)^n}{n!}\,,$$

défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, utilisons le critère de l'Alembert pour étudier la convergence de la série

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(x+3)^n}{n!}\,.$$

On peut étudier la convergence de cette série, pour un x fixé, en étudiant

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right|.$$

Or en développant,

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+3)^{n+1}/(n+1)!}{(x+3)^n/n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+3|}{n+1} = 0\,.$$

donc par le critère de d'Alembert, la série converge pour cette valeur de x, et donc $f(x)$ est bien définie en ce point. Puisque c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $D(f) = \mathbb{R}$. ◇

Informel 5.48. Une fonction définie par une série est en général *très* difficile à étudier ! Si on considère par exemple le terme général $a_n(x) = \frac{\cos(9^n x)}{2^n}$, alors

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\cos(9^n x)}{2^n}$$

est bien définie partout : $D(f) = \mathbb{R}$. En effet,

$$0 \leqslant |a_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

qui est le terme général d'une série géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$. Cette fonction, étudiée par Weierstrass au 19ème siècle, possède des propriétés très particulières : elle est continue partout, mais dérivable nulle part (on définira ces termes plus tard dans le cours).

Quiz 5.11.1. *L'ensemble de définition $D(f)$ de la fonction*

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^n$$

est

1) □ $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) □ $]-1, 1[$

3) □ $]-\infty, 0[$

4) □ $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

Chapitre 6

Fonctions réelles

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, on commence l'étude des *fonctions réelles d'une variable*. Les notions de base relatives à ces fonctions (injectivité, surjectivité, bijectivité, graphe) se trouvent **ici** (lien vers la section `m_fonctions_generalites_fonctions_reelles`).

Nous commencerons, dans ce chapitre, par décrire brièvement certaines propriétés particulières qu'une fonction peut posséder (monotonie, parité, périodicité), et introduirons les notions de minimum/maximum ainsi que d'infimum/supremum.

Les notions de *limite* associées à une fonction réelle, puis celles de *continuité*, *dérivabilité* et *intégrabilité* feront l'objet de toute la suite du cours.

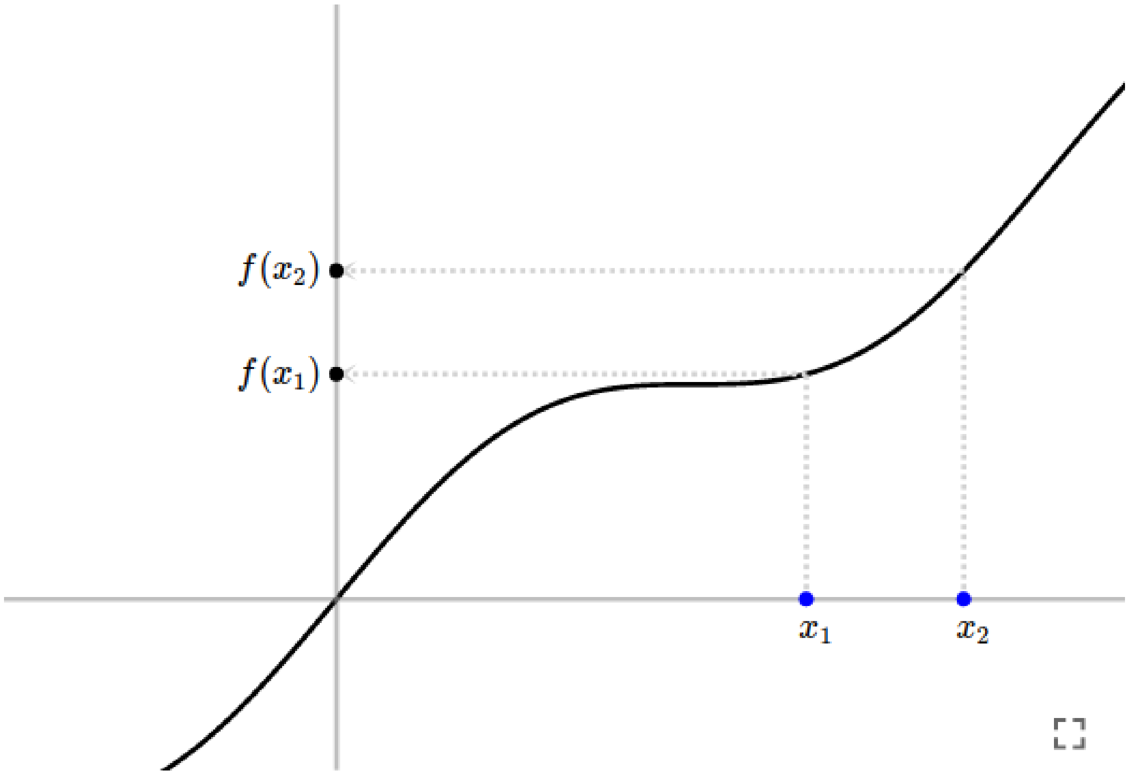
6.2 Monotonie

Une première propriété très particulière qu'une fonction peut posséder est celle d'être *monotone*.

Définition 6.1. $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) f est **croissante sur** I si $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.
2) f est **strictement croissante sur** I si $f(x_1) < f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.
3) f est **décroissante sur** I si $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.
4) f est **strictement décroissante sur** I si $f(x_1) > f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

Si f satisfait une de ces propriétés, elle est **monotone**.



Exemple 6.2. La fonction $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. En effet, si $0 \leqslant x_1 < x_2$, alors $x_2 - x_1 > 0$, et donc

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \underbrace{(x_2 + x_1)}_{>0} > 0\,,$$

ce qui implique que $f(x_1) < f(x_2)$. De même, on montre que $f(x) = x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$. ◇

Exemple 6.3. Par notre définition, une fonction qui est *constante* sur I (c.à-d. qu'il existe un réel C tel que $f(x) = C$ pour tout $x \in I$) est à la fois croissante et décroissante sur I. ◇

6.2.1 Variation

Étudier la **variation** d'une fonction, c'est trouver les intervalles sur lesquelles elle est croissante/décroissan

L'étude de la variation d'une fonction donnée, basée uniquement sur la *définition* de cette fonction (comme x^2 dans l'exemple ci-dessus), peut être difficile. Le *calcul différentiel*, que nous développerons plus loin, fournira un outil puissant permettant de faire cette analyse.

Quiz 6.2.1. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$. Vrai ou faux ?*

1) □ *Si f n'est pas croissante, alors elle est décroissante.*
2) □ *Si f est croissante, alors $-f$ est décroissante.*
3) □ *Si f est croissante, alors f^2 est croissante.*
4) □ *Si f est croissante, alors λf est croissante pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
5) □ *Si f est croissante, et si $g : I \to \mathbb{R}$ est croissante, alors $f + g$ est aussi croissante.*
6) □ *Si f est croissante, et si $g : I \to \mathbb{R}$ est croissante, alors $f \cdot g$ est aussi croissante.*

6.3 Parité

Une autre propriété qu'une fonction peut posséder est par rapport à son comportement vis-à-vis de la transformation $x \mapsto -x$.

Ci-dessous, on considère des fonctions dont le domaine $D \subset \mathbb{R}$ est **symétrique** c'est-à-dire que si $x \in D$, alors $-x \in D$.

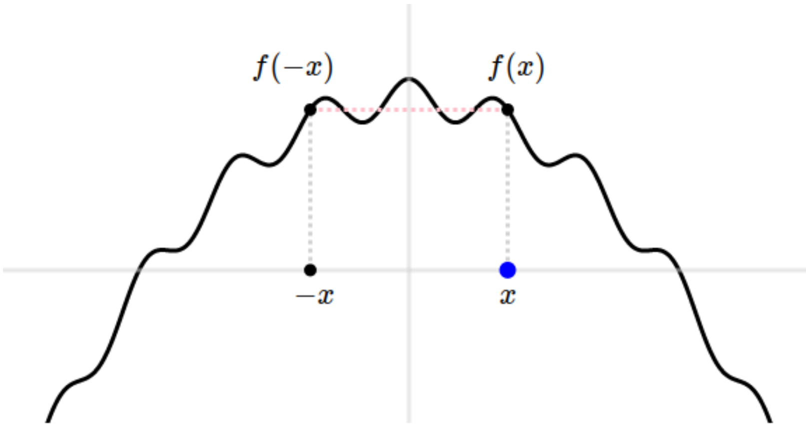
Définition 6.4. $f : D \to \mathbb{R}$ est dite **paire** si

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in D\,.$$

Si le point $(x, y) = (x, f(x))$ appartient au graphe de f, alors le point

$$(-x, f(-x)) = (-x, f(x)) = (-x, y)$$

appartient aussi au graphe de f. On conclut que le graphe d'une fonction paire est *invariant sous l'effet d'une réflexion par rapport à l'axe Oy*.



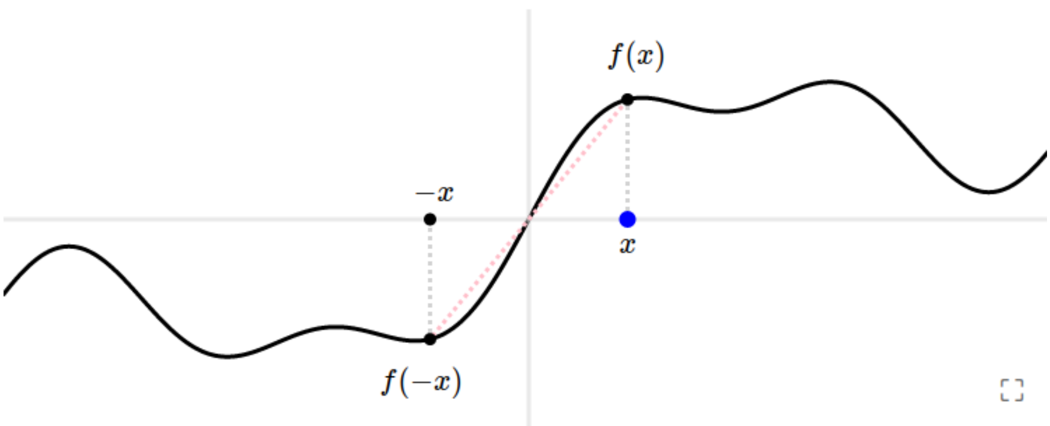
Définition 6.5. $f : D \to \mathbb{R}$ est dite **impaire** si

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in D\,.$$

Si le point $(x, y) = (x, f(x))$ appartient au graphe, alors le point

$$(-x, f(-x)) = (-x, -f(x)) = (-x, -y)$$

appartient aussi graphe de f. Donc le graphe d'une fonction impaire est *invariant sous une rotation de* 180^o *autour de l'origine* :



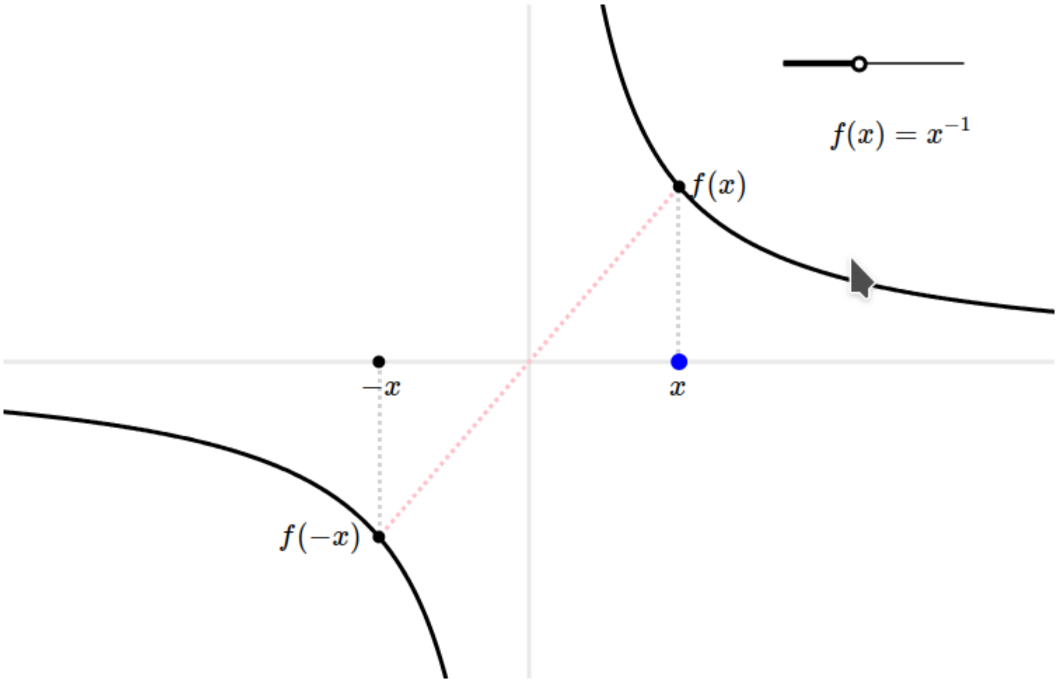
Exemple 6.6. Décrivons l'exemple qui est à l'origine de la dénomination de fonction "paire" ou "impaire". Pour un entier $p \in \mathbb{Z}$, la fonction

$$f(x) = x^p$$

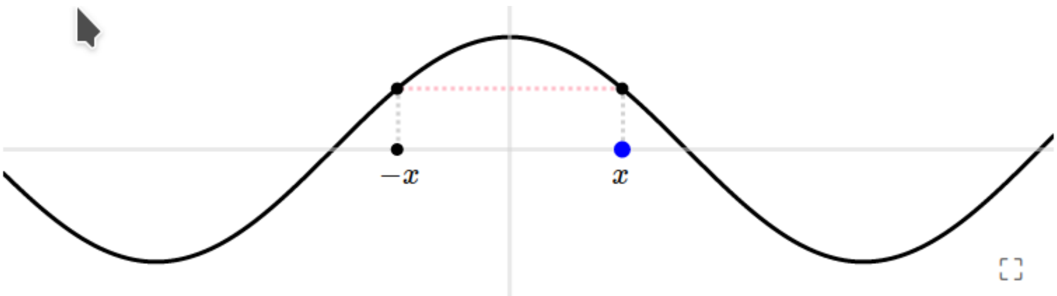
est

- ⋆ paire si p est pair,
- ⋆ impaire si p est impair.

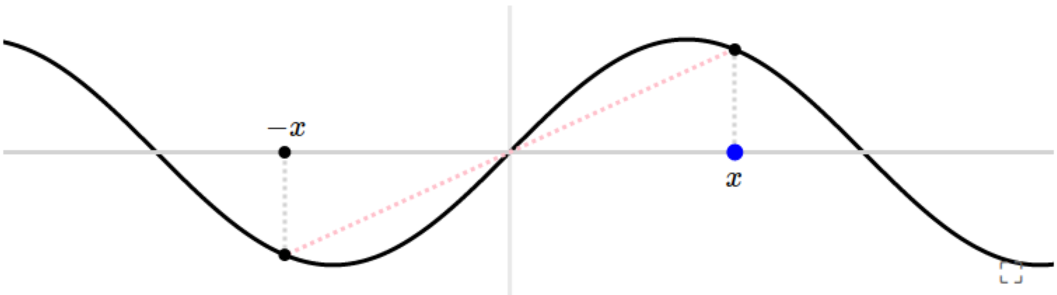
Remarquons que si p est négatif, alors 0 ne fait pas partie du domaine de f. ◇



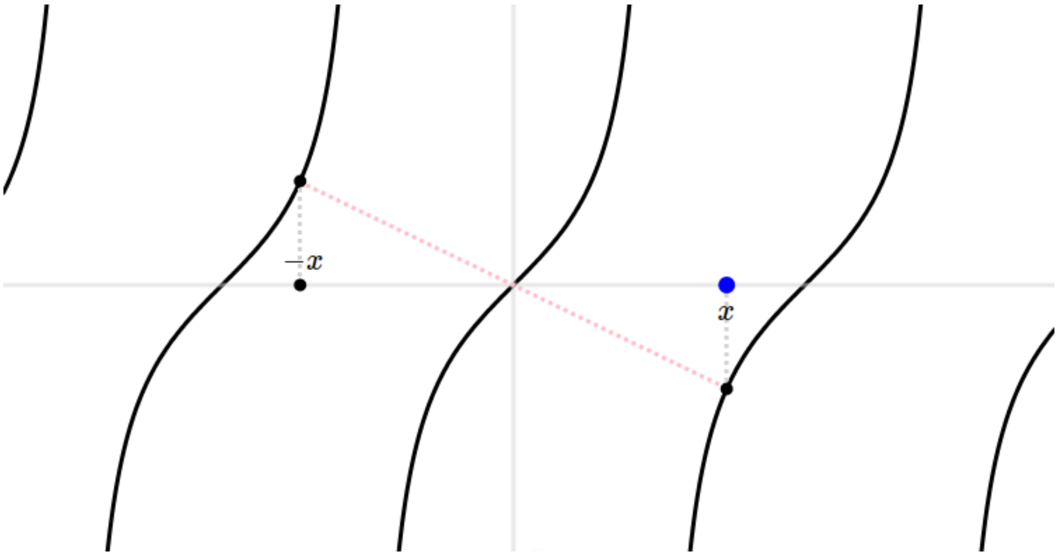
Exemple 6.7. Sur $D = \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ est paire,



et $x \mapsto \sin(x)$ est impaire,



Sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$, $x \mapsto \tan(x)$ est impaire :



En effet,

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)\,.$$

◇

Exemple 6.8. Montrons que la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{e^x - e^{-x}}$$

est paire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \frac{\sin(2(-x))}{e^{-x} - e^{-(-x)}} = \frac{-\sin(2x)}{-(e^x - e^{-x})} = \frac{\sin(2x)}{e^x - e^{-x}} = f(x)\,.$$

◇

Pour montrer qu'une fonction n'est pas paire (resp. pas impaire), il suffit de trouver un point x_* de son domaine où $f(-x_*) \neq f(x_*)$ (resp. $f(-x_*) \neq -f(x_*)$).

Exemple 6.9. Considérons, sur $\mathbb{R}$, la fonction $f(x) = x+1$. On remarque que $f(-1) = 0$ et $f(1) = 2$, et donc $f(-1) \neq f(1)$, et donc f n'est pas paire. Et comme $f(-1) \neq -f(1)$, f n'est pas impaire non plus. ◇

Une fonction, en général, n'a pas de raison d'être paire ou impaire; pourtant toute fonction contient un peu d'une fonction paire, et un peu d'une fonction impaire :

Lemme 13. *Si D est symétrique, toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ peut s'écrire, de manière unique, comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

Preuve: Cherchons à écrire $f(x) = p(x) + i(x)$, où $p(x)$ est paire et $i(x)$ est impaire. On doit donc avoir

$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)\,,$$

et donc $i(x)$ et $p(x)$ doivent satisfaire

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + i(x) \\ f(-x) &= p(x) - i(x)\,. \end{aligned}$$

Ce petit système linéaire se résout facilement. Sa solution est unique, et donnée par

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}\,, \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}\,.$$

□

Exemple 6.10. Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ n'est ni paire ni impaire, mais on peut quand-même l'écrire $e^x = p(x) + i(x)$, où

$$p(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

est paire, et

$$i(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

est impaire. (Pour les fonctions hyperboliques, voir **ici** (lien vers la section m_fonctions_hyperbolique ◇

Quiz 6.3.1. *Soit f une fonction dont le domaine D est symétrique et contient l'origine. Vrai ou faux ?*

1) □ *Il existe $a > 0$ tel que $D = [-a, a]$ ou $D =]-a, a[$.*
2) □ *f est soit paire, soit impaire.*
3) □ *Si f n'est pas paire, alors $f(-x) \neq f(x)$ pour tout $x \in D$.*
4) □ *Si f n'est pas impaire, alors $f(-x) \neq -f(x)$ pour tout $x \in D$.*
5) □ *Si f est impaire, alors $f(0) = 0$.*
6) □ *Si f est impaire, alors $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et $f(x) < 0$ pour tout $x < 0$.*
7) □ *Si f est paire, alors f^2 est aussi paire.*
8) □ *Si f est impaire, alors f^2 est aussi impaire.*
9) □ *f est en même temps paire et impaire si et seulement si f est identiquement nulle sur D.*

6.4 Périodicité

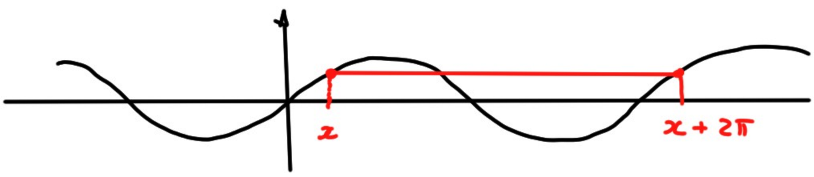
Définition 6.11. Soit $t > 0$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite t-**périodique** si

$$f(x + t) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Si il existe un $t > 0$ minimal jouissant de cette propriété, on l'appelle **période de** f, et on le note $T > 0$.

Remarque 6.12. Si f est t-périodique, elle est aussi $\pm 2t$-périodique, $\pm 3t$-périodique, etc. ◇

Exemple 6.13. $f(x) = \sin(x)$ est périodique, de période $T = 2\pi$:



$f(x) = \cos(x)$ est périodique, de période $T = 2\pi$. ◇

Exemple 6.14. $f(x) = \tan(x)$ (sur son domaine) est π-périodique car

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)\,.$$

◇

Exemple 6.15. Considérons une fonction constante : $f(x) = C$. On a bien $f(x+t) = f(x)$ pour tout x et tout $t > 0$, donc f est t-périodique pour tout $t > 0$. Mais comme il n'existe pas de *plus petit t strictement positif* avec cette propriété, la fonction n'a pas de "période" à proprement parler. ◇

Exemple 6.16. Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Montrons que si $t \in \mathbb{Q}$ est un rationnel quelconque, alors f est t-périodique. En effet, prenons un $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) = 1$, et comme $x + t \in \mathbb{Q}$, on a aussi $f(x+t) = 1$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $f(x) = 0$, et comme $x + t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a aussi $f(x+t) = 0$. Dans tous les cas, $f(x+t) = f(x)$.

Ici aussi, comme il n'existe pas de "plus petit rationnel $t > 0$", f n'a pas de période. ◇

Remarquons qu'en général, *la somme de deux fonctions périodiques n'est pas forcément périodique* !

Exemple 6.17. $f(x) = \sin(2\pi x)$ est périodique, de période $T_f = 1$, et $g(x) = \sin(\sqrt{2}\pi x)$ est périodique, de période $T_g = \sqrt{2}$. Par contre, $f + g$ n'est pas périodique, puisque $\sqrt{2}$ étant irrationnel, aucun multiple de T_g ne coïncidera avec un multiple de T_f. ◇

On peut garantir que $f + g$ est aussi périodique, mais en imposant une condition particulière sur T_f et T_g :

Lemme 14. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique, de période T_f, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique, de période T_g. Alors $f + g$ et $f - g$ sont périodiques si $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$.*

Preuve: Si $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$, il existe deux entiers p, q tels que $\frac{T_f}{T_g} = \frac{p}{q}$. Ceci signifie que $qT_f = pT_g$. Ceci implique que si on définit $\tilde{t} = qT_f$, alors pour tout x,

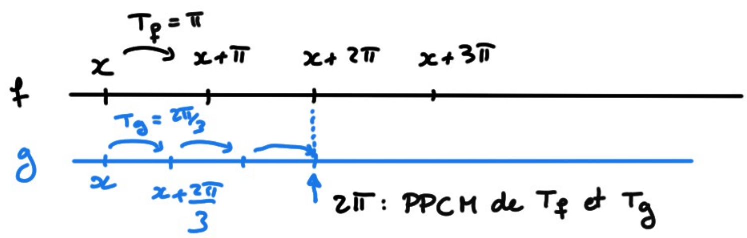
$$\begin{aligned}(f \pm g)(x + \tilde{t}) = f(x + \tilde{t}) \pm g(x + \tilde{t}) &= f(x + qT_f) \pm g(x + qT_f) \\ &= \underbrace{f(x + qT_f)}_{=f(x)} \pm \underbrace{g(x + pT_g)}_{=g(x)} \\ &= (f \pm g)(x)\,,\end{aligned}$$

ce qui implique que $f \pm g$ est périodique. □

Exemple 6.18. La fonction $f(x) = \sin^2(x)$ a pour période $T_f = \pi$, et $g(x) = \cos(3x)$ a pour période $T_g = \frac{2\pi}{3}$. Comme

$$\frac{T_f}{T_g} = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}\,,$$

on conclut par le lemme que $f + g$ et $f - g$ sont périodiques. Mais comment calculer les périodes de ces fonctions ?



En cherchant le plus petit multiple commun entre les périodes de f et g :

$$T_{f\pm g} = \mathrm{ppmc}(T_f, T_g) = 2\pi\,.$$

◇

Quiz 6.4.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vrai ou faux ?*

1) $\square$ *Si $f(0) = f(2\pi)$, alors f est périodique.*
2) $\square$ *Si $f(n) = f(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors f est périodique.*

Quiz 6.4.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. Vrai ou faux ?*

1) $\square$ *$f(x + 2k\pi) = f(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*
2) $\square$ *f est une combinaison linéaire finie de fonctions trigonométriques.*
3) $\square$ *f possède une infinité de minimas/maximas.*
4) $\square$ *Il existe un $T \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
5) $\square$ *Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \circ g$ est périodique.*
6) $\square$ *Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \circ f$ est périodique.*
7) $\square$ *Si g est aussi périodique, alors $f + g$ est périodique.*

6.5 Max/min, sup/inf de fonctions

6.5.1 Maximum, minimum

(ici, Video: `v_fonctions_extrema_intro.mp4`)

Remarque 6.19. Attention : dans la vidéo ci-dessus, préparée pour un autre cours, on mentionne la notion de *continuité*, qui n'apparaîtra que dans un chapitre ultérieur. $\diamond$

Dans un problème *d'optimisation*, il s'agit de savoir si une fonction possède, sur son domaine, des points où sa valeur est plus grande (ou plus petite) que partout ailleurs :

Définition 6.20. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que

- $\star$ f **possède un maximum (global)** si il existe $x^* \in D$ tel que
$$f(x) \leqslant f(x^*) \quad \forall x \in D\,.$$
On dit que **le maximum de f est réalisé/atteint en** x^*, et on écrit
$$\max_{x \in D} f(x) = f(x^*)\,.$$
- $\star$ f **possède un minimum (global)** si il existe $x_* \in D$ tel que
$$f(x) \geqslant f(x_*) \quad \forall x \in D\,.$$
On dit que **le minimum de f est réalisé/atteint en** x_*, et on écrit
$$\min_{x \in D} f(x) = f(x_*)\,.$$

Remarque 6.21. On parle de maximum/minimum *global* parce qu'on introduira plus loin la notion de maximum/minimum *local*. $\diamond$

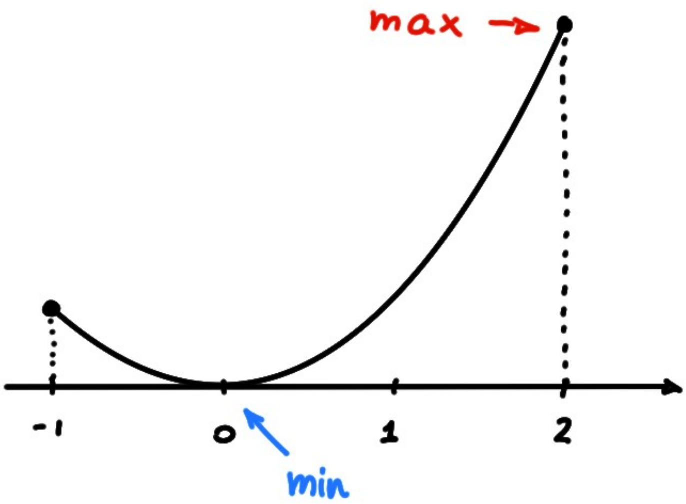
Informel 6.22. Attention : le point x^* (ou x_*), s'il existe, *doit être dans le domaine de la fonction* !

En général, l'existence d'un minimum et d'un maximum n'est pas garantie ; elle dépend de la fonction mais aussi de son domaine.

Exemple 6.23.

$$\begin{aligned} f : [-1, 2] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

atteint son minimum en $x_* = 0$, et son maximum en $x^* = 2$:



Mais si on modifie un peu son domaine, par exemple

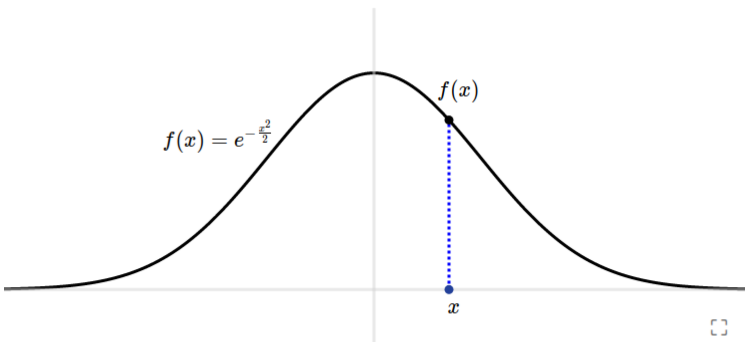
$$\begin{aligned} f : [-1, 2[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

alors cette fonction atteint aussi son minimum en $x_* = 0$, mais elle ne possède pas de maximum (maintenant, le point $x = 2$ ne fait plus partie du domaine !). $\diamond$

Exemple 6.24.

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

atteint son maximum en $x^* = 0$:



Or quel que soit $x \neq 0$, on peut toujours diminuer strictement la valeur de $e^{-x^2/2}$ en éloignant un peu x de l'origine. Donc g n'a pas de minimum. $\diamond$

Plus tard (**ici** (lien vers la section m_derivee_extremas_globaux_sur_a_b)), nous reviendrons sur la recherche des minima/maxima d'une fonction.

6.5.2 Minorants et majorants

Définition 6.25. $f : D \to \mathbb{R}$ est

- ⋆ **majorée** si il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) \leqslant M \ \forall x \in D$. On dit dans ce cas que M **majore** f.
- ⋆ **minorée** si il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) \geqslant m \ \forall x \in D$. On dit dans ce cas que m **minore** f.

Si f est à la fois majorée et minorée, elle est **bornée**.

Exemple 6.26. La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2}{x^2+1} \end{aligned}$$

est minorée par $m = 0$ puisque $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et majorée par $M = 1$ puisque

$$f(x) = \frac{x^2+0}{x^2+1} < \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

◇

Exemple 6.27. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ n'est pas majorée. Pour le vérifier, on doit montrer que f dépasse n'importe quel seuil en au moins un point. En effet, choisissons un seuil, disons $M = 1000$, et montrons que l'on peut trouver un $x \in D$ tel que $f(x) \geqslant 1000$. Comme la condition $f(x) \geqslant 1000$ est équivalente à $x^2 - 1000x + 1000 \geqslant 0$, et comme cette dernière a un discriminant $\Delta \geqslant 0$, elle possède donc au moins une solution (différente de 1). Donc il existe au moins un $x \in D$ tel que $f(x) \geqslant 1000$.

Mais on peut utiliser le même argument pour une valeur quelconque de M. En effet, la condition $f(x) \geqslant M$ est équivalente à $x^2 - Mx + M \geqslant 0$, dont le discriminant $\Delta = M^2 - 4M \geqslant 0$ dès que $M \geqslant 4$. Ceci montre bien que f n'est pas majorée. ◇

Une fois qu'une fonction est majorée (resp. minorée), on peut considérer le plus petit (resp. plus grand) majorant (resp. minorant).

Définition 6.28. Soit $f : D \to \mathbb{R}$.

- ⋆ Si f est majorée (sur D), la **borne supérieure de** f **sur** D est son plus petit majorant :

$$\sup_D f := \sup_{x \in D} f(x) = \sup\{f(x) \,:\, x \in D\} = \sup(\mathrm{Im}(f))\,.$$

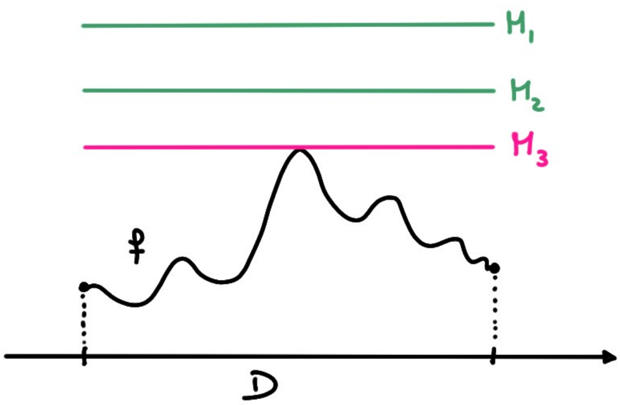
  Si f n'est pas majorée sur D, on pose $\sup_D f := +\infty$.

- ⋆ Si f est minorée sur D, la **borne inférieure de** f **sur** D est son plus grand minorant :

$$\inf_D f = \inf_{x \in D} f(x) = \inf\{f(x) \,:\, x \in D\} = \inf(\mathrm{Im}(f))\,.$$

  Si f n'est pas minorée sur D, on pose $\inf_D f := -\infty$.

Sur la figure ci-dessous, les nombres M_1, M_2 et M_3 sont tous des majorants pour f sur son domaine D. Le nombre M_3 étant le plus petit majorant (puisque tout nombre $M' < M_3$ ne majore plus f), c'est $\sup_D f$:



Remarque 6.29. ⋆ Si $f : D \to \mathbb{R}$ atteint son maximum en x^*, alors

$$\sup_{x\in D} f(x) = \max_{x\in D} f(x) = f(x^*)\,.$$

⋆ Si $f : D \to \mathbb{R}$ atteint son minimum en x_*, alors

$$\inf_{x\in D} f(x) = \min_{x\in D} f(x) = f(x_*)\,.$$

◇

Informel 6.30. Par les propriétés des réels, une fonction bornée possède *toujours* une borne supérieure et une borne inférieure ! Par contre, comme on sait, elle peut ne pas atteindre son maximum ou son minimum.

Exemple 6.31. La fonction

$$\begin{aligned} f :&]0,3[\to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 - x \end{aligned}$$

est majorée, car pour tout $x \in]0,3[$,

$$f(x) = x^2 - x \leqslant 3^2 - 0 = 9$$

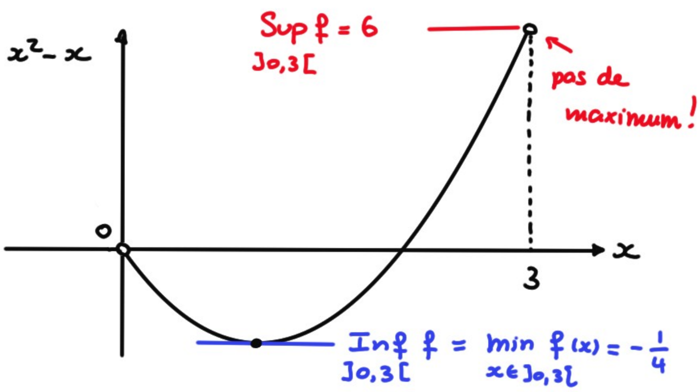
En fait, dans ce cas, ce majorant $M = 9$ n'est pas le plus petit, car

$$\sup_D f = 6\,.$$

Remarquons par contre qu'il n'existe aucun $x^* \in]0,3[$ tel que $f(x^*) = 6$, donc f n'a pas de maximum.
Remarquons ensuite que f est minorée car

$$f(x) = x^2 - x \geqslant 0^2 - 3 = -3\,.$$

Ici f atteint son minimum en $x_* = \frac{1}{2}$, $f(x_*) = -\frac{1}{4}$:



◇

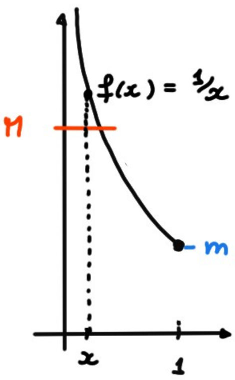
Exemple 6.32. La fonction

$$f :]0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

est minorée car pour tout $x \in]0,1]$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{1} = 1 = m\,.$$

Mais elle n'est pas majorée, car pour tout $M \geqslant 1$ il existe $x \in]0,1]$ tel que $f(x) > M$:



(On peut par exemple prendre $x = \frac{1}{2M}$, pour lequel $f(x) = 2M > M$.) On a donc

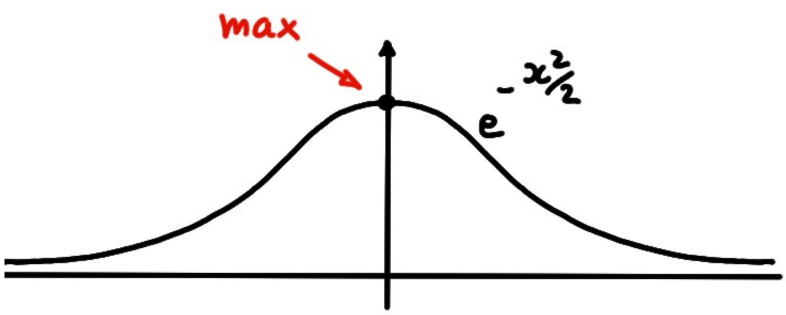
$$\sup_{]0,1]} f = +\infty\,.$$

Par contre,

$$\inf_{]0,1]} f = \min_{]0,1]} f = f(1) = 1\,.$$

◇

Exemple 6.33. Considérons encore $g(x) = e^{-x^2/2}$, sur $\mathbb{R}$.



On a vu que f atteint son maximum en $x^* = 0$

$$\sup_{\mathbb{R}} g = \max_{\mathbb{R}} g = g(0) = 1\,,$$

et on a vu qu'elle n'a pas de minimum. Pourtant, elle est minorée par 0 puisque $e^{-x^2/2} \geqslant 0$ pour tout x. Montrons que 0 est en fait la plus grand minorant. En effet, si on prend un $\varepsilon > 0$ quelconque fixé, montrons qu'il existe au moins un réel x tel que $0 \leqslant e^{-x^2/2} \leqslant \varepsilon$. En effet, on peut satisfaire cette condition en prenant $|x| > \sqrt{2|\log(\varepsilon)|}$. On conclut que

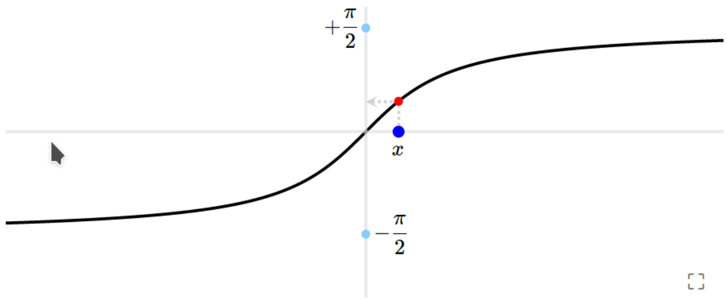
$$\inf_{\mathbb{R}} g = 0\,,$$

◇

Exemple 6.34. La fonction

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

ne possède ni minimum, ni maximum :



Malgré tout,

$$\sup_{\mathbb{R}} h = +\frac{\pi}{2}\,, \qquad \inf_{\mathbb{R}} h = -\frac{\pi}{2}\,.$$

◇

Lemme 15. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, et $A \subset D$.*

1) $\sup_A(-f) = -\inf_A f$
2) $\sup_A(f+g) \leqslant \sup_A f + \sup_A g$
3) *Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors* $\sup_A(\alpha f + \beta) = \alpha\big(\sup_A f\big) + \beta$
4) *Si $A \subset B \subset D$, alors $\sup_A f \leqslant \sup_B f$, et $\inf_A \geqslant \inf_B f$.*

Quiz 6.5.1. *(MAN 2021) Considérons la fonction $f : [1,4[\to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = (2-x)^3\,.$$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

1) ☐ *f n'atteint ni son minimum ni son maximum*
2) ☐ *f possède un extremum en $x_0 = 2$*
3) ☐ *f atteint son maximum mais pas son minimum*
4) ☐ *f atteint son minimum mais pas son maximum*

Quiz 6.5.2. *Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont majorées sur l'ensemble D donné ?*

1) ☐ $f(x) = \frac{1}{x}$ *sur* $D = [1, 10]$
2) ☐ $f(x) = \frac{1}{x}$ *sur* $D = [-1, 0[$
3) ☐ $f(x) = \frac{x}{|x|}$ *sur* $D =]-1, 0[\cup]0, 1[$
4) ☐ $f(x) = \frac{1}{2+x-x^2}$ *sur* $D = [0, 2[$
5) ☐ $f(x) = \sin(\frac{1}{2+x-x^2})$ *sur* $D = [0, 2[$
6) ☐ $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ *sur* $D =]0, \infty[$

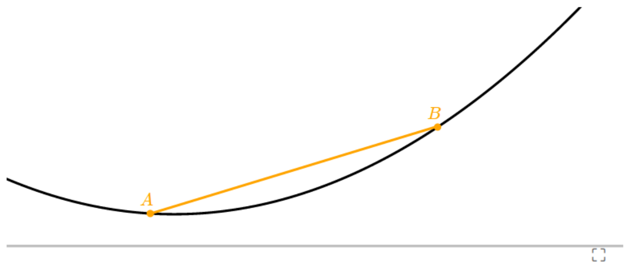
Quiz 6.5.3. *Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide, et f une fonction bornée sur D.*

1) $\square$ $\sup_D f$ *est la valeur maximale que prend $f(x)$ sur D.*
2) $\square$ *Si* $\sup_D f = \inf_D f$, *alors f est constante.*
3) $\square$ *Si* $\inf_D f = 0$, *alors il existe un $x \in D$ tel que $f(x) = 0$.*
4) $\square$ *Si* $\sup_D f = 1$, *alors il existe un $x \in D$ tel que $f(x) \geqslant \frac{\pi^{17}-e}{\pi^{17}}$.*
5) $\square$ *Si* $\sup_D f = s$, *alors il existe un $x \in D$ tel que $f(x) \geqslant s/2$.*
6) $\square$ *Si $D' \subset D$, alors* $\sup_{D'} f \leqslant \sup_D f$.
7) $\square$ *Si $D' \subset D$, alors* $\inf_{D'} f \geqslant \inf_D f$.
8) $\square$ *Pour toute constante $\lambda \in \mathbb{R}$,* $\sup_D(\lambda f) = \lambda \sup_D f$
9) $\square$ *Pour toute constante $\lambda \in \mathbb{R}$,* $\sup_D(f + \lambda) = (\sup_D f) + \lambda$

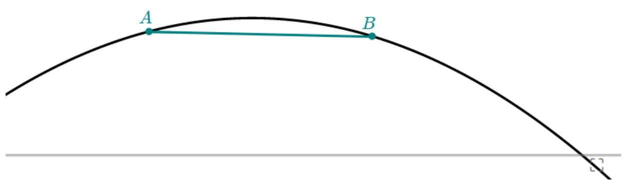
6.6 Convexité/concavité

La *convexité* est une propriété géométrique associée au graphe d'une fonction. Commençons par en donner une définition un peu informelle.

On dit qu'une fonction est **convexe** si tous les points situés sur le segment reliant deux points quelconques de son graphe sont *au-dessus* du graphe,



et on dit qu'elle est **concave** si tous les points situés sur le segment reliant deux points quelconques de son graphe sont *au-dessous* du graphe :



Remarque 6.35. f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. $\diamond$

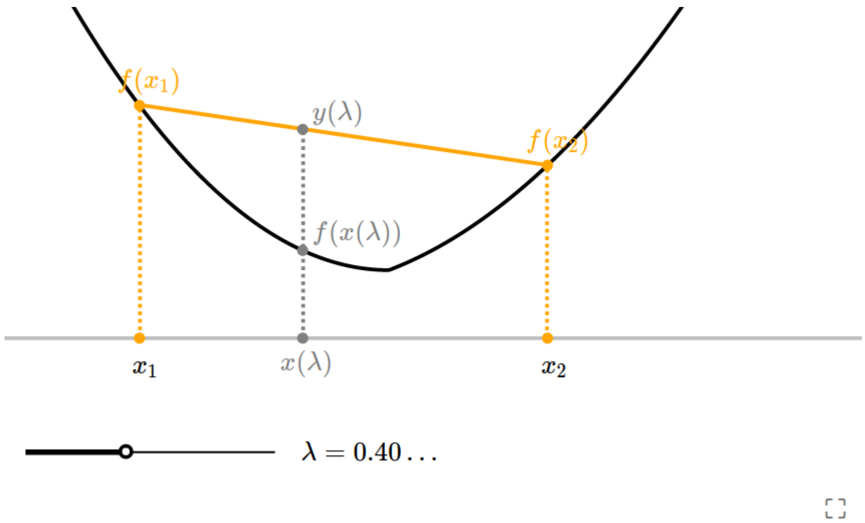
Pour définir analytiquement (plutôt que géométriquement) la convexité, il faut que nous décrivions précisément le segment reliant deux points du graphe.

Soit donc f une fonction donnée, et soient $x_1 < x_2$ deux réels. On peut paramétrer toutes les positions intermédiaires (sur l'axe réel) entre x_1 et x_2 à l'aide d'un paramètre $\lambda \in [0, 1]$, en définissant

$$x(\lambda) := x_1 + \lambda(x_2 - x_1) = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \,.$$

On a $x(0) = x_1$, $x(1) = x_2$, et toute autre valeur $0 < \lambda < 1$ représente un point intermédiaire : $x_1 < x(\lambda) < x_2$. Maintenant, le point sur le segment reliant $A = (x_1, f(x_1))$ à $B = (x_2, f(x_2))$, situé au-dessus de $x(\lambda)$, est à hauteur

$$y(\lambda) = f(x_1) + \lambda(f(x_2) - f(x_1)) = (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\,.$$



Le segment est donc entièrement au-dessus du graphe si et seulement si

$$f(x(\lambda)) \leqslant y(\lambda) \qquad \forall \lambda \in [0,1]\,,$$

et il est entièrement au-dessous du graphe si et seulement si

$$f(x(\lambda)) \geqslant y(\lambda) \qquad \forall \lambda \in [0,1]\,,$$

Ceci mène à la définition analytique de convexité/concavité :

Définition 6.36. Soit I un intervalle, borné ou pas, et $f : I \to \mathbb{R}$.

- ⋆ f est **convexe** si pour toute paire $x_1, x_2 \in I$,

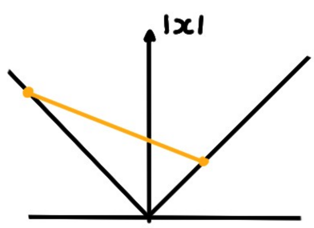
$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\,.$$

- ⋆ f est **concave** si $-f$ est convexe, c'est-à-dire si pour toute paire $x_1, x_2 \in I$,

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\,.$$

Exemple 6.37. $f(x) = |x|$ est convexe. En effet, fixons deux points quelconques $x_1 < x_2$. Alors pour tout $\lambda \in [0,1]$, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) &= \big|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big| \\ &\leqslant \big|(1-\lambda)x_1\big| + \big|\lambda x_2\big| \\ &= (1-\lambda)|x_1| + \lambda|x_2| \\ &= (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\,. \end{aligned}$$



◇

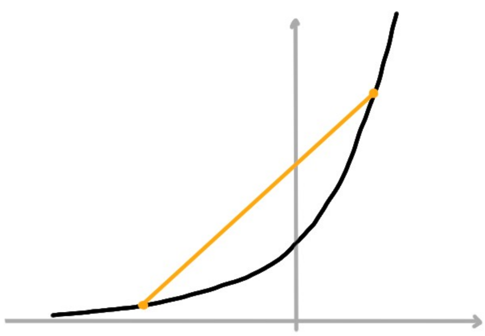
Exemple 6.38. $f(x) = x^2$ est convexe (sur tout $\mathbb{R}$). En effet,

$$\begin{aligned}
f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - (1-\lambda)f(x_1) - \lambda f(x_2) \\
&= \big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big)^2 - (1-\lambda)x_1^2 - \lambda x_2^2 \\
&= -\underbrace{\lambda(1-\lambda)}_{\geqslant 0}(x_1 - x_2)^2 \\
&\leqslant 0\,.
\end{aligned}$$

◇

La définition de convexité donnée ci-dessus traduit la propriété géométrique énoncée en début de section, mais elle peut être difficile à mettre en oeuvre, même dans des cas très simples.

Exemple 6.39. La connaissance du graphe de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ indique qu'elle est probablement convexe :



Mais montrer "à la main" que

$$e^{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2} \leqslant (1-\lambda)e^{x_1} + \lambda e^{x_2} \qquad \forall x_1 < x_2\,, \forall \lambda \in [0,1]$$

n'est pas simple. ◇

Il serait donc utile d'avoir un moyen plus direct d'obtenir la convexité. Nous y reviendrons après avoir les outils fournis par le calcul différentiel.

Quiz 6.6.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Vrai ou faux ?*

1) □ f *est soit convexe, soit concave.*
2) □ *Si*
$$f((1-t)a + tb) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b)$$
pour tout $t \in [0, 1]$, alors f est convexe.
3) □ *Si f n'est pas convexe, elle est concave.*
4) □ *Si f est convexe, $-f$ est concave.*
5) □ *Si f est convexe, et si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est aussi convexe, alors $f + g$ est convexe.*
6) □ *Si il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ et $t \in [0, 1]$ tels que*
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2)\,,$$
alors f est concave.
7) □ *Si il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ et $t \in [0, 1]$ tels que*
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2)\,,$$
alors f n'est pas convexe.
8) □ *Si f est convexe, alors pour tout $a \leqslant a' < b' \leqslant b$, $f : [a', b'] \to \mathbb{R}$ est aussi convexe.*
9) □ *Si f est à la fois convexe et concave, alors c'est une constante.*

Chapitre 7

Limites de fonctions

7.1 Introduction

Nous avons rencontré la notion de limite lorsque nous avons étudié les suites de réels.

Nous allons maintenant introduire diverses notions de limites, associées à une fonction réelle f d'une variable réelle x. Nous étudierons donc la dépendance

$$x \mapsto f(x)\,,$$

et ceci dans deux situations particulières :

- ⋆ Lorsque x est *au voisinage d'un point* $x_0 \in \mathbb{R}$, nous définirons d'abord la limite

  $$\lim_{x \to x_0} f(x)\,,$$

  ainsi que les limites latérales

  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x)\,, \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x)\,.$$

- ⋆ Lorsque x est *au voisinage de l'infini*, à savoir très grand, nous définirons les limites

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)\,.$$

  Ce deuxième cas sera essentiellement le même que pour les suites, $\lim_{n\to\infty} a_n$, et ne présentera aucune difficulté réellement nouvelle.

Comme les propriétés satisfaites par ces limites seront essentiellement les mêmes que pour les suites, nous ne donnerons pas toutes les preuves, qui pourront être faites en exercice.

7.2 Limite $x \to x_0$

Commençons par étudier les valeurs d'une fonction f proche d'un point x_0, avec la définition de base de la *limite en* x_0. Le point x_0 pourra être un point intérieur du domaine de la fonction, ou alors sur son bord.

Il y a trop de comportements possibles pour $f(x)$ lorsque x s'approche de x_0, donc dans notre analyse, on se concentrera sur les comportements classiques observés dans nombre de fonctions rencontrées en analyse, et qui sont les plus rencontrés dans le développement de la théorie des fonctions. En particulier, on donnera un sens aux termes suivants :

- ⋆ $f(x)$ *tend vers* $L \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x_0
- ⋆ $f(x)$ *tend vers l'infini lorsque* x *tend vers* x_0

7.2.1 Notion de voisinage

Informel 7.1. Pour définir la "limite de $f(x)$ en x_0", nous allons étudier les valeurs de $f(x)$ lorsque x devient *arbitrairement proche* de x_0. Et c'est la formulation rigoureuse de cette notion qui pose souvent des difficultés.

Pour parler des réels x proches de x_0, on utilisera la notion de *voisinage*.

Définition 7.2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- ⋆ L'ensemble $V =]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[$, où $\alpha > 0$, est appelé **voisinage épointé de** x_0.
- ⋆ Une fonction f est définie **au voisinage de** x_0 si il existe un voisinage épointé de x_0, V, tel que $f(x)$ est définie pour tout $x \in V$.

Exemple 7.3. Aucune des fonctions

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) = \log|x| \qquad f(x) = \sin(\tfrac{1}{x^2+x})$$

n'est définie en 0, mais toutes sont bien définies dans un voisinage épointé de 0. ◇

Par définition, un voisinage épointé de x_0 contient une infinité de points distincts de x_0. Mais surtout : quelle que soit la distance $\delta > 0$ qu'on choisit, aussi petite que l'on veut, il contient des points x dont la distance à x_0 est inférieure ou égale à δ :

$$0 < |x - x_0| \leqslant \delta\,.$$

7.2.2 Limite en un point

Un premier cas naturel à considérer est celui dans lequel les valeurs de $f(x)$ tendent à se rapprocher d'un nombre, que l'on notera généralement L, à mesure que x se rapproche de x_0.

Définition 7.4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie dans un voisinage épointé de x_0. On dit que f **tend vers** $L \in \mathbb{R}$ **lorsque** x **tend vers** x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$.
Le réel L sera appelé la **limite**, et on utilisera la notation :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,.}$$

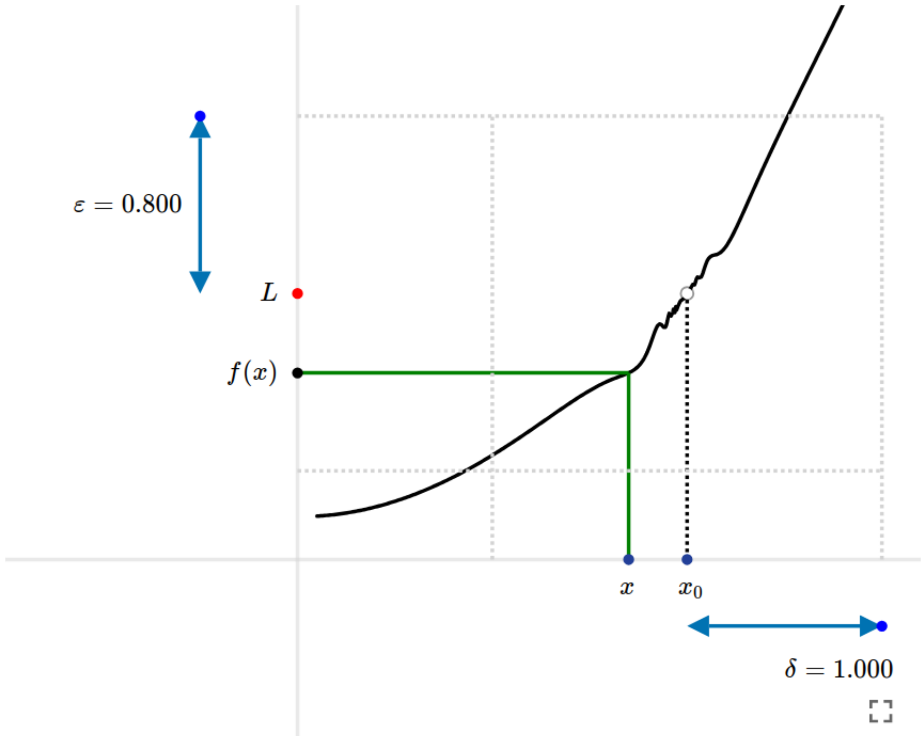
Remarque 7.5.

- ⋆ Dans cette définition, on peut prendre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et le nombre $\delta > 0$ doit en général être pris *en fonction de* ε.
- ⋆ Il est important de remarquer que l'étude de $\lim_{x \to x_0} f(x)$ est indépendante de la valeur que f prend en x_0. En fait, f n'a même pas besoin d'être définie en x_0 pour que sa limite existe !

◇

Sur l'animation ci-dessous, choisir quelques valeurs de $\varepsilon > 0$, et adapter $\delta > 0$ de façon à ce que

$$|f(x) - L| \leqslant \varepsilon \quad \text{dès que} \quad 0 < |x - x_0| \leqslant \delta\,.$$



Exemple 7.6. Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, telle que

$$f(x) = \frac{x-1}{2} \qquad \forall x \neq 2\,.$$

Étudions cette fonction dans un voisinage épointé de $x_0 = 2$. Cela signifie que l'on ne s'intéresse qu'aux valeurs de $f(x)$ pour des réels x proches de 2, différents de 2.

À première vue, si x est proche de 2 alors $x - 1$ est proche de 1, et donc $f(x)$ devrait être proche de $\frac{1}{2}$. On peut donc conjecturer que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \tfrac{1}{2}\,.$$

Pour commencer, étudions la différence

$$|f(x) - \tfrac{1}{2}| = \left|\frac{x-1}{2} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-2}{2}\right| = \tfrac{1}{2}|x-2|\,.$$

Cette expression montre de façon assez transparente que $f(x)$ est proche de $\frac{1}{2}$ lorsque x est proche de 2, et permet maintenant d'implémenter la définition de limite.

Fixons $\varepsilon > 0$. Par l'identité écrite plus haut, on a

$$|f(x) - \tfrac{1}{2}| \leqslant \varepsilon$$

si et seulement si

$$\tfrac{1}{2}|x-2| \leqslant \varepsilon\,,$$

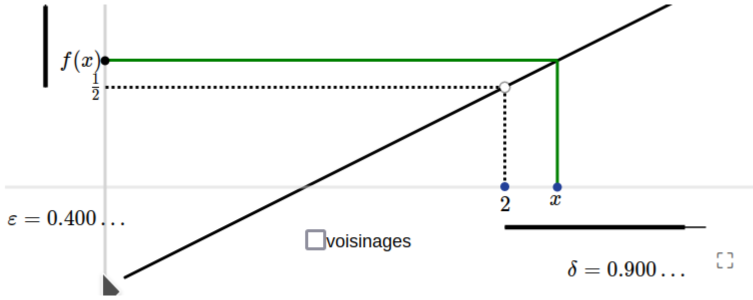
c'est à dire

$$|x-2| \leqslant 2\varepsilon\,.$$

Ainsi, si on définit $\delta := 2\varepsilon$, on a bien $|f(x) - \frac{1}{2}| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |x-2| \leqslant \delta$. Ceci montre ce qu'on voulait :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \tfrac{1}{2}\,.$$

Sur l'animation ci-dessous, choisir la valeur de ε, et voir comment adapter δ pour garantir que tout $x \in [2-\delta, 2+\delta]$ ait son image $f(x) \in [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]$:



On observe que $\delta = 2\varepsilon$ est le "meilleur" δ possible .

Pour un autre exemple élémentaire traité en détails, cliquer **ici (blackpenredpen)** (lien web). $\diamond$

Informel 7.7. La fonction de l'exemple précédent a cela de particulier qu'elle a permis d'écrire une proportionnalité exacte entre $|f(x) - \frac{1}{2}|$ et $|x-2|$,

$$|f(x) - \tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2}|x-2|\,,$$

ce qui a permis de facilement trouver un δ en fonction de ε.
Il n'y a que les fonctions du type $f(x) = ax + b$ pour lesquelles cette proportionnalité est explicite, c'est-à-dire pour lesquelles on peut toujours écrire quelque chose comme (pour un L bien choisi)

$$|f(x) - L| = C|x - x_0|\,,$$

où C est une constante qui ne dépend pas de x.

Si on ne peut pas faire de même dans un cas général, on pourra quand-même essayer de majorer la différence $|f(x) - L|$ comme suit :

$$|f(x) - L| \leqslant C|x - x_0|\,,$$

ce qui permet également de trouver un δ en fonction de ε.

Exemple 7.8. Considérons

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{3}{2x+5} & \text{si } x \neq 2\,, \\ \sqrt{2} & \text{si } x = 2\,, \end{cases}$$

et montrons que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{3}\,.$$

Commençons par écrire la différence. Lorsque $x \neq 2$,

$$|f(x) - \tfrac{1}{3}| = \left|\frac{3}{2x+5} - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}\frac{|x-2|}{|2x+5|}\,.$$

De par la présence de "$|x-2|$" au numérateur, cette expression exprime bien que $|f(x) - \frac{1}{3}|$ sera proche de zéro lorsque x sera proche de 2. Mais pour rendre l'argument rigoureux il faut d'abord faire quelque chose pour ne plus avoir de "x" au dénominateur de la fraction. Nous allons donc travailler pour *minorer* le dénominateur par une quantité strictement positive, qui ne dépend pas de x.

Si on suppose par exemple que x est à distance au plus 1 de 2, $|x-2| \leqslant 1$ (c'est-à-dire $-1 \leqslant x-2 \leqslant 1$), alors on peut écrire que

$$2x + 5 = 2(x - 2 + 2) + 5 = 2(x-2) + 9 \geqslant 2(-1) + 9 = 7\,,$$

qui implique en particulier que

$$|f(x) - \tfrac{1}{3}| = \frac{2}{3}\frac{|x-2|}{2x+5} \leqslant \frac{2}{3}\frac{|x-2|}{7} = \frac{2}{21}|x-2|\,.$$

Dorénavant, nous supposerons donc que $|x-2| \leqslant 1$. Maintenant, fixons un $\varepsilon > 0$. L'inégalité que nous avons obtenue au-dessus dit que pour rendre $|f(x) - \frac{1}{3}|$ plus petit que ε, il suffit de d'abord rendre $\frac{2}{21}|x-2|$ plus petit que ε. Or

$$\frac{2}{21}|x-2| \leqslant \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x-2| \leqslant \frac{21}{2}\varepsilon\,.$$

Ainsi, si on définit

$$\delta := \min\Big\{\frac{21}{2}\varepsilon, 1\Big\}\,,$$

alors $0 < |x-2| \leqslant \delta$ implique $|f(x) - \frac{1}{3}| \leqslant \varepsilon$. ◇

Exemple 7.9. Considérons

$$f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}\,,$$

qui est bien définie partout, sauf en $x = 0$. Montrons que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0\,.$$

Fixons donc un $\varepsilon > 0$, et montrons que l'on peut trouver un $\delta > 0$ tel que

$$|e^{-\frac{1}{x^2}}| \leqslant \varepsilon \qquad \forall \quad 0 < |x| \leqslant \delta\,.$$

Pour cela, on remarque d'abord que, l'exponentielle étant toujours strictement positive, $|e^{-\frac{1}{x^2}}| = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Or on peut résoudre l'inégalité $e^{-\frac{1}{x^2}} \leqslant \varepsilon$ explicitement. D'abord, en prenant le $\log(\cdot)$ (qui est une fonction croissante) des deux côtés de l'inégalité, et en changeant le sens de l'inégalité :

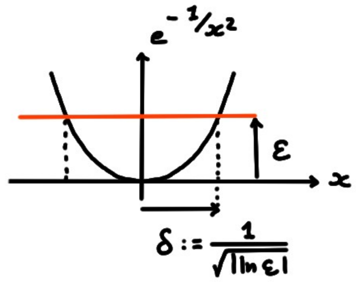
$$\frac{1}{x^2} \geqslant -\log(\varepsilon)\,.$$

Cette dernière est toujours vraie si $\varepsilon \geqslant 1$; dans ce cas on peut donc prendre n'importe quel δ, par exemple $\delta = 2$. Ensuite, considérons le cas où $0 < \varepsilon < 1$. Dans ce cas, $\log(\varepsilon) < 0$, et donc $-\log(\varepsilon) = |\log(\varepsilon)|$. On a donc montré que

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{si et seulement si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{|\log(\varepsilon)|}}\,.$$

On peut donc conclure en prenant

$$\delta := \frac{1}{\sqrt{|\log(\varepsilon)|}}\,.$$



On voit bien, par ce calcul, que plus $\varepsilon > 0$ est choisi petit, plus x doit être pris proche de 0 pour que $|f(x)| \leqslant \varepsilon$. ◇

7.2.3 Premières propriétés de la limite

Lemme 16. *Si la limite existe, elle est unique.*

Preuve: (La preuve suit exactement ce qu'on a fait pour les suites !)

Supposons, par l'absurde, que f tende vers deux limites différentes, $L_1 \neq L_2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $L_1 < L_2$. Définissons

$$\varepsilon := \frac{L_2 - L_1}{3},$$

qui est strictement positif par hypothèse. Aussi, $L_2 - L_1 > \varepsilon$.

- ⋆ Par définition de L_1, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $|f(x) - L_1| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta_1$.
- ⋆ Par définition de L_2, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $|f(x) - L_2| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta_2$.

Définissons maintenant

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Considérons alors un x tel que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. Comme $\delta \leqslant \delta_1$, on a que $|f(x) - L_1| \leqslant \varepsilon$. Et, comme $\delta \leqslant \delta_2$, on a que $|f(x) - L_2| \leqslant \varepsilon$. On a donc, par l'inégalité triangulaire, que

$$\begin{aligned}|L_1 - L_2| &= |(L_1 - f(x)) - (L_2 - f(x))| \\ &\leqslant |L_1 - f(x)| + |L_2 - f(x)| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}|L_1 - L_2|,\end{aligned}$$

ce qui est absurde □

Le résultat suivant offre une caractérisation alternative de la limite en un point, en établissant un lien avec la notion de limite introduite précédemment pour le suites de réels. (En fait, certains textes/enseignants utilisent cette caractérisation pour *définir* la limite d'une fonction en un point.)

Lemme 17. *(Critère d'existence via les suites) Soit f définie au voisinage de x_0. Alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si et seulement si pour toute suite $(a_n)_n$ satisfaisant $a_n \neq x_0$ pour tout n et $a_n \to x_0$ lorsque $n \to \infty$, on a que

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = L.$$

Preuve: $\Rightarrow$: Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Prenons une suite $(a_n)_n$ telle que $a_n \neq x_0$ pour tout n, et telle que $a_n \to x_0$. Fixons $\varepsilon > 0$. Par la définition de limite, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. Puisque $a_n \to x_0$, il existe un entier N tel que $|a_n - x_0| \leqslant \delta$, et donc $|f(a_n) - L| \leqslant \varepsilon$, ceci pour tout $n \geqslant N$. Ceci montre que $f(a_n) \to L$.

$\Leftarrow$: Supposons maintenant que $f(a_n) \to L$ pour toute suite $a_n \to x_0$. Par l'absurde, supposons que $f(x)$ ne tend pas vers L lorsque x tend vers x_0. Cela signifie qu'il existe $\varepsilon_* > 0$ pour lequel il n'existe aucun $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon_*$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. Considérons alors la suite $\delta_n = \frac{1}{n}$ et pour tout n, considérons un x_n tel que $0 < |x_n - x_0| \leqslant \delta_n$ et $|f(x_n) - L| > \varepsilon_*$. On a donc une suite (x_n) telle que $x_n \to x_0$, mais pour laquelle $f(x_n)$ ne tend pas vers L, une contradiction. □

Ce critère est en général utilisé pour montrer qu'une fonction f *n'a pas de limite* lorsque $x \to x_0$. Pour ce faire, on pourra soit trouver une suite $x_n \to x_0$ pour laquelle $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ n'existe pas, ou alors trouver deux suites $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ telles que les suites $f(x_n)$ et $f(y_n)$ possèdent des limites différentes lorsque $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(y_n)$$

Exemple 7.10. Montrons que la fonction $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite lorsque $x \to 0$. Pour ce faire, considérons deux suites qui tendent vers zéro.

⋆ Pour la première, prenons $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, pour laquelle

$$f(x_n) = \sin(\tfrac{1}{x_n}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 \qquad \forall n$$

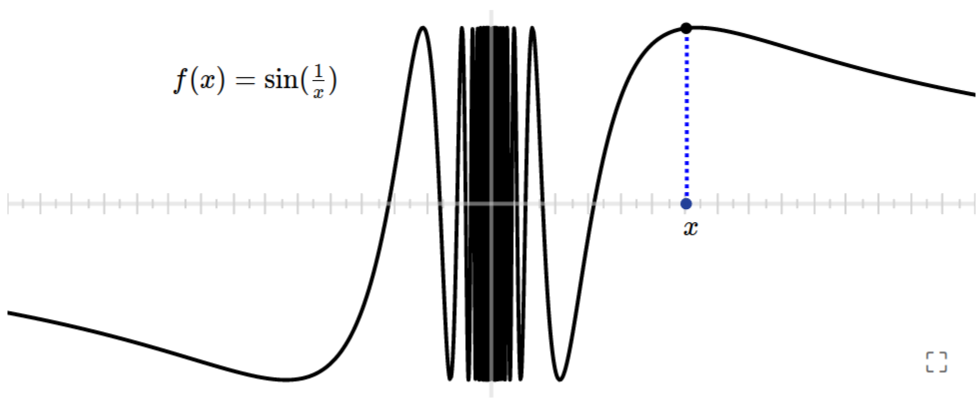
⋆ Pour la deuxième, prenons $y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}$, pour laquelle

$$f(y_n) = \sin(\tfrac{1}{y_n}) = \sin(\tfrac{3\pi}{2} + 2\pi n) = -1 \qquad \forall n$$

On a donc $x_n \to 0$ et $y_n \to 0$, mais

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)\,.$$

Le théorème ci-dessus implique donc que la limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas. ◇



Quiz 7.2.1. *Soit f une fonction définie dans un voisinage épointé de x_0, et telle que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. Alors*

1) ☐ $f(x_0) = L$

2) ☐ *il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = L$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \varepsilon$*

3) ☐ *$f(x)$ est différent de L pour tout x suffisamment proche de x_0*

4) ☐ *il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ implique $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$*

5) ☐ *il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ implique $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$*

6) ☐ *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ dès que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$*

7) ☐ *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x - x_0| \leqslant \varepsilon$ dès que $|f(x) - L| \leqslant \delta$*

Quiz 7.2.2. *Soit f une fonction définie dans un voisinage épointé de x_0, telle que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe. Vrai ou faux ?*

1) ☐ *$f(x_0)$ existe*

2) ☐ *Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ existe.*

3) ☐ *Il existe $\delta > 0$ tel que $\sup_{x\in I} |f(x)| < \infty$, où*

$$I =]x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \delta[\,.$$

4) ☐ $\lim_{n\to\infty} f(\frac{nx_0+1}{n+2})$ *existe.*

7.3 Le théorème des deux gendarmes

Le résultat suivant est l'analogue de celui vu précédemment pour les suites ; il propose de calculer une limite $x \to x_0$ en comparant $f(x)$, proche de x_0, à deux fonctions plus simples dont on sait calculer la limite. On formule le résultat pour la limite $x \to x_0$, mais il peut aussi se formuler pour les limites latérales (section suivante).

Théorème 7.11. *(Théorème des deux gendarmes) Soit f définie sur un voisinage V épointé de x_0. Soient g, h, également définies sur V, telles que*

1) $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pour tout $x \in V$,

2) $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$.

Alors la limite de f lorsque x tend vers x_0 existe et vaut L :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L\,.$$

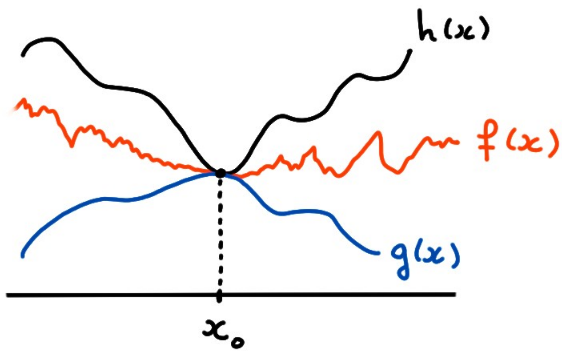
Preuve: Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$, il existe un $\delta > 0$ tel que $|g(x) - L| \leqslant \varepsilon$ et $|h(x) - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. Ceci implique que si $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$, alors

$$f(x) - L \leqslant h(x) - L \leqslant |h(x) - L| \leqslant \varepsilon\,,$$

mais aussi

$$f(x) - L \geqslant g(x) - L \geqslant -|g(x) - L| \geqslant -\varepsilon\,.$$

Et donc $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$. □



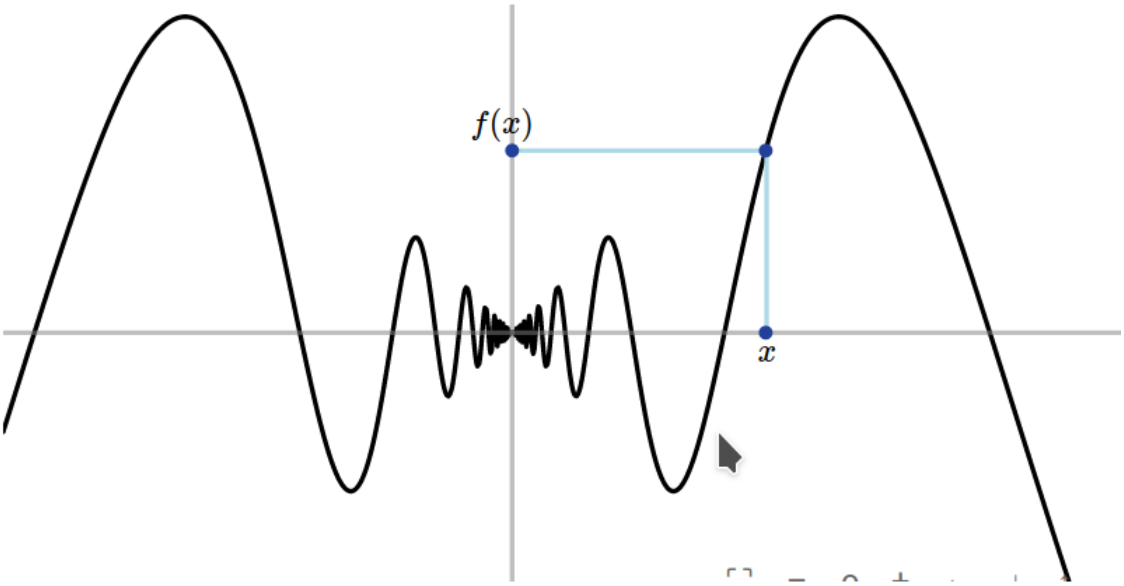
Exemple 7.12. Considérons la fonction

$$f(x) = |x| \sin\left(\frac{1}{\sqrt{5|x|}}\right)\,,$$

bien définie dans un voisinage épointé de $x_0 = 0$. Pour calculer sa limite lorsque $x \to 0$, on peut remarquer que $-1 \leqslant \sin(\cdots) \leqslant +1$, et donc pour tout $x \neq 0$,

$$\underbrace{-|x|}_{=g(x)} \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{|x|}_{=h(x)}$$

Comme $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$, le théorème des deux gendarmes implique que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. ◇



Quiz 7.3.1. *Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de x_0. Quelles affirmations sont toujours vraies ?*

1) □ *Si $f(x) \leqslant g(x)$ et $f(x) \leqslant h(x)$ pour tout x dans un voisinage épointé de x_0, et si $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.*
2) □ *Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ pour tout x dans un voisinage épointé de x_0, et si $\lim_{x\to x_0} g(x)$ et $\lim_{x\to x_0} h(x)$ existent, alors $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe.*
3) □ *Si $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pour tout x dans un voisinage épointé de x_0, si $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$ et que $\lim_{x\to x_0} g(x)$ n'existe pas, alors $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.*

7.4 Limites latérales $x \to x_0^{\pm}$

On parle alors de **limite latérale** si les valeurs d'une fonction tendent vers une valeur lorsqu'on s'approche d'un point x_0 en maintenant le signe de $x - x_0$ constant :

Définition 7.13. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

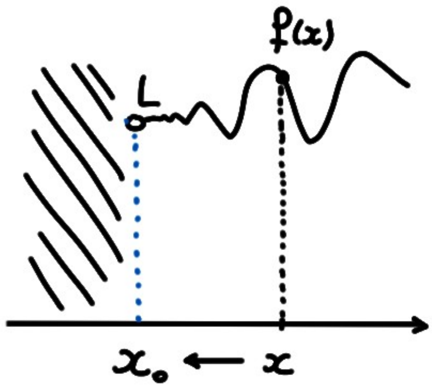
⋆ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0, x_0 + \alpha[$ ($\alpha > 0$). On dit que f **tend vers** $L \in \mathbb{R}$ **lorsque** x **tend vers** x_0 **par la droite** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < x - x_0 \leqslant \delta$, c'est-à-dire $x_0 < x \leqslant x_0 + \delta$. On notera :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L\,.}$$

⋆ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha, x_0[$ ($\alpha > 0$). On dit que f **tend vers** $L \in \mathbb{R}$ **lorsque** x **tend vers** x_0 **par la gauche** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $-\delta \leqslant x - x_0 < 0$, c'est-à-dire $x_0 - \delta \leqslant x < x_0$. On notera :

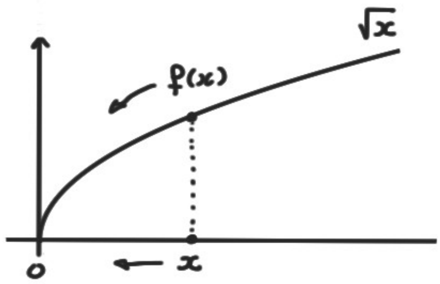
$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L\,.}$$

Donc une fonction peut par exemple posséder une limite latérale à droite en x_0, sans être du tout définie à gauche de x_0 :



Exemple 7.14. Par exemple, $f(x) = \sqrt{x}$ est définie seulement sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, et

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0\,.$$



En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f(x)| = \sqrt{x} \leqslant \varepsilon$ si et seulement si $x \leqslant \varepsilon^2$, et donc on peut prendre $\delta := \varepsilon^2$. ◇

Mais une fonction peut être définie de part et d'autre de x_0, et n'avoir qu'une seule limite latérale :

Exemple 7.15. Considérons, sur $\mathbb{R}^*$, la fonction

$$f(x) := \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0\,, \\ \pi & \text{si } x = 0\,, \\ \sin(1/x) & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

Alors f n'a pas de limite à droite en $x_0 = 0$, comme on sait, mais

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1\,.$$

◇

Intuitivement, si les limites latérales en un point existent et sont égales, alors la vraie limite en ce point existe et prend la même valeur :

Théorème 7.16. *Soit f définie dans un voisinage épointé de x_0. Les deux affirmations ci-dessous sont équivalentes :*

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

2) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

Preuve:

1) Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. Or $0 < x - x_0 \leqslant \delta$ et $-\delta \leqslant x - x_0 < 0$ impliquent évidemment $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. Et donc $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

2) Maintenant, supposons que $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$, et fixons $\varepsilon > 0$. On a d'une part l'existence d'un $\delta_- > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $-\delta_- \leqslant x - x_0 < 0$, et d'autre part l'existence d'un $\delta_+ > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < x - x_0 \leqslant \delta_+$. En prenant $\delta := \min\{\delta_-, \delta_+\}$, on garantit que si $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$, alors $-\delta_- \leqslant x - x_0 < 0$ et $0 < x - x_0 \leqslant \delta_+$, et donc dans tous les cas, $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$.

□

Il existe naturellement une version latérale du Théorème des deux gendarmes, ou du théorème sur l'équivalence avec les limites par des sous-suites, dans le cas des limites latérales.

Exemple 7.17. Considérons

$$f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor ,$$

qui est bien définie en tout $x \neq 0$. Pour calculer sa limite lorsque $x \to 0$, commençons par rappeler que par la définition de valeur entière,

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}, \qquad \forall x \neq 0 .$$

On utilise cette double inégalité pour étudier les limites latérales en zéro :

⋆ Si on la multiplie des deux côtés par $x > 0$,

$$\underbrace{x\left(\frac{1}{x} - 1\right)}_{=1-x} < f(x) \leqslant \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1}, \qquad \forall x > 0 .$$

Puisque $\lim_{x\to 0^+}(1 - x) = 1$, le Théorème des deux gendarmes (en version "latérale") implique que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 .$$

⋆ Si on la multiplie des deux côtés par $x < 0$,

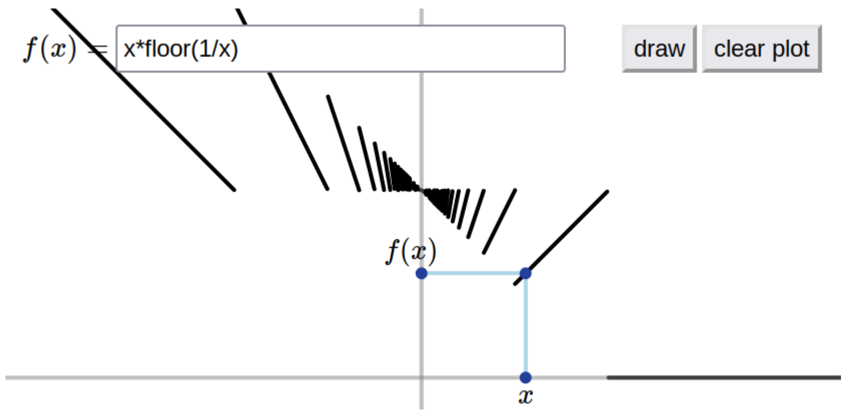
$$\underbrace{x\left(\frac{1}{x} - 1\right)}_{=1-x} > f(x) \geqslant \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1}, \qquad \forall x < 0 .$$

Puisque $\lim_{x\to 0^-}(1 - x) = 1$, le Théorème des deux gendarmes (en version "latérale") implique que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 .$$

Puisque les limites larérales existent et sont égales,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 .$$



◇

Le théorème précédent est aussi utile pour montrer qu'une limite $x \to x_0$ n'existe *pas*. Pour ce faire, on pourra

- ⋆ montrer qu'une des limites latérales, $x \to x_0^+$ ou $x \to x_0^-$, n'existe pas, ou
- ⋆ montrer que les limites latérales $x \to x_0^+$ et $x \to x_0^-$, existent mais ont des valeurs différentes.

Exemple 7.18. Considérons

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}\,,$$

et montrons que la limite $\lim_{x \to 1} f(x)$ n'existe pas.

D'abord, remarquons que $|x^2 - 1| = |x - 1| \cdot |x + 1|$. Ensuite, si x est proche de 1, alors $|x + 1| = x + 1$, mais

$$|x - 1| = \begin{cases} +(x-1) & \text{si } x > 1\,, \\ -(x-1) & \text{si } x < 1\,. \end{cases}$$

On peut donc facilement calculer les limites latérales :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} -(x+1) = -2\,,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2\,,$$

Comme les limites latérales existent mais sont inégales, on conclut que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque $x \to 1$. ◇

Quiz 7.4.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Si $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existent, alors $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe.*
2) ☐ *Si f est impaire et si $\lim_{x \to 0^+} f(x) = L$, alors $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -L$.*
3) ☐ *Si f est paire, alors $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ existe et est égale à $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.*
4) ☐ *Si $\lim_{x \to 0^+} f(x) = L$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -L$, alors f est impaire.*

7.5 Propriétés de la limite

Nous avons vu pour l'instant trois notions de limites en un point x_0 :

$$\lim_{x \to x_0}\,, \qquad \lim_{x \to x_0^+}\,, \qquad \lim_{x \to x_0^-}\,.$$

Or ces limites obéissent à des propriétés standards qui sont semblables à celles des suites. Plutôt que de les répéter séparément pour chaque notion, nous les énonçons en une seule fois. Dans la proposition ci-dessous, "$\lim$" représente une des limites ci-dessus.

Proposition 7. *Soient f, g telles que $\lim f$ et $\lim g$ existent. Alors :*

1) $\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g$
2) $\lim(f \cdot g) = (\lim f) \cdot (\lim g)$
3) *si* $\lim g \neq 0$, *alors* $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$
4) *si* $f(x) \leqslant g(x)$ *dans un voisinage de* x_0, *alors* $\lim f \leqslant \lim g$

Preuve: (Suivre exactement les mêmes pas que dans la preuve des mêmes propriétés pour les suites.) □

Les propriétés ci-dessus permettent de calculer des limites nouvelles à partir de limites déjà connues, en évitant de devoir passer à chaque fois par la définition, "à la ε-δ".

Exemple 7.19. Considérons un polynôme

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,.$$

Par les propriétés 1 et 2,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \lim_{x\to x_0} a_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \lim_{x\to x_0} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k \\
&= P(x_0)
\end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière ligne, on a encore utilisé la propriété 2, pour chaque k, comme suit. Puisque $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} x^k &= \lim_{x\to x_0} \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{k \text{ fois}} \\
&= \underbrace{\big(\lim_{x\to x_0} x\big) \cdot \big(\lim_{x\to x_0} x\big) \cdots \big(\lim_{x\to x_0} x\big)}_{k \text{ fois}} \\
&= \underbrace{x_0 \cdot x_0 \cdots x_0}_{k \text{ fois}} = {x_0}^k \,.
\end{aligned}$$

◇

7.6 Quelques indéterminations "$\frac{0}{0}$"

Les limites les plus importantes (et les plus intéressantes aussi) sont les **formes indéterminées**, celles de la forme "$\frac{0}{0}$", c'est-à-dire des limites de quotients de fonctions définies dans un voisinage de x_0,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\,, \qquad \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}\,, \qquad \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

où f et g tendent toutes les deux vers zéro.

Dans cette section on rappelle quelques méthodes classiques utiles pour lever ce genre d'indétermination, en les illustrant sur des exemples standards. Il est clair que les techniques s'adaptent pour les trois types de limites.

7.6.1 Polynômes et factorisation

Exemple 7.20. Considérons une limite d'un quotient de deux polynômes :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{P(x)}{M(x)}$$

Par une propriété vue plus haut,

$$\lim_{x\to 1}P(x)=P(1)=0,\qquad \lim_{x\to 1}M(x)=M(1)=0\,,$$

et donc ce quotient mène à une indétermination de la forme "$\frac{0}{0}$". Mais comme on sait, le fait que les $P(1)=0$ et $M(1)=0$ signifie que ces polynômes peuvent se factoriser par $(x-1)$. En effectuant deux divisions, on obtient

$$\begin{aligned}P(x)=x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)\,,\\ M(x)=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)\,,\end{aligned}$$

ce qui implique que le quotient considéré est en fait

$$\frac{P(x)}{M(x)}=\frac{\cancel{(x-1)}(x^2-x-6)}{\cancel{(x-1)}(x+3)}=\frac{x^2-x-6}{x+3}=\frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{M}(x)}$$

Et donc, puisque $\tilde{P}(1)=-6$ et $\tilde{M}(1)=4\neq 0$, la limite à calculer n'est plus indéterminée :

$$\lim_{x\to 1}\frac{P(x)}{M(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{M}(x)}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}\,.$$

◇

7.6.2 La méthode du conjugué

La méthode du conjugué, que nous avons utilisée souvent dans l'étude des suites et des séries, est aussi utile pour les limites de fonctions.

Exemple 7.21. Considérons la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\,,$$

dans laquelle le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers zéro lorsque $x\to 0$. En multipliant et divisant par le conjugué de la racine qui apparaît au numérateur,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}&=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\\ &=\frac{(\sqrt{1+x})^2-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)}\\ &=\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}\\ &=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}\,.$$

◇

Remarquons que parfois, le conjugué est utile dans des limites qui n'impliquent pas forcément des racines carrées (voir plus bas).

7.6.3 Limites de fonctions trigonométriques

Exemple 7.22. Montrons que

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1}$$

D'abord, puisque $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ (définie sur $\mathbb{R}^*$) est paire , il suffit de montrer que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}=1\,.$$

Mais, par l'équivalence via les suites, cette dernière est équivalente à la validité, pour toute suite $x_n > 0$, $x_n \to 0$, de

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x_n)}{x_n}=1\,.$$

Or cette propriété a déjà été démontrée dans le chapitre sur les suites. ◇

Exemple 7.23. Montrons que

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}\,.}$$

En multipliant et divisant par le conjugué de la différence $1-\cos(x)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{\sin(x)}{x}\Big)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\\
&= 1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

◇

7.6.4 Limites de fonctions exp/log

Informel 7.24. Attention : Nous allons donner les valeurs de quelques limites impliquant des exponentielles et des logarithmes. Or comme dit au tout début de ce cours, les fonctions e^x et $\log(x)$, qui sont réciproques l'une de l'autre, ainsi que leurs propriétés, sont supposées connues : nous ne les avons pas introduites rigoureusement. Donc les preuves données ci-dessous ne sont pas entièrement rigoureuses ; des résultats que nous présenterons plus tard viendront compléter cette analyse.

Exemple 7.25. Montrons que

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1\,.}$$

Pour ce faire, nous allons calculer la limite le long de la suite $x_n = \frac{1}{n}$, qui est > 0, et $x_n \to 0$. Pour un n fixé, on peut écrire

$$\frac{\log(1+x_n)}{x_n}=n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Puisque $(1+\frac{1}{n})^n \to e$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+x_n)}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\log(e)=1\,.$$

◇

Exemple 7.26. Montrons que

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\,.}$$

Posons pour un instant $y := e^x - 1$, c'est-à-dire $x = \log(1+y)$. Lorsque $x \to 0$, on a aussi $y \to 0$, donc la limite devient

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(1+y)}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}}=1\,.$$

◇

7.7 Limites infinies en un point

(ici, Video: v_fonctions_limite_infinie_x0_MAN.mp4)

Si aucune des limites

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,,\qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x)\,,\qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

n'existe au sens des définitions précédentes (c'est-à-dire que $f(x)$ tend vers un $L \in \mathbb{R}$ bien défini), alors un des scénarios possibles est que les valeurs de $f(x)$ deviennent arbitrairement grandes à l'approche de x_0, avec un signe bien défini.

Définition 7.27. Soit f définie dans un voisinage de x_0.

Limite infinie lorsque $x \to x_0$:

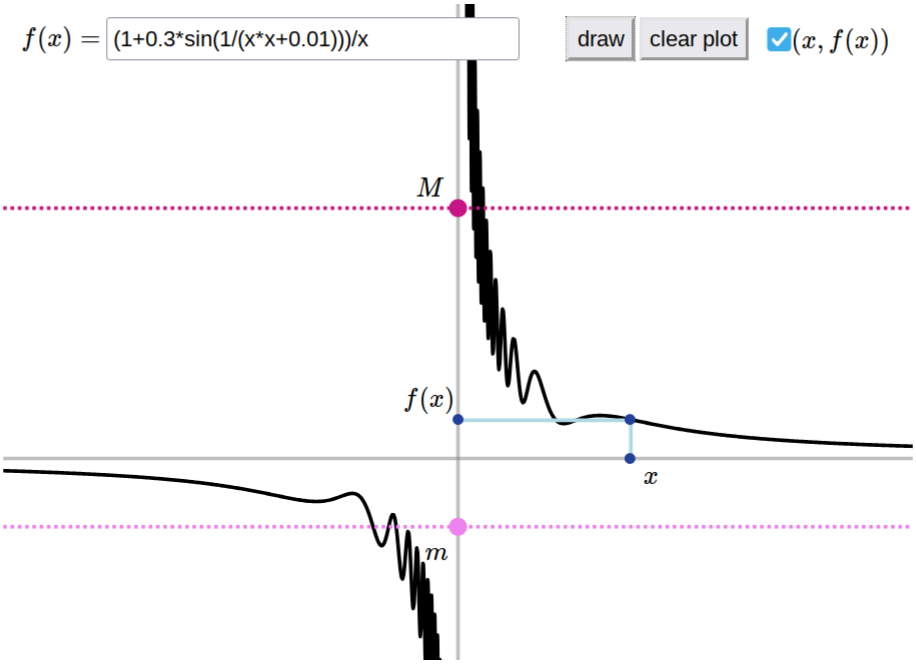
- ⋆ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geqslant M$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$.
- ⋆ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si et seulement si pour tout $m < 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \leqslant m$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$

Limite infinie lorsque $x \to x_0^+$:

- ⋆ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geqslant M$ dès que $x_0 < x \leqslant x_0 + \delta$.
- ⋆ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ si et seulement si pour tout $m < 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \leqslant m$ dès que $x_0 < x \leqslant x_0 + \delta$.

Limite infinie lorsque $x \to x_0^-$:

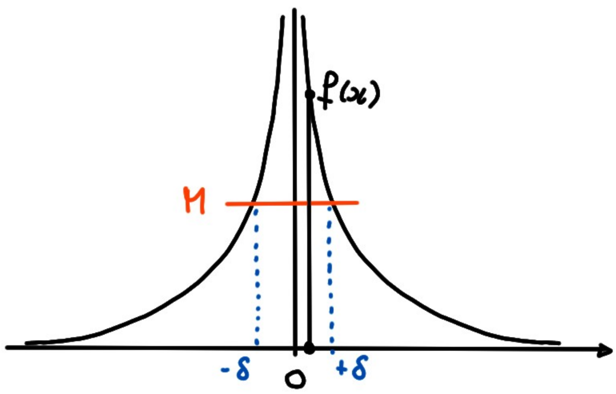
- ⋆ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geqslant M$ dès que $x_0 - \delta \leqslant x < x_0$.
- ⋆ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ si et seulement si pour tout $m < 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \leqslant m$ dès que $x_0 - \delta \leqslant x < x_0$.



Exemple 7.28. Soit $f(x) = \frac{1}{x^2}$, au voisinage de $x = 0$. Montrons que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty\,,$$

au sens de la définition ci-dessus. En effet, fixons un seuil $M > 0$, et montrons que $f(x) \geqslant M$ pour tout x suffisamment proche de 0.



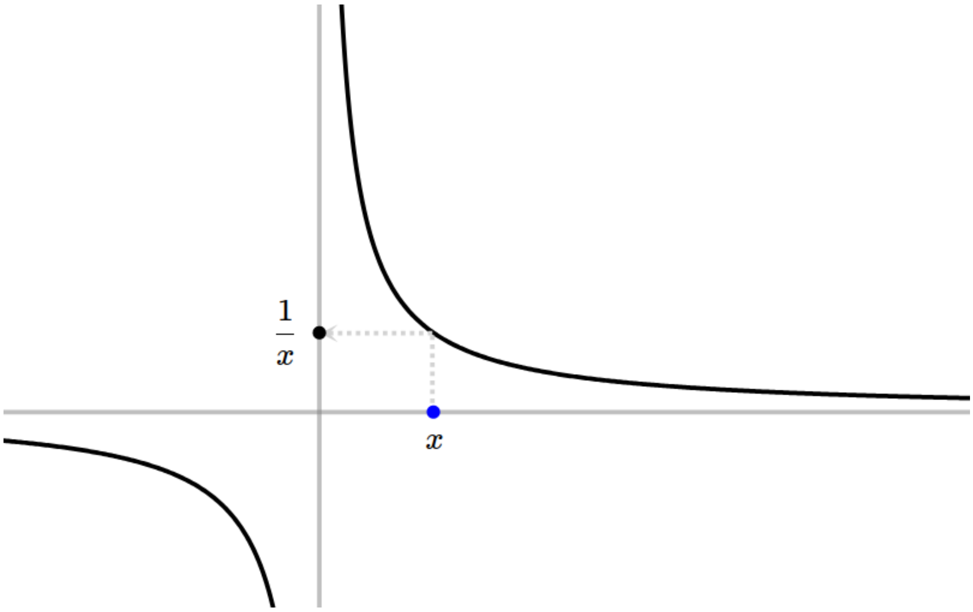
On remarque que pour un $M > 0$ fixé (grand),

$$f(x) \geqslant M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} \geqslant M \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant \frac{1}{M} \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{M}}\,.$$

Définissons donc $\delta := \frac{1}{\sqrt{M}}$. Comme conséquence de ce qui précède, en prenant un x tel que $0 < |x| \leqslant \delta$, on garantit que $f(x) \geqslant M$. $\diamond$

Exemple 7.29. Considérons ensuite $f(x) = \frac{1}{x}$ au voisinage de $x = 0$. Dans ce cas on peut obtenir des limites infinies seulement au sens latéral :

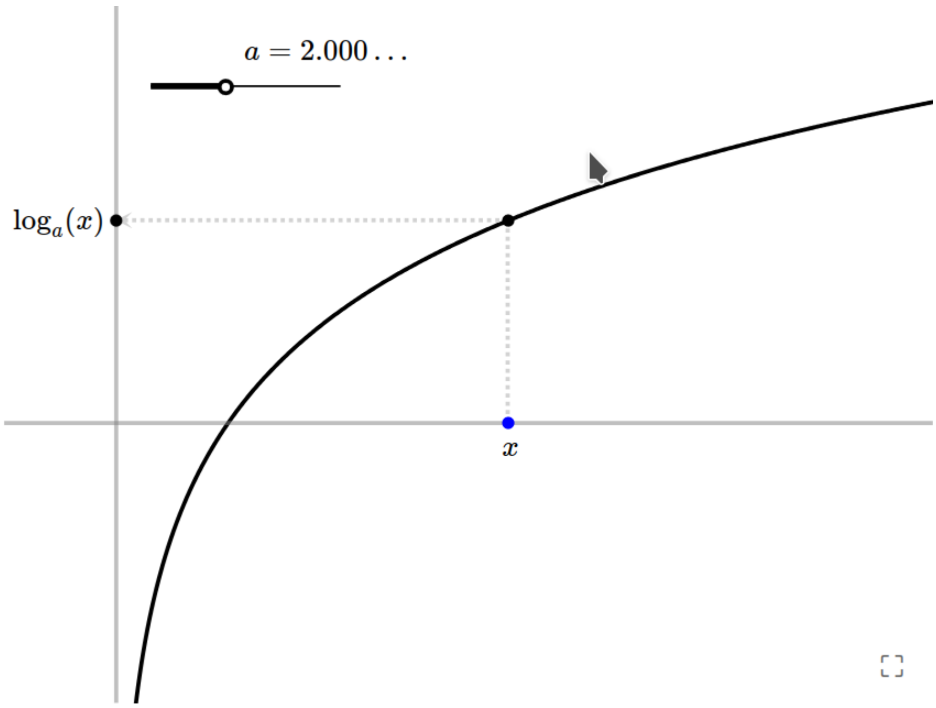
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty\,.$$



◇

Exemple 7.30. Pour $f(x) = \log_a(x)$, dont le domaine est $\mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 1\,, \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1\,. \end{cases}$$



◇

7.7.1 Propriétés des limites infinies en un point

Comme on sait depuis le chapitre sur les suites, les limites infinies ne se manipulent pas comme leurs analogues finies.

La résultat suivant est l'exact analogue de la proposition donnée pour les suites qui tendent vers l'infini. On ne les formule que dans le cas de la limite $x \to x_0$. On laisse au lecteur le soin de formuler les propriétés analogues pour les limites latérales $x \to x_0^{\pm}$.

Proposition 8. *Soient f, g définies dans un voisinage épointé de x_0, et où f est telle que $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Alors*

1) $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
2) *Si* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, *alors*
$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = +\infty\,, \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty\,.$$
3) *Si g est bornée dans un voisinage épointé de x_0, alors*
$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = +\infty\,, \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0\,.$$
4) *Si* $\lim_{x\to x_0} g(x) = L \neq 0$, *alors*
$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \textit{si } L > 0, \\ -\infty & \textit{si } L < 0\,. \end{cases}$$
5) *Si il existe $\delta > 0$ tel que $g(x) \geqslant \delta$ dans un voisinage épointé de x_0, alors* $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$.
6) *Si $g(x) \geqslant f(x)$ pour tout x dans un voisinage épointé de x_0, alors* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

Exemple 7.31. Parfois, on peut devoir faire une factorisation avant d'utiliser les propriétés ci-dessus :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} &= \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{x\to -1^+} \underbrace{(x-1)}_{\to -2\neq 0} \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to +\infty} = -\infty\,.\end{aligned}$$

◇

Quiz 7.7.1. *Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Si* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to x_0^-} g(x) = -\infty$, *alors* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)g(x) = -\infty$.
2) ☐ *Si* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to x_0^+} g(x) = -\infty$, *alors* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)e^{g(x)} = 0$.
3) ☐ *Si* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, *avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = \frac{e^a}{e^b}$.

Quiz 7.7.2. *Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0. Quelles affirmations sont toujours vraies ?*

1) ☐ *Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x < x_0$ et si* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, *alors* $\lim_{x\to x_0^-} g(x) = +\infty$.
2) ☐ *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$, *alors au moins une des limites* $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ *doit être* $+\infty$.
3) ☐ *Si* $\sup_{]x_0,x_0+\delta[} f = +\infty$ *pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit, alors* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$.
4) ☐ *Si f est bornée dans un voisinage de x_0 et si* $\lim_{x\to x_0^+} g(x) = +\infty$, *alors* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)g(x) = +\infty$.
5) ☐ *Si f est bornée dans un voisinage de x_0 et si* $\lim_{x\to x_0^+} g(x) = 0$, *alors* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)g(x) = 0$.
6) ☐ *Si* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, *alors il existe $\delta > 0$ tel que f est décroissante sur* $]x_0, x_0+\delta[$.

7.8 Limites $x \to \pm\infty$

Dans cette section, on étudie le comportement des fonctions loin de l'origine, en considérant des limites où $x \to \pm\infty$.

Comme la problématique est essentiellement la même que celle introduite dans l'étude des suites (a_n) et de leurs limites lorsque $n \to \infty$, on se contentera de donner les définitions, calquées sur celles du chapitre sur les suites, et de donner quelques exemples.

7.8.1 Limites finies

Définition 7.32. 1) Soit f dont le domaine contient un intervalle de la forme $]a, +\infty[$. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $x \geqslant N$.

2) Soit f dont le domaine contient un intervalle de la forme $]-\infty, b[$. Alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N < 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $x \leqslant N$.

On pourra utiliser sans autre toutes les propriétés listées dans la leçon sur les limites de suites, ainsi que les techniques pour étudier ces limites (extraire le terme dominant, conjugué, etc.).

7.8.2 Limites infinies

Définition 7.33. 1) Soit f une fonction dont le domaine contient un intervalle de la forme $]a, +\infty[$.

- ⋆ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe $N > 0$ tel que $f(x) \geqslant M$ dès que $x \geqslant N$.
- ⋆ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ si et seulement si pour tout $m < 0$ il existe $N > 0$ tel que $f(x) \leqslant m$ dès que $x \geqslant N$.

2) Soit f une fonction dont le domaine contient un intervalle de la forme $]-\infty, b[$.

- ⋆ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe $N < 0$ tel que $f(x) \geqslant M$ dès que $x \leqslant N$.
- ⋆ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ si et seulement si pour tout $m < 0$ il existe $N < 0$ tel que $f(x) \leqslant m$ dès que $x \leqslant N$.

Exemple 7.34. Considérons le comportement des fonctions polynomiales $f(x) = x^p$, où $p \in \mathbb{Z}^*$. Si p est négatif, alors

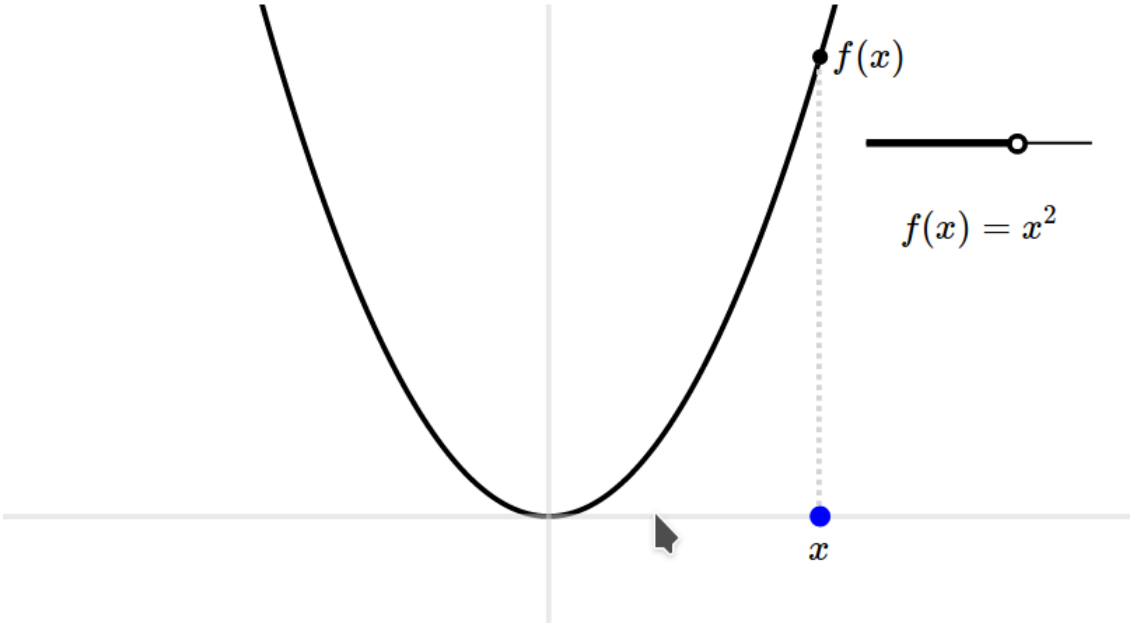
$$\lim_{x\to\pm\infty} x^p = 0\,.$$

Par contre si p est positif, alors

$$\lim_{x\to+\infty} x^p = +\infty\,,$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} x^p = \begin{cases} +\infty & \text{si p est pair}\,, \\ -\infty & \text{si p est impair}\,. \end{cases}$$

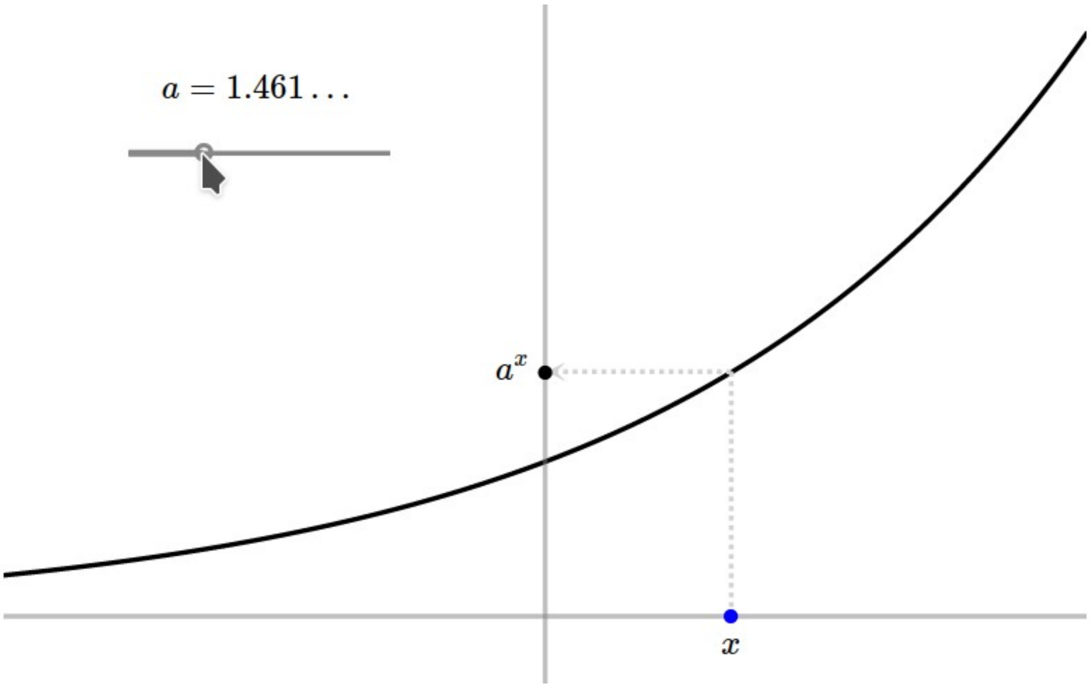


◇

Exemple 7.35. Exponentielle de base $a > 0$ ($a \neq 1$) :

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < a < 1\,, \\ 0 & \text{si } a > 1\,. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a < 1\,, \\ +\infty & \text{si } a > 1\,. \end{cases}$$



◇

Remarque 7.36. Le fait qu'ici on considère une fonction f de la variable réelle x, à l'inverse des suites dont la "variable" est un entier n, fait que certains outils nouveaux feront leur apparition, comme la règle de Bernoulli-l'Hôpital (voir chapitre sur la dérivation).
Nous reviendrons par exemple sur les limites qui caractérisent la vitesse avec laquelle certaines fonctions fondamentales tendent vers l'infini, comme

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\log_a(x))^p}{x^\alpha} = 0\,, \qquad p, \alpha > 0\,.$$

$\diamond$

Chapitre 8

Fonctions continues

8.1 Définition de la continuité

La *continuité* est la condition de régularité la plus naturelle que l'on puisse associer à une fonction f en un point x_0 : elle impose que les valeurs de $f(x)$, pour x dans un petit voisinage de x_0 soient proches de la valeur de $f(x_0)$. Cette condition se formule rigoureusement en utilisant une limite :

Définition 8.1. Soit $f : D \mapsto \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$ est un ensemble ouvert, et soit $x_0 \in D$. Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,,$$

on dit que f est **continue en** x_0. Si la limite n'existe pas, ou si elle existe mais est différente de $f(x_0)$, on dit qu'elle est **discontinue en** x_0.

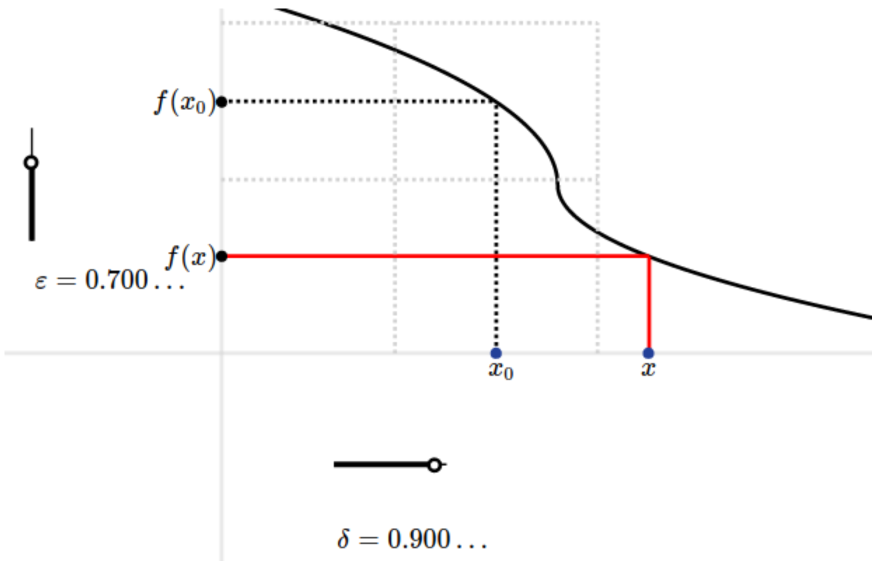
Si une fonction est continue en tout point $x_0 \in D$, on dira simplement qu'elle est **continue sur** D.

La continuité d'une fonction f en un point x_0 signifie que les valeurs de $f(x)$ sont proches de $f(x_0)$ pour tous les points x proches de x_0. Très exactement : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon \quad \text{dès que} \quad |x - x_0| \leqslant \delta\,.$$

Sur l'animation suivante, choisir un x_0 et tester la continuité de f en x_0, en procédant comme suit :

1) Fixer une valeur de $\varepsilon > 0$ (petite),
2) Chercher un $\delta > 0$ adapté tel que la relation ci-dessus soit satisfaite. Remarquer que plus ε est pris petit, plus δ doit aussi être pris petit pour satisfaire cette contrainte.



Exemple 8.2. Étudions la continuité de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x < 3\,, \\ \frac{3}{2} & \text{si } x = 3\,, \\ x-2 & \text{si } x > 3\,. \end{cases}$$

Montrons d'abord que f est continue en tout point $x_0 \neq 3$:

1) Si $x_0 < 3$, alors
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (\sqrt{4-x}) = \sqrt{4-x_0} = f(x_0)\,.$$

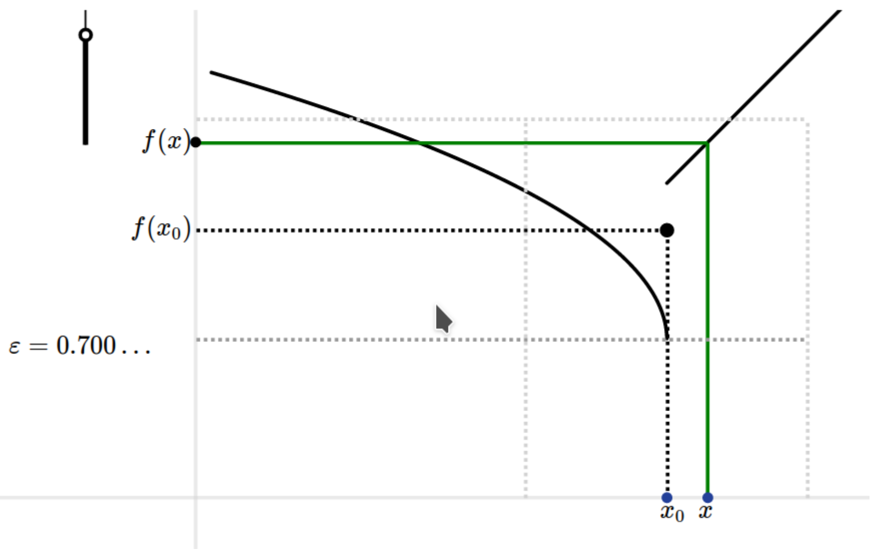
2) Si $x_0 > 3$, alors
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (x-2) = x_0 - 2 = f(x_0)\,.$$

Considérons ensuite le cas $x_0 = 3$. D'une part, en ce point la fonction prend la valeur $f(3) = 3/2$, mais d'autre part
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (\sqrt{4-x}) = 1\,,$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-2) = 1\,,$$

ce qui implique l'existence de $\lim_{x\to 3} f(x)$, mais

$$\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)\,,$$

donc f est discontinue en $x_0 = 3$. ◇



L'exemple précédent montre comme il est facile de créer une discontinuité en un point x_0 : en définissant la fonction différemment de part et d'autre de x_0.

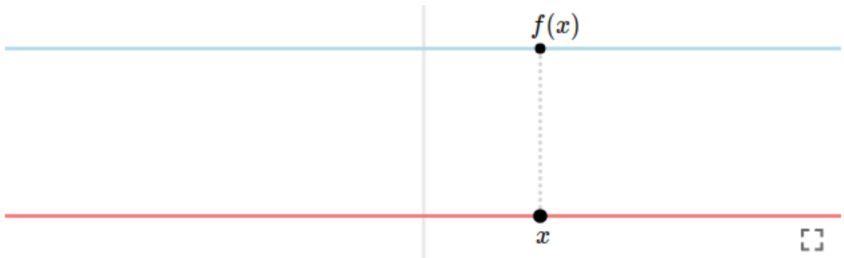
Informel 8.3. Les fonctions qui sont continues *en tout point de leur domaine de définition*, sur lesquelles nous reviendrons, jouent un rôle particulier en analyse, car elle jouissent de certaines propriétés remarquables. Du point de vue graphique, le graphe d'une telle fonction ne présente *aucun saut*, et peut théoriquement être tracé "sans lever le crayon".

8.1.1 Des fonctions avec beaucoup de discontinuités

En vue de l'exemple du début de cette section, on voit qu'il est facile de créer des fonctions possédant une, deux ou plusieurs discontinuités. On peut évidemment créer des fonctions possédant une infinité de discontinuités (par exemple, la valeur entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est discontinue en tout point $x_0 \in \mathbb{Z}$), mais il existe des fonctions qui ne sont continues *nulle part*...

Exemple 8.4. Considérons la fonction

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



(Un ordinateur ne peut évidemment pas représenter le graphe d'une telle fonction.)

Montrons que f est discontinue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet, pour un $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, il existe toujours une suite d'irrationnels $i_n \to x_0$, pour laquelle

$$\lim_{n\to\infty} f(i_n) = 0\,,$$

et une suite de rationnels $r_n \to x_0$, pour laquelle

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = 1\,.$$

Ceci implique que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque $x \to x_0$, et donc que f n'est pas continue en x_0. Comme ce raisonnement vaut pour tout x_0, f est discontinue partout. ◇

En bas de page, on donne un exemple d'une fonction qui est discontinue "presque partout", dans le sens suivant : continue en tout point irrationnel, discontinue en tout point rationnel.

8.1.2 Continuité des fonctions élémentaires

Lemme 18. *Les fonctions qui sont des sommes, produits, quotients (lorsqu'ils sont bien définis) et composées de fonctions continues sont continues.*

Preuve: Ces propriétés suivent directement des propriétés de la limite. Par exemple, si f et g sont continues en x_0, alors $f + g$ est aussi continue en x_0 puisque

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} (f+g)(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \\ &= f(x_0) + g(x_0) \\ &= (f+g)(x_0) \end{aligned}$$

□

La plupart des fonctions fondamentales de l'analyse sont continues (sur leur domaine).

⋆ Tout **polynôme** $x \mapsto P(x)$ est continu sur $\mathbb{R}$.

- ⋆ Les **fonctions trigonométriques** $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$; $\tan(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$,
- ⋆ Pour toute base $a > 0$, **l'exponentielle** a^x est continue sur $\mathbb{R}$. (En particulier, $x \mapsto e^x$ est continue.)
- ⋆ Pour toute base $a > 0$, la fonction **logarithme** $\log_a(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. (En particulier, $x \mapsto \log(x)$ est continue.)

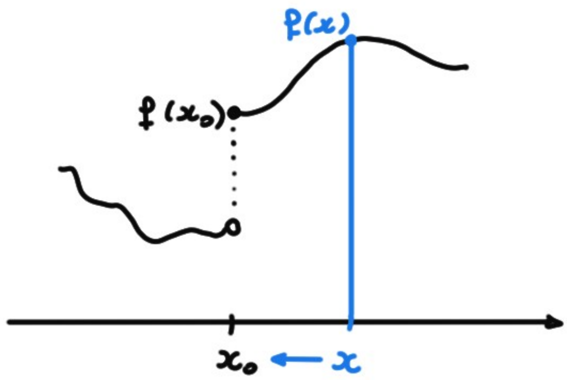
8.1.3 Continuité latérale

Introduisons une notion de continuité un peu plus faible :

Définition 8.5. 1) Soit f une fonction définie en x_0 et dans un voisinage à gauche de x_0. On dit que f est **continue à gauche en** x_0 si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

2) Soit f une fonction définie en x_0 et dans un voisinage à droite de x_0. On dit que f est **continue à droite en** x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Une fonction continue à droite, mais pas à gauche, en x_0 :



Exemple 8.6. Étudions la continuité de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x} & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{3}\,, \\ 1/6 & \text{si } x = 0\,, \\ \dfrac{x^2+x}{\sin(3x)} & \text{si } -\frac{\pi}{3} < x < 0\,, \end{cases}$$

au point $x_0 = 0$. Puisque f est définie différemment de part et d'autre de 0, on étudie les limites latérales :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{6}\,,$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+x}{\sin(3x)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}} \frac{x+1}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

Puisque $f(0) = \frac{1}{6}$, on conclut qu'en 0, f est continue à droite mais discontinue à gauche. ⋄

Théorème 8.7. *Soit f définie en x_0 et dans son voisinage. Alors f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.*

Preuve: Est une conséquence de l'équivalence entre limite et égalité des limites latérales. □

Attention : ne manquez pas de lire l'exemple tout en fin de section !

Quiz 8.1.1. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si f est continue en x_1 et g est continue en x_2, alors $f+g$ est continue en x_1+x_2.*
2) □ *Si f et g sont toutes deux discontinues en x_0, alors $f+g$ est aussi discontinue en x_0.*
3) □ *Si f est continue en x_0 et g est discontinue en x_0, alors $f+g$ est discontinue en x_0.*
4) □ *Si f est continue en x_* et si (y_n) est une suite telle que $y_n \to x_*$, alors $f(y_n) \to f(x_*)$.*
5) □ *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$, $f(a_n) \to L_1$, $f(b_n) \to L_2$, avec $L_1 \neq L_2$, alors f est discontinue en x_0.*
6) □ *Si f est continue en x_0, alors f est continue en tout point x_0' suffisamment proche de x_0.*
7) □ *Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors $f(x) \neq 0$ pour tout x suffisamment proche de x_0.*
8) □ *Si f est discontinue en x_0 et si $f(x_0) = 0$, alors $f(x_0-\varepsilon)f(x_0+\varepsilon) < 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.*

Quiz 8.1.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en un point x_0. Parmi les affirmations ci-dessous, lesquelles sont correctes ?*

1) □ *Il existe L tel que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.*
2) □ *Si on fixe $x \neq x_0$, suffisamment proche de x_0, alors $|f(x)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.*
3) □ *Il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x)-f(x_0)| \leqslant \frac{1}{\pi^3}$ dès que $|x-x_0| \leqslant \frac{\delta}{10}$.*

Quiz 8.1.3. *Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Vrai ou faux ?*

1) □ *La fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leqslant 0\,, \\ g(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est aussi continue.

2) □ *La fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q}\,, \\ g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

est aussi continue.

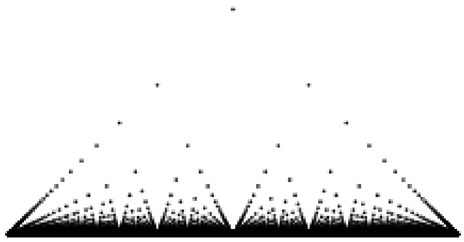
Exemple 8.8. ⚠ Considérons la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel,} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ (irréductible).} \end{cases}$$

Par exemple,

$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\,, \qquad f(\tfrac{3}{5}) = \tfrac{1}{5}\,, \qquad f(\tfrac{12}{39}) = f(\tfrac{4}{13}) = \tfrac{1}{13}\,.$$

Le graphe de f ressemble à quelque chose comme ça :



Nous allons montrer que f *est continue en tout point irrationnel, discontinue en tout point rationnel*.

Clairement, f est discontinue en tout x_0 rationnel non-nul. En effet, on peut toujours trouver une suite d'irrationnels $i_n \to x_0$, pour laquelle

$$\lim_{n\to\infty} f(i_0) = 0 \neq f(x_0)\,.$$

Avant de poursuivre, définissons pour chaque entier $k \geqslant 1$ l'ensemble

$$\mathbb{Q}(k) := \left\{ \tfrac{p}{k} \,|\, \text{irréductible}, p \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}\,.$$

Remarquons que la distance entre deux points de $\mathbb{Q}(k)$ est d'au moins $\frac{1}{k}$. Par définition, si $x \in \mathbb{Q}(k)$, alors $f(x) = \frac{1}{k}$.

Fixons maintenant un irrationnel x_0, et montrons que f est continue en x_0, c'est-à-dire que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0\,.$$

Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ et considérons un entier $k \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{k} \leqslant \varepsilon$. Soit $\delta > 0$, assez petit pour que les rationnels contenus dans $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ne soient que des rationnels des ensembles $\mathbb{Q}(k')$, $k' > k$.

* Si x est irrationnel, alors $f(x) = 0$.
* Si x est rationnel, alors il appartient nécessairement à un des ensemble $\mathbb{Q}(k')$, $k' > k$, ce qui implique $|f(x)| = \frac{1}{k'} < \frac{1}{k} < \varepsilon$.

Dans les deux cas, on a $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. ◇

8.2 Prolongement par continuité

Informel 8.9. Supposons qu'une fonction ait un "trou" dans son domaine, au point x_0. Si l'on veut étendre le domaine de cette fonction, de façon à ce que son domaine contienne aussi x_0, comment doit-on définir $f(x_0)$?

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, et soit $I' := I \setminus \{x_0\}$. On obtient donc I en rajoutant à I' le point x_0.

Soit maintenant une fonction $f : I' \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire définie sur I à l'exception du point x_0.

Si on veut étendre le domaine de f à tout I, il faut choisir une valeur pour $f(x_0)$. Ce choix est a priori arbitraire, mais une façon naturelle de le faire est de donner à f, au point x_0, une valeur *qui est semblable à celles qu'elle prend dans le voisinage de* x_0.

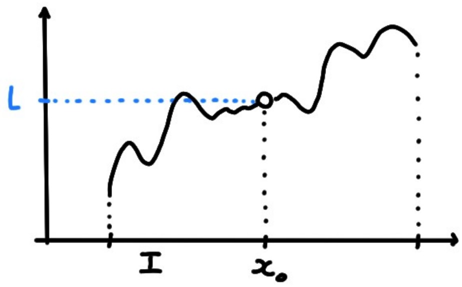
Plus précisément : si le nombre

$$L = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

existe, il est naturel de l'utiliser pour définir la valeur de f au point x_0 :

$$f(x_0) := L\,.$$

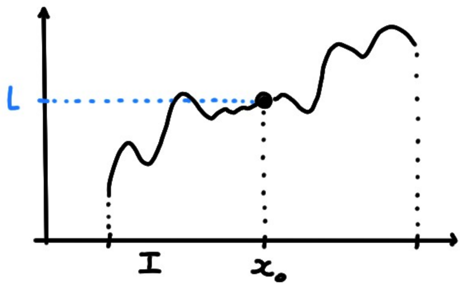
Cette procédure est surtout utilisée dans le cas où f est, au départ, continue en tout point de I' :



Si la limite L existe, la nouvelle fonction

$$\begin{aligned}\widetilde{f} : I &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0\,,\\ L & \text{si } x = x_0\,.\end{cases}\end{aligned}$$

est continue en tout point de I ; elle s'appelle la **prolongée de f par continuité** :



Informel 8.10. Du point de vue du graphe, on est parti d'une fonction qui était déjà continue en tous les points de I', et l'existence de L a permis de simplement "boucher le trou", pour rendre la fonction continue sur tout I.

Exemple 8.11. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x < 3\,,\\ x-2 & \text{si } x > 3\,.\end{cases}$$

On a montré précédemment que f est continue en tout point $x \neq 3$. On a aussi calculé

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1\,.$$

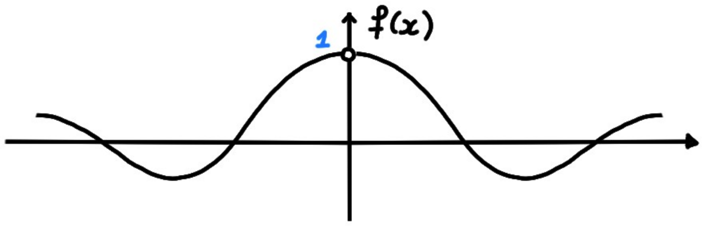
On peut donc prolonger cette fonction par continuité à tout $\mathbb{R}$, en définissant

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x < 3\,,\\ 1 & \text{si } x = 3\,,\\ x-2 & \text{si } x > 3\,.\end{cases}$$

◇

Exemple 8.12. Considérons $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x}\,.$$



Clairement, f est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^*$. On sait que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,,$$

donc f peut être prolongée par continuité à tout $\mathbb{R}$. Sa prolongée est donnée par

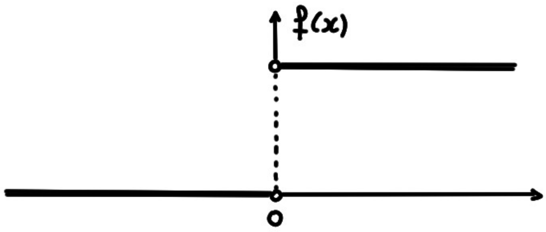
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

◇

Informel 8.13. On ne peut pas toujours, comme dans les deux exemples précédents, "boucher le trou" pour rendre une fonction continue partout :

Exemple 8.14. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,, \\ 1 & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$



Alors f est continue en tout point de $\mathbb{R}_*$, Mais comme $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas (puisque $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ est différent de $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$), cette fonction ne *peut pas être prolongée* par continuité. ◇

Quiz 8.2.1. *Soit $x_0 \in]-1,1[$ et soit f une fonction continue en chaque point de $]-1,1[\setminus\{x_0\}$. Vrai ou faux ?*

1) ☐ *f est continue en x_0.*
2) ☐ *La limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe.*
3) ☐ *Au moins une des limites latérales $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$ existe.*
4) ☐ *Il existe une prolongée par continuité $\widetilde{f} :]-1,1[\to \mathbb{R}$.*
5) ☐ *Si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, alors la fonction $g : \mathbb{R}\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) := \frac{f(x)}{f(x)^2+1}$ pour tout $x \neq x_0$, est prolongeable par continuité en x_0.*

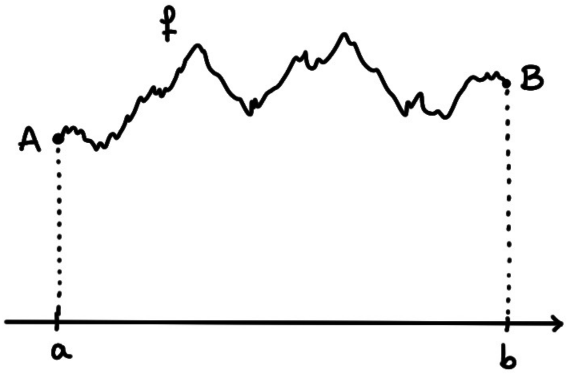
8.3 Continuité sur un intervalle compact

Une fonction continue définie sur un intervalle **compact**, c'est-à-dire fermé et borné (donc du type $[a,b]$), possède plusieurs propriétés remarquables. Commençons par définir ce que signifie être continue sur un intervalle fermé et borné :

Définition 8.15. Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est **continue** si

- ⋆ elle est continue en tout $x_0\in]a,b[$,
- ⋆ elle est continue à droite en $x_0=a$,
- ⋆ elle est continue à gauche en $x_0=b$.

Informel 8.16. Une fonction continue sur $[a,b]$ est donc une fonction dont le graphe est une courbe "traçable sans lever le crayon", reliant le point $A=(a,f(a))$ au point $B=(b,f(b))$:



Une première propriété importante est qu'une fonction continue sur un compact ne peut pas prendre de valeurs arbitrairement grandes :

Théorème 8.17. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée.*

Preuve: Par l'absurde, supposons que f n'est pas majorée. Alors pour tout $n>0$ il existe $x_n\in[a,b]$ tel que $f(x_n)>n$, et donc $f(x_n)\to+\infty$.

Par construction, $(x_n)_n$ est bornée. Par le Théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ et $x^*\in[a,b]$ telle que $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x^*$. Mais donc, puisque f est continue, elle est en particulier continue en x^*, et donc

$$f(x^*)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty\,,$$

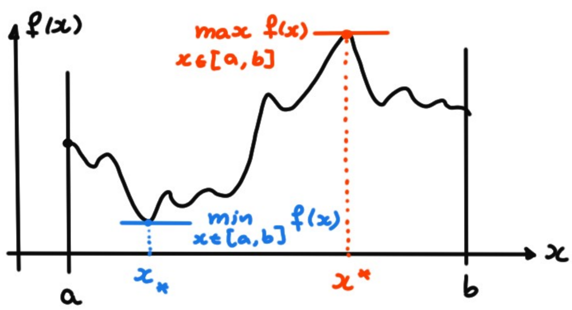
ce qui est impossible (puisque $f(x^*)$ doit être un nombre fini !). Donc f est majorée.

En adaptant l'argument, on montre que f est minorée. □

Une deuxième propriété, très utile dans les problèmes d'optimisation : si une fonction est continue sur un compact, elle atteint toujours son minimum et son maximum :

Théorème 8.18. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son minimum et son maximum : il existe x_* et $x^*\in[a,b]$ tels que*

$$\min_{x\in[a,b]}f(x)=f(x_*)\,,\qquad \max_{x\in[a,b]}f(x)=f(x^*)\,.$$



Preuve: Par le théorème précédent, f est bornée, et donc

$$s := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

est bien défini. Nous allons montrer qu'il existe un point $x^* \in [a, b]$ où f prend cette valeur s.

Considérons la suite $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$. Par définition du supremum, pour tout n il existe $x_n \in [a, b]$ tel que

$$s - \varepsilon_n \leqslant f(x_n) \leqslant s\,.$$

Par construction, $f(x_n) \to s$ lorsque $n \to \infty$. Mais, comme $(x_n)_n$ est bornée (elle vit dans $[a, b]$!), le Théorème de Bolzano-Weierstrass garantit qu'il existe une sous suite $(x_{n_k})_k$, et un $x^* \in [a, b]$, tels que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$.

Calculons $f(x^*)$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, elle est en particulier continue en x^*. Comme $x_{n_k} \to x^*$, on a donc

$$f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})\,.$$

Mais, puisque $(f(x_{n_k}))_k$ est une sous-suite de $(f(x_n))_n$, elle converge vers la même limite :

$$f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = s\,.$$

On a donc

$$f(x^*) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

On procède de même pour la construction d'un point x_* où f atteint son minimum. □

Informel 8.19. Le théorème dit que x_* et x^* existent toujours, mais il ne dit pas comment les trouver ! (D'ailleurs en général, on ne sait pas les trouver.)

Exemple 8.20. Considérons $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = x^3 \sin(x^2 + \cos(x))\,.$$

Cette fonction est continue (c'est un produit de x^3 avec une composée de fonctions continues), donc par le théorème, il existe $x_* \in [0, 2]$ et $x^* \in [0, 2]$ tels que

$$f(x_*) = \min_{x\in[0,2]} f(x)\,, \qquad f(x^*) = \max_{x\in[0,2]} f(x)\,.$$

◇

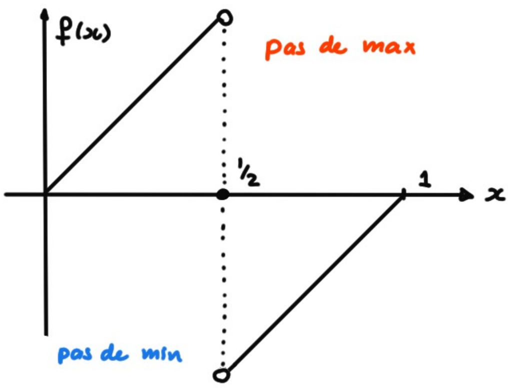
Pour souligner l'importance des hypothèses dans le théorème ci-dessus, voyons comme le résultat n'est plus vrai en général lorsqu'une des hypothèses n'est pas vérifiée :

Exemple 8.21. (Une fonction sur un intervalle compact, mais qui n'est pas continue en un point.) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{1}{2}\,, \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{2}\,, \\ x - 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Cette fonction est continue partout sauf en $\frac{1}{2}$, et elle ne possède ni de maximum ni de minimum :

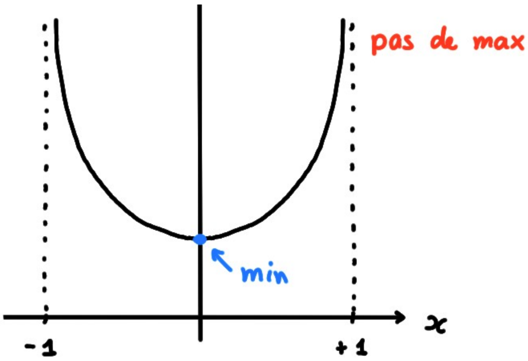
◇



Exemple 8.22. (Une fonction continue, sur un intervalle borné mais pas fermé.) Considérons

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}\,, \qquad \text{sur }]-1,1[\,.$$

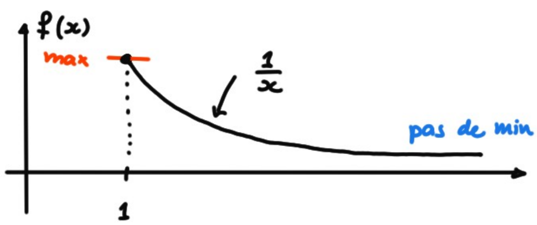
Alors f possède un minimum, atteint en $x_* = 0$, mais pas de maximum : ◇



Exemple 8.23. (Une fonction continue sur un intervalle fermé mais pas borné.) Soit

$$f(x) = \frac{1}{x}\,, \qquad \text{sur } [1,+\infty[\,.$$

Alors f possède un maximum, atteint sur le bord en $x^* = 1$, mais pas de minimum :



◇

Quiz 8.3.1. *Vrai ou faux ?*

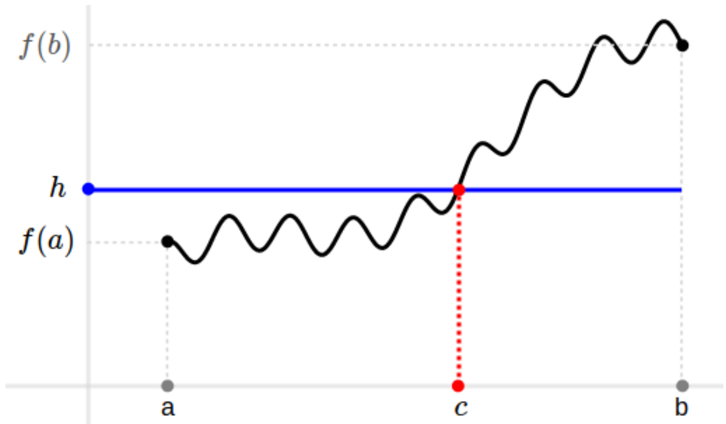
1) □ *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n'est pas continue, alors elle n'atteint pas son minimum ni son maximum.*
2) □ *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ atteint son minimum et son maximum, alors elle est continue.*
3) □ *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ atteint son minimum ou son maximum, mais pas les deux, alors elle n'est pas continue.*
4) □ *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est minorée mais pas majorée, alors elle n'est pas continue.*

8.4 Le théorème de la valeur intermédiaire

(ici, Video: v_fonctions_continuite_TVI.mp4)

Une propriété essentielle des fonctions continues sur un intervalle compact :

Théorème 8.24. *(Théorème de la valeur intermédiaire) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Si $f(a) < f(b)$, alors pour toute valeur intermédiaire h, $f(a) < h < f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = h$. (Affirmation semblable dans le cas où $f(a) > f(b)$.)*



Le résultat se démontre en utilisant un **Algorithme de bissection** (qui est, en soi, tout aussi important que le théorème lui-même) :

Preuve: L'idée est de construire deux suites convergentes $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$. Celles-ci sont construites par récurrence :

1) Posons $a_0 := a$, $b_0 := b$. Par définition, $f(a_0) < h < f(b_0)$.
2) Pour $n \geqslant 0$, supposons que a_n et b_n ont déjà été définis, et que $f(a_n) \leqslant h \leqslant f(b_n)$. Considérons alors le point milieu de a_n et b_n :

$$c_n := \frac{a_n + b_n}{2}\,.$$

   ⋆ Si $f(c_n) \leqslant h$, on pose $a_{n+1} := c_n$, $b_{n+1} := b_n$.
   ⋆ Si $f(c_n) > h$, on pose $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := c_n$. Par définition de a_{n+1} et b_{n+1}, $f(a_{n+1}) \leqslant h \leqslant f(b_{n+1})$.

Maintenant que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ ont été construites, regardons-les de plus près :

⋆ À chaque étape de l'algorithme ci-dessus, a_{n+1} est soit a_n, soit c_n. Comme $c_n > a_n$, ceci implique que dans tous les cas, $a_{n+1} \geqslant a_n$. De plus, chaque a_n est inférieur à b. Par conséquent, $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée, donc elle converge : notons sa limite

$$c_- := \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

⋆ À chaque étape de l'algorithme ci-dessus, b_{n+1} est soit b_n, soit c_n. Comme $c_n < b_n$, ceci implique que dans tous les cas, $b_{n+1} \leqslant b_n$. De plus, chaque b_n est supérieur à a. Par conséquent, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée, donc elle converge : notons sa limite

$$c_+ := \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

⋆ Comme à chaque étape exactement un des points devient le point milieu, on a

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2}|a_n - b_n| = \cdots = \frac{1}{2^{n+1}}|a-b| \to 0\,.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a donc que

$$|c_- - c_+| \leqslant |c_- - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - c_+| \to 0\,,$$

ce qui implique que $c_- = c_+$, que l'on peut donc écrire simplement c.

On utilise maintenant de manière essentielle la continuité de f :

1) D'une part, comme $a_n \to c_-$ et $f(a_n) \leqslant h$ pour tout n, on a que

$$f(c) = f(c_-) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant h\,.$$

2) D'autre part, comme $b_n \to c_+$ et $f(b_n) \geqslant h$ pour tout n, on a que

$$f(c) = f(c_+) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant h\,.$$

Ceci implique bien que $f(c) = h$. □

8.4.1 Application : existence de solutions pour des équations non-linéaires

Voyons une première conséquence du théorème de la valeur intermédiaire, que l'on a déjà rencontrée. (Dans le chapitre sur les nombres complexes, on a vu ce résultat comme une conséquence du Théorème Fondamental de l'Algèbre.)

Corollaire 6. *(Existence de racines pour polynômes réels de degré impair) Un polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.*

Preuve: Considérons un polynôme de degré impair, à coefficients réels :

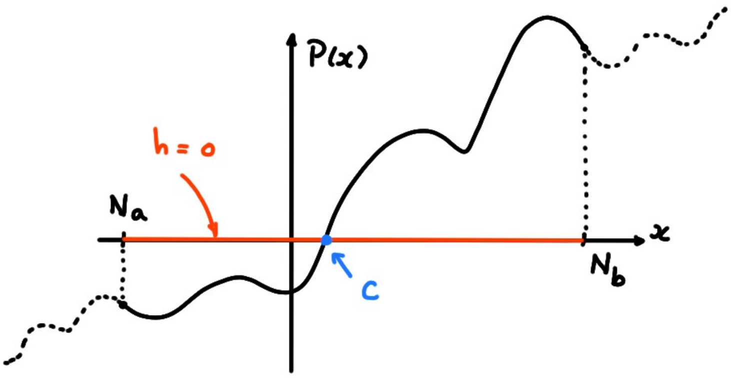
$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$$

où n est impair, et $a_n \neq 0$. Rappelons que ce polynôme est une fonction continue de la variable x.

Sans perte de généralité, supposons que $a_n > 0$. Comme n est impair, on a

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty\,.$$

Il existe donc un réel $N_a < 0$ tel que $P(N_a) < 0$, et un réel $N_b > 0$ tel que $P(N_b) > 0$.



En appliquant le Théorème de la valeur intermédiaire sur l'intervalle $[N_a, N_b]$, avec $h = 0$, on conclut : il existe $c \in]N_a, N_b[$ tel que $P(c) = 0$. □

Exemple 8.25. Le polynôme

$$P(z) = z^7 - \pi z^6 + \sqrt{2}z - 1$$

est de degré impair. Par le corollaire, il possède au moins une racine. ◇

Le théorème de la valeur intermédiaire permet aussi de montrer l'existence de solutions pour des équations non-linéaires, pas forcément polynomiales :

Exemple 8.26. Montrons que l'équation non-linéaire

$$\cos(x) = x$$

possède au moins une solution : Pour ce faire, définissons

$$f(x) := \cos(x) - x\,,$$

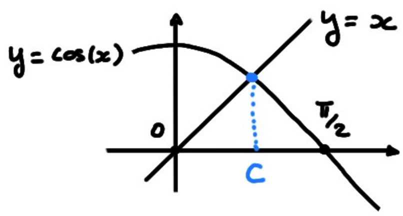
que l'on considère sur l'intervalle fermé et borné $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a d'une part que

$$f(0) = 1 - 0 = 1 > 0\,,$$

et d'autre part que

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = 0 - \tfrac{\pi}{2} < 0\,.$$

Donc, par le Théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f(c) = 0$, ce qui est équivalent à $\cos(c) = c$.

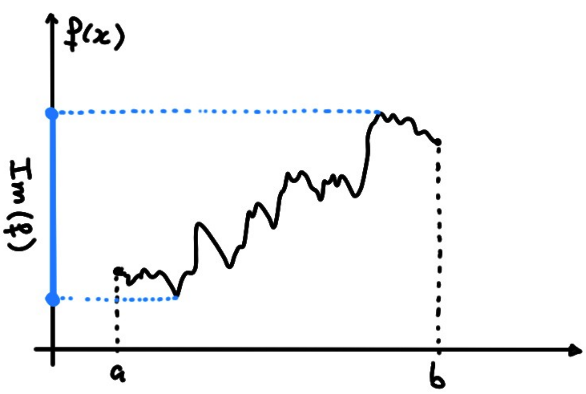


◇

8.4.2 Application : sur l'ensemble image d'une fonction continue

Théorème 8.27. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors son ensemble image $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle fermé et borné, donné par*

$$\mathrm{Im}(f) = \big[\min_{x\in[a,b]} f(x)\,,\ \max_{x\in[a,b]} f(x)\big]$$



Preuve: On sait que f atteint son minimum et son maximum :

$$f(x^*) = \max_{x\in[a,b]} f(x)\,, \qquad f(x_*) = \min_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

Puisque $f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$ pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$\mathrm{Im}(f) \subset [f(x_*), f(x^*)]\,.$$

Si $x_* = x^*$, alors f est constante et donc $\mathrm{Im}(f)$ ne contient qu'un point (qu'on peut considérer comme un intervalle fermé et borné). Sinon, on peut supposer sans perte de généralité que $x_* < x^*$.

En choisissant un $h \in [f(x_*), f(x^*)]$ quelconque, le théorème de la valeur intermédiaire garantit qu'il existe un $c \in]x_*, x^*[$ tel que $f(c) = h$. Par conséquent, $h \in \mathrm{Im}(f)$, et donc

$$[f(x_*), f(x^*)] \subset \mathrm{Im}(f)\,.$$

On a donc montré que $\mathrm{Im}(f) = [f(x_*), f(x^*)]$, qui est bien un intervalle fermé et borné. □

Quiz 8.4.1. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, alors f est strictement monotone sur au moins un sous-intervalle de $[a, b]$.*
2) □ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $f(a) < f(b)$. Si pour tout $h \in]f(a), f(b)[$ il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = h$, alors f est continue.*
3) □ *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ continue, telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Alors pour tout $h \in]0, f(a)[$ il existe $c > a$ tel que $f(c) = h$.*
4) □ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue en tout point $x_0 \in]a, b[$, telle que $f(a) < f(b)$. Alors pour tout $h \in]f(a), f(b)[$ il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = h$.*
5) □ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue en tout point $x_0 \in]a, b[$, telle que $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to b^-} f(x)$ existent. Alors pour tout $h \in]f(a), f(b)[$ il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = h$.*
6) □ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, non-constante, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe une suite $x_n \in [a, b]$ telle que $f(x_n)$ soit strictement croissante.*
7) □ *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Alors $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.*
8) □ *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Alors il existe h tel que $\mathrm{Im}(f) = [h, +\infty[$.*

Quiz 8.4.2. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ est continue pour tout $a < \alpha < \beta < b$, alors $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue.*
2) □ *Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue, alors elle n'est pas bornée.*
3) □ *Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue, alors $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle ouvert.*
4) □ *Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ pour tout $x_0 \in]a, b[$.*
5) □ *Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue, alors $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to b^-} f(x)$ existent.*

8.5 Continuité et calcul de limites

On a déjà vu que si une fonction f est continue en un point x_*, alors pour toute suite (x_n) tendant vers x_*,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = f(x_*).$$

Voyons maintenant un résultat analogue, mais dans lequel la suite x_n (dont la variable est l'entier n) est remplacée par une fonction $g(x)$ (dont la variable est un réel x) :

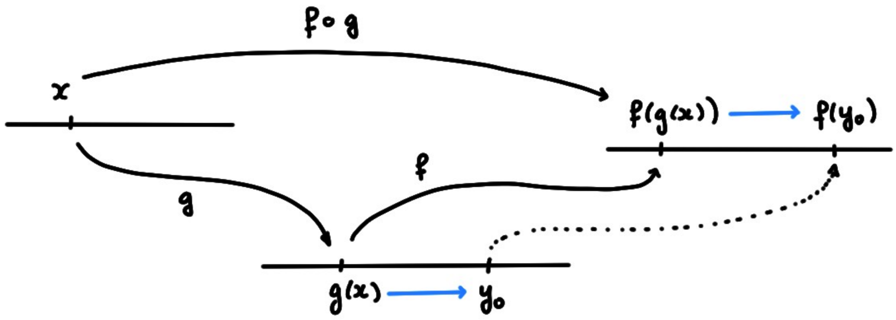
Théorème 8.28. *Soit $f(y)$ définie dans le voisinage d'un point $y_0 = L$, et continue en ce point y_0.*

1) *Si g est définie dans un voisinage de x_0, et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, alors*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0)\,.$$

2) *Si g est définie sur un domaine contenant un intervalle de la forme $]a, +\infty[$, et si $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = y_0$, alors*

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = f(y_0)\,.$$



Preuve: On démontre la première affirmation.

Fixons $\varepsilon > 0$. On procède en deux étapes :

- ⋆ Puisque f est continue en y_0, il existe $\eta > 0$ tel que $|f(y) - f(y_0)| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |y - y_0| \leqslant \eta$.
- ⋆ Ensuite, puisque $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x) - y_0| \leqslant \eta$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$.

Prenons donc un x tel que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. En utilisant la première étape avec $y = g(x)$, on a

$$|f(g(x)) - f(y_0)| = |f(y) - f(y_0)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Ceci montre bien que $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(y_0)$.

La deuxième affirmation se démontre de la même façon. □

Informel 8.29. En d'autres termes, lorsqu'on étudie une limite d'une composée $f(g(x))$, dans laquelle on sait que $g(x) \to y_0$, **et que f est continue au point** y_0, alors on peut "rentrer la limite dans f" :

$$\lim f(g(x)) = f\big(\lim g(x)\big) = f(y_0)\,.$$

Exemple 8.30. Considérons la limite

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x}{x+1}}\,.$$

On voit ici que $g(x) = \frac{x}{x+1} \to 1$ lorsque $x \to \infty$. Montrons que $f(x) = \sqrt{x}$ est continue en $y_0 = 1$. En effet, puisque

$$|f(x) - f(1)| = |\sqrt{x} - \sqrt{1}| = \frac{|x-1|}{\sqrt{x}+1} \leqslant |x-1|\,,$$

on a bien que $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

On peut donc "rentrer la limite dans f"

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1}} = \sqrt{1} = 1\,.$$

◇

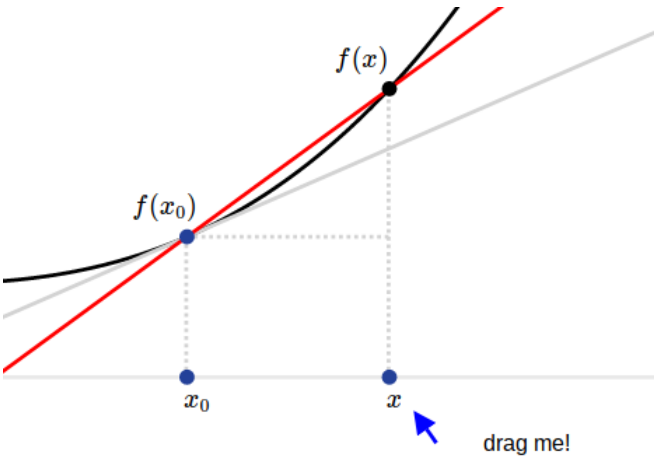
Chapitre 9

Dérivée et calcul différentiel

9.1 Définition de la dérivée, exemples

(ici, Video: v_derivee_introduction.mp4)

Une question géométrique naturelle, et très utile pour l'étude d'une fonction, est de savoir comment calculer l'équation de la droite tangente au graphe d'une fonction, en un point $(x_0, f(x_0))$:



Pour connaître l'équation de cette droite, de la forme

$$y = mx + h\,,$$

on commence par chercher sa pente m. Et quand on cherche la pente d'une droite, on a besoin de deux points sur cette droite et ici, on n'en a qu'un, à savoir le point $(x_0, f(x_0))$.

L'idée est de passer par un processus de *limite*. En effet, introduisons un deuxième point sur le graphe, $(x, f(x))$, où x est un point différent de x_0, et considérons la **sécante** passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$. La pente de cette sécante est donnée par

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Lorsque x est proche de x_0, cette pente approxime celle de la droite que l'on cherche, m. Dans la limite $x \to x_0$ (tester sur l'animation ci-dessus), elle devrait même tendre exactement vers m :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m\,.$$

L'existence de la limite ci-dessus n'est pas garantie en générale.

Définition 9.1. Soit f définie en $x_0 \in \mathbb{R}$ et dans son voisinage. On dit que f est **dérivable en** x_0 si le nombre $f'(x_0)$ défini par la limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe (et est fini). On appelle $f'(x_0)$ la **dérivée (ou nombre dérivé) de** f **au point** x_0.

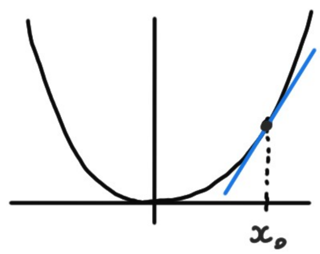
Remarque 9.2. Dans la limite qui définit $f'(x_0)$, ci-dessus, la variable x est utilisée uniquement pour calculer la limite ; on dit qu'elle est **muette**. On donc peut écrire $f'(x_0)$ de différentes manières :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{z \to x_0} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \end{aligned}$$

où, dans la dernière égalité, on a fait le changement de variable $h := z - x_0$. ◇

Exemple 9.3. Soit $f(x) = x^2$. Au point $x_0 = 1$,

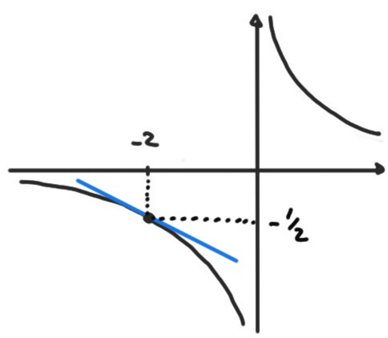
$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = 2\,.$$



Donc la tangente à la parabole au point d'abscisse $x_0 = 1$ a une pente de 2. Son équation est donc de la forme $y = 2x + b$, et comme elle doit passer par le point $(1, f(1)) = (1, 1)$, on trouve $b = -1$. Donc la tangente au point $(1, 1)$ a pour équation $y = 2x - 1$. ◇

Exemple 9.4. Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Au point $x_0 = -2$,

$$f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{-2}}{x + 2} = -\frac{1}{4}\,.$$



◇

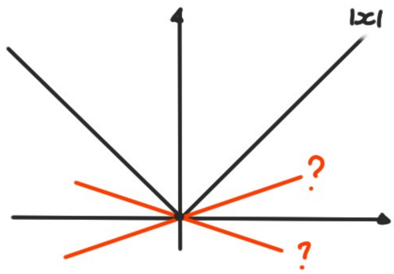
9.1.1 Origines possibles de la non-dérivabilité en un point

Voyons quelques exemples de fonctions qui ne sont pas dérivables.

Exemple 9.5. Considérons $f(x) = |x|$. Au point $x_0 = 0$, la dérivée s'obtient en prenant la limite $x \to 0$ du rapport

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0\,, \\ +1 & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

Or ce signe n'a pas de limite quand $x \to 0$, donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$. Cela fait sens du point de vue géométrique, puisqu'en ce point son graphe ne possède pas de droite tangente naturellement définie :

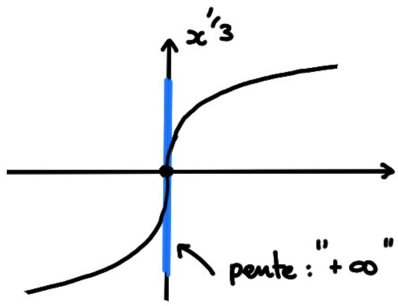


◇

Exemple 9.6. Considérons $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Au point $x_0 = 0$, la dérivée s'obtient en prenant la limite $x \to 0$ du rapport

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

Or cette limite est $+\infty$, donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$. Cela fait sens du point de vue géométrique, puisqu'en ce point son graphe possède une droite tangente, mais verticale (de pente infinie) :



◇

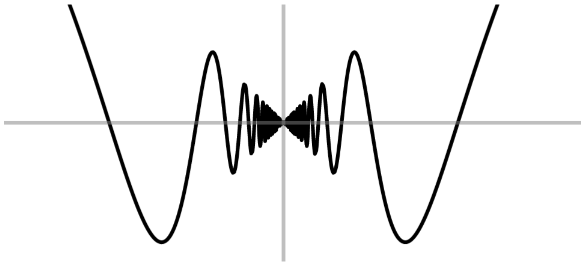
Exemple 9.7. Considérons

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Au point $x_0 = 0$, le rapport donnant la pente de la droite de la sécante est

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin(\tfrac{1}{x})\,,$$

qui comme on le sait ne possède pas de limite lorsque $x \to 0$. Donc f n'est pas dérivable en 0 :



◇

9.1.2 Taux d'accroissement et la notation de Leibniz

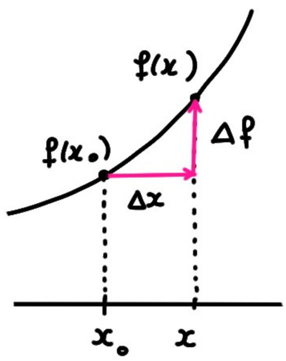
De par sa signification géométrique, la dérivée est toujours une limite d'un quotient de deux quantités qui tendent vers zéro. (C'est pour ça que les indéterminations "$\frac{0}{0}$" sont si importantes !)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \,.$$

Interprétons cette limite en introduisant des nouvelles notations :

- ⋆ $\Delta f := f(x) - f(x_0)$ représente l'**incrément de la fonction**.
- ⋆ $\Delta x := x - x_0$ représente l'**incrément de la variable**.

D'un point de vue quantitatif, ces deux incréments sont petits lorsque x est proche de x_0 ; Δf dit exactement de combien f varie lorsque x s'écarte de x_0 d'une distance Δx :



Ensuite, l'existence de la dérivée,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \,,$$

signifie que quand l'incrément Δx est petit, alors Δf est essentiellement proportionnel à Δx, la constante de proportionnalité étant $f'(x_0)$:

$$\Delta f \simeq f'(x_0)\Delta x$$

On conclut que *la dérivée $f'(x_0)$ représente le* **taux d'accroissement local** *de f en x_0* : si on varie la variable de x_0 à $x_0 + \Delta x$, alors la valeur de la fonction passe de $f(x_0)$ à $f(x_0) + \Delta f$, où Δf est essentiellement proportionnel à Δx, comme dans la relation ci-dessus.

Informel 9.8. Si on admet pendant un instant qu'il est possible de considérer des incréments *infiniment petits*, de la fonction et de la variable, que l'on notera respectivement df et dx, alors la dérivabilité de f en x_0 signifie que ces deux infiniment petits sont proportionnels, la constante de proportionalité étant précisément la dérivée en x_0 :

$$df = f'(x_0)dx\,.$$

La notation suivante, appelée **notation de Leibniz**, est donc naturelle :

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

9.1.3 Dérivabilité implique continuité

On l'a dit, pour que f soit dérivable en x_0, il faut que sa droite tangente soit bien définie ; elle doit être assez *lisse* en x_0. En particulier, son graphe ne peut pas faire de saut en x_0 :

Lemme 19. *Si f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0.*

Preuve: Si f est dérivable en x_0, alors en multipliant et divisant par $x - x_0$,

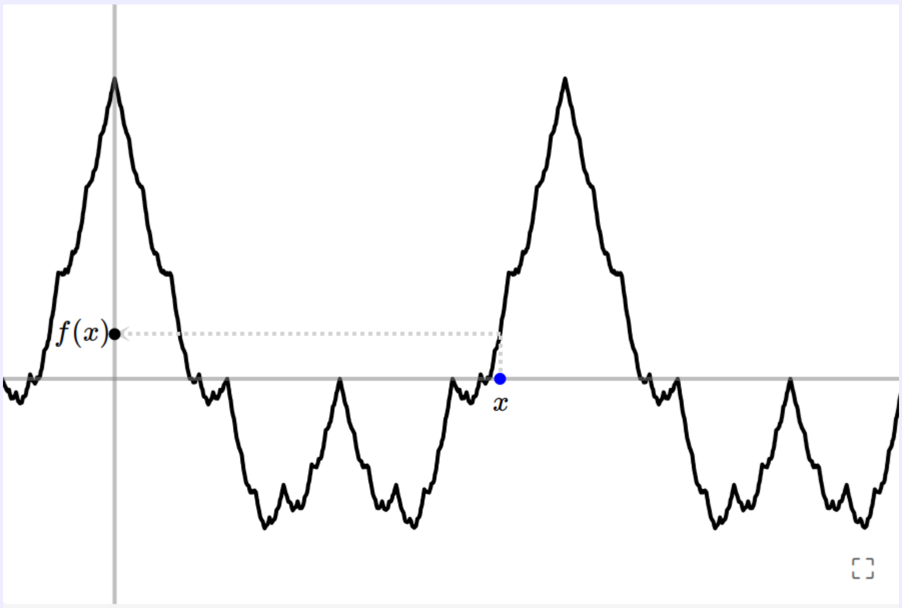
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0} \underbrace{\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]}_{\to f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \\ &= f'(x_0)\cdot 0 \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, et donc f est continue en x_0. □

Remarque 9.9. Attention, la réciproque de l'affirmation du lemme n'est pas vraie. C'est-à-dire que "continuité" n'implique pas "dérivabilité". Par exemple, on a vu que $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$, pourtant elle est bien continue en ce point. ◇

Informel 9.10. On a vu ci-dessus plusieurs façons de construire une fonction qui est continue mais pas dérivable *en un point*. Il est naturel de se poser la question de savoir s'il existe des fonctions qui sont *continues partout mais dérivables nulle part*.

Considérons
$$f(x) := \sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(9^n x)}{2^n}\,.$$
Puisque
$$0 \leqslant \left|\frac{\cos(9^n x)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\,,$$
cette fonction est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$; elle est paire. Avec un peu plus de travail, on peut montrer qu'elle est aussi continue sur $\mathbb{R}$. Et avec encore un peu plus de travail, on peut montrer qu'elle n'est dérivable en *aucun point* de $\mathbb{R}$.



Quiz 9.1.1. *Soit f dérivable en x_0, dont la dérivée est notée $f'(x_0)$. Alors*

1) ☐ *le nombre $f(x_0)$ est bien défini*

2) ☐ $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$

3) ☐ $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(2x_0 + h) - f(2x_0)}{h} = 2f'(x_0)$

4) ☐ $\displaystyle\lim_{z\to x_0} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} = f'(x_0)$

5) ☐ $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h^2) - f(x_0)}{h} = 0$

6) ☐ $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h)^2 - f(x_0)^2}{h} = f'(x_0)^2$

Quiz 9.1.2. *Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en x_0. et soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x < x_0\,, \\ g(x) & \text{si } x \geqslant x_0\,. \end{cases}$$

Alors h est dérivable en x_0, et $h'(x_0) = g'(x_0)$.

1) □ *VRAI*
2) □ *FAUX*

Quiz 9.1.3. *Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0, dérivable en x_0. Vrai ou faux ?*

1) □ *f est continue en x_0.*
2) □ *Si $f(x_0) = 2$, alors $f'(x_0) = 0$.*
3) □ ⚠ *f est dérivable dans tout un voisinage de x_0.*
4) □ *f est continue dans un voisinage de x_0.*
5) □ *Il existe $\delta > 0$ tel que sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, le graphe de f est une droite.*
6) □ *Il existe $\delta > 0$ tel que f est monotone sur $]x_0 - \delta, x_0]$ et sur $[x_0, x_0 + \delta[$.*

9.2 Dérivée et approximation linéaire

Répétons l'intérêt *géométrique* de la dérivabilité : lorsque f est dérivable au point x_0, le nombre $D = f'(x_0)$ représente la pente de la droite tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. Mais la dérivabilité représente aussi un intérêt *analytique*, puisqu'elle fournit une façon particulière de représenter la fonction au voisinage de x_0.

Commençons par illustrer ce fait sur un exemple simple :

Exemple 9.11. Considérons $f(x) = x^2$ au voisinage de $x_0 = 1$. On a déjà vu dans la section précédente que f était dérivable en $x_0 = 1$, puisque

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = 2\,.$$

Si on définit, pour tout $x \neq 1$,

$$r_1(x) := \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} - 2\,,$$

alors

$$\lim_{x \to 1} r_1(x) = 0\,.$$

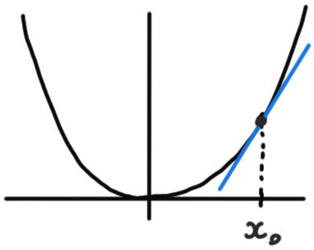
On peut de plus écrire

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2 + (x^2 - 1^2) \\ &= 1^2 + \frac{x^2 - 1^2}{x - 1}(x - 1) \\ &= 1^2 + \Big(2 + \big(\frac{x^2 - 1^2}{x - 1} - 2\big)\Big)(x - 1) \\ &= 1^2 + \big(2 + r_1(x)\big)(x - 1) \\ &= \underbrace{1^2}_{=f(1)} + \underbrace{2}_{f'(1)}(x - 1) + r_1(x)(x - 1) \end{aligned}$$

En d'autres termes, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + (f'(1) + r_1(x))(x-1) \\ &= f(1) + f'(1)(x-1) + r_1(x)(x-1) \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto f(1) + f'(1)(x-1)$ n'est autre que l'équation de la droite tangente au graphe de x^2 en $x_0 = 1$; elle *approxime* les valeurs de $f(x)$ lorsque x est proche de x_0 :



$$f(x) \simeq f(1) + f'(1)(x-1)$$

Puis, le terme "$+r_1(x)(x-1)$" est la correction qui donne l'écart entre la *vraie* fonction et son approximation. ◇

Ce que nous venons d'apprendre dans le cas $f(x) = x^2$ est vrai plus généralement :

Théorème 9.12. *Soit f une fonction définie en x_0 et dans son voisinage. Alors : f est dérivable en x_0 et sa dérivée en ce point vaut $f'(x_0) = D$ si et seulement si il existe une fonction $r_{x_0}(x)$ définie dans un voisinage épointé de x_0 telle que $\lim_{x\to x_0} r_{x_0}(x) = 0$, et telle que f peut être représentée, dans ce voisinage, comme suit :*

$$f(x) = f(x_0) + (D + r_{x_0}(x))(x - x_0)\,.$$

Preuve: Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = D$, alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D\,,$$

que l'on peut écrire

$$\lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - D \right\} = 0\,.$$

Donc si on définit la fonction

$$r_{x_0}(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - D\,,$$

alors par ce qui est écrit au-dessus, cette dernière satisfait $\lim_{x\to x_0} r_{x_0}(x) = 0$. De plus, en isolant $f(x)$ dans la définition de r_{x_0}, on voit que

$$f(x) = f(x_0) + (D + r_{x_0}(x))(x - x_0)\,.$$

Inversément, si cette relation est satisfaite pour une fonction r_{x_0} satisfaisant $\lim_{x\to x_0} r_{x_0}(x) = 0$, alors

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D + r_{x_0}(x)\,,$$

et la limite de ce quotient existe puisque

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D + \lim_{x\to x_0} r_{x_0}(x) = D\,,$$

ce qui implique que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = D$. □

Une fonction dérivable en x_0 peut donc s'écrire

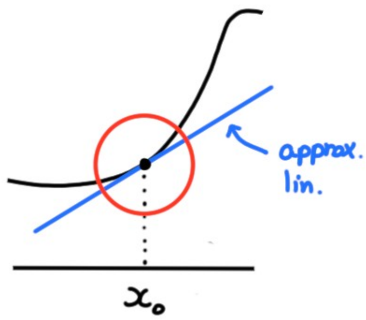
$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + (f'(x_0) + r_{x_0}(x))(x - x_0)\\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_{x_0}(x)(x - x_0)\,,\end{aligned}$$

où $\lim_{x\to x_0} r_{x_0}(x) = 0$.

Cette représentation est utile si on considère x proche de x_0, car dans ce cas le terme $r_{x_0}(x)(x - x_0)$ est petit, et si on le *néglige*, on obtient une approximation de f au voisinage de x_0, appelée l'**approximation linéaire** :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Cette approximation est celle qui consiste simplement à approximer le graphe de f, proche de x_0, par celui de sa droite tangente au point $(x_0, f(x_0))$:



9.2.1 Sur les deux premiers niveaux de régularité d'une fonction

On a pour l'instant deux notions de régularité pour une fonction f au voisinage d'un point x_0. Décrivons ce qu'elle représente en qualité d'approximation.

- ⋆ La *continuité* : Si f est continue en x_0, alors les valeurs de $f(x)$ sont proches de $f(x_0)$ lorsque x est proche de x_0, qui est une **approximation d'ordre zéro** de f au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) \simeq f(x_0)}$$

- ⋆ La *dérivabilité* : Si f est dérivable en x_0, alors elle peut être représentée comme ci-dessus, et si on néglige $r_{x_0}(x)$, on obtient l'**approximation linéaire**, appelée aussi **approximation du premier ordre**, de f au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

L'approximation à l'ordre zéro revient à approximer $f(x)$ par la constante $f(x_0)$, mais l'approximation linéaire est plus précise, puisqu'elle tient compte de comment f *varie* au voisinage de x_0 !

Comparons ces approximations sur un exemple simple :

Exemple 9.13. Supposons que l'on veuille calculer 1.998^4.

Écrivons $1.998^4 = f(1.998)$, où $f(x) = x^4$. Ce que l'on aimerait faire est donc d'estimer la valeur de f en un point $x = 1.998$ qui est proche de $x_0 = 2$.

- ⋆ À l'ordre zéro,

$$1.998^4 = f(1.998) \simeq f(2) = 2^4 = 16\,.$$

⋆ Au premier ordre,

$$\begin{aligned} 1.998^4 = f(1.998) &\simeq f(2) + f'(2)(1.998 - 2) \\ &= 2^4 + 4 \cdot 2^3(1.998 - 2) \\ &= 15.936 \end{aligned}$$

Sachant que la vraie valeur est $1.998^4 = 15.9360959...$, l'approximation à l'ordre zéro représente donc une erreur d'environ 0.4%, alors que celle du premier ordre, moins de 0.001% ! ◇

Nous verrons plus tard comment aller au-delà de l'approximation linéaire, lorsque nous calculerons des *développements limités*.

9.3 Règles de dérivation

(ici, Video: v_derivee_regles.mp4)

Pour l'instant, la dérivée associe à une fonction f et un point x_0 le nombre $f'(x_0)$. Si on sait calculer la dérivée en chaque point x_0 du domaine de f, la dérivée devient une nouvelle fonction,

$$x_0 \mapsto f'(x_0)\,,$$

et comme on aimerait plutôt voir x_0 comme un variable, on écrira plutôt

$$x \mapsto f'(x)\,.$$

On dira que f, définie sur un ouvert, est **dérivable** si elle est dérivable en tout point x_0 de son ensemble de définition, et donc si sa **dérivée** f' est définie en tout point de cet ouvert.

Exemple 9.14. La fonction $f(x) := x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est donnée par $f'(x) = 2x$. En effet, pour un $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0^2 + 2x_0 h + h^2) - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) \\ &= 2x_0\,. \end{aligned}$$

◇

9.3.1 Sommes et produits

Pour commencer, montrons que si deux fonctions sont dérivables en un point, alors leur somme et leur produit le sont aussi, et donnons les expressions des dérivées de ces fonctions :

Proposition 9. *Soient f, g dérivables en un point x_0. Alors la somme et le produit de f et g sont dérivables en x_0, et*

1) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

La deuxième propriété implique en particulier que pour toute constante C,

$$(Cf(x)') = Cf'(x)\,.$$

Preuve: En écrivant la définition de la dérivée de $f+g$ en x_0 et en réarrangeant un peu les termes,

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\Big\{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\Big\}\\ &= f'(x_0)+g'(x_0)\,.\end{aligned}$$

Cette dernière montre que $f+g$ est dérivable en x_0, et que sa dérivée en ce point vaut $f'(x_0)+g'(x_0)$. Par définition, la dérivée de $f\cdot g$ en x_0 est

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

En insérant $\pm f(x_0)g(x)$ au numérateur, et en réarrangeant l'expression obtenue,

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)}\underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)}+f(x_0)\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)}\end{aligned}$$

Dans cette dernière ligne, on a utilisé le fait que f et g sont toutes deux dérivables en x_0. On a également utilisé le fait suivant : puisque g est dérivable en x_0, elle est continue en ce point, et donc $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. □

9.3.2 Composées et quotients

Rappelons que la composée de deux fonctions f et g, lorsqu'elle est bien définie, est donnée par $(f\circ g)(x) := f(g(x))$.

Proposition 10. *Soit g dérivable au point x_0, et f dérivable au point $a=g(x_0)$. Alors $f\circ g$ est dérivable au point x_0, et*

$$\boxed{(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)}$$

Preuve: Étudions

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{(f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}\,.$$

- ⋆ Puisque g est dérivable en x_0, il existe une fonction r_{x_0} telle que

$$g(x_0+h) = \underbrace{g(x_0)}_{=a}+\underbrace{(g'(x_0)+r_{x_0}(h))h}_{=:H}\,.$$

  Remarquons que $H\to 0$ lorsque $h\to 0$.

⋆ Puis, comme f est dérivable en a, il existe une fonction $\tilde{r}_a(H)$ telle que

$$f(a+H) = f(a) + (f'(a) + \tilde{r}_a(H))H\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(g(x_0+h)) = f(a+H) &= f(a) + (f'(a) + \tilde{r}_a(H))H \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))H + \tilde{r}_a(H)H\,, \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{(f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} &= \big(f'(g(x_0)) + \tilde{r}_a(H)\big)\frac{H}{h} \\ &= \big(f'(g(x_0)) + \tilde{r}_a(H)\big)(g'(x_0) + r_{x_0}(h)) \end{aligned}$$

Mais lorsque $h \to 0$, $\tilde{r}_a(H) \to 0$ et $r_{x_0}(h) \to 0$, et donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = f'(g(x_0))g'(x_0),$$

ce qu'on voulait démontrer. □

Comme conséquence, on peut maintenant dériver d'autres types de fonctions, comme des quotients :

Proposition 11. *Soient f, g dérivables en x_0. Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0, et*

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\,.$$

Preuve: On commence par utiliser la règle de dérivation d'une composée pour dériver l'inverse de g en x_0 :

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\,.$$

On voit ensuite le quotient comme un produit, on dérive ce produit, et on met tout le monde au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) = \Big(f\cdot\frac{1}{g}\Big)'(x_0) &= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x_0) \\ &= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\Big(\frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}\Big) \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\,. \end{aligned}$$

□

Remarque 9.15. On n'a pas, pour l'instant, de formule pour des dérivées du type $(f(x)^{g(x)})'$. Pour dériver ce genre de fonctions, on prendra garde à ce que $f(x) > 0$ dans le voisinage du point considéré, et on commencera toujours par **exponentier** $f(x)$: puisque $f(x) > 0$,

$$f(x) = e^{\log(f(x))}\,.$$

On devrait donc considérer

$$f(x)^{g(x)} := e^{g(x)\log(f(x))}$$

comme une *définition*. On calculera la dérivée de cette dernière à l'aide des règles de base :

$$(e^{g(x)\log(f(x))})' = e^{g(x)\log(f(x))}(g(x)\log(f(x)))'\,.$$

On pourra calculer la dérivée de cette parenthèse une fois connue la dérivée du logarithme (section suivante). ⋄

Quiz 9.3.1. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Si f et g sont dérivables en x_0, alors $f \cdot g$ est dérivable en x_0.*
2) □ *Si f et g ne sont pas dérivables en x_0, alors $f \cdot g$ ne l'est pas non plus.*
3) □ *Si f et g sont dérivables en x_0, et si $g'(x_0) = 0$, alors $\frac{f}{g}$ n'est pas dérivable en x_0.*
4) □ *Si f est dérivable en x_0 mais g n'est pas dérivable en x_0, alors $f \cdot g$ n'est pas dérivable en x_0.*
5) □ *Si f et g sont dérivables en x_0, et si $(f \cdot g)'(x_0) = 0$, alors $f'(x_0) = 0$ ou $g'(x_0) = 0$.*

9.4 Dérivées des fonctions élémentaires

(ici, Video: `v_derivee_fondamentales.mp4`)

Les règles de dérivation vues dans la section précédente permettent de calculer, en principe, la dérivée de n'importe quelle fonction, tant que celle-ci est obtenue par combinaisons (sommes ou différences, produits ou quotients, composées) d'autres fonctions plus simples que l'on sait déjà dériver. Il est donc important de connaître les dérivées des fonctions élémentaires.

Ci-dessous, $(\dots)'$ indique la dérivation par rapport à la variable x.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

Preuve: On démontre la formule par récurrence sur n. La formule est valide pour $n = 1$ et $n = 2$ (voir plus haut). Si on suppose la formule valide pour n, alors par la règle de dérivation d'un produit,

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n\,.$$

□

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x\,.}$$

Preuve: Montrons que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \cos(x_0)\,.$$

En utilisant la formule de trigonométrie pour le sinus d'une somme,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\,,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} &= \frac{\big(\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h)\big) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \sin(x_0)\underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1}\cos(x_0)\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a fait

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} h\frac{\cos(h) - 1}{h^2} = 0 \cdot (-\tfrac{1}{2}) = 0\,.$$

□

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x\,.}$$

Preuve: On utilise le fait que $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, et la formule pour la dérivée d'une composée :

$$\begin{aligned}(\cos(x))' &= (\sin(\tfrac{\pi}{2} - x))' \\ &= \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) \cdot (\tfrac{\pi}{2} - x)' \\ &= \sin(x) \cdot (-1)\end{aligned}$$

□

$$\boxed{(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos(x)^2}\,.}$$

Preuve: Par la formule pour la dérivée d'un quotient,

$$(\tan(x))' = \Big(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\Big)' = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2}$$

□

$$\boxed{(\log x)' = \frac{1}{x}\,, \qquad x > 0\,.}$$

Preuve: On calcule, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}(\log(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x(1+\frac{h}{x})) - \log(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\log(x) + \log(1+\frac{h}{x})) - \log(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+\frac{h}{x})}{h} \\ &= \frac{1}{x}\Big\{\lim_{h\to 0} \frac{\log(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\Big\} \\ &= \frac{1}{x}\Big\{\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t}\Big\} \\ &= \frac{1}{x}\,.\end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière ligne, on a posé $t = \frac{h}{x}$, et utilisé le fait que si $h \to 0$, alors $t \to 0$. On a ensuite utilisé $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$, que nous avons étudiée **ici** (lien vers la section m_fonctions_limite_quelques_limites). □

$$\boxed{(e^x)' = e^x\,.}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= e^x \left\{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}\right\} \\ &= e^x\end{aligned}$$

Voir les commentaires sur **blackpenredpen** (lien web). □

$$\boxed{(a^x)' = \log(a)a^x}\,.$$

Preuve: En exponentiant, $a = e^{\log(a)}$,

$$\begin{aligned}(a^x)' &= (e^{x\log(a)})'\\ &= \log(a)e^{x\log(a)}\\ &= \log(a)a^x\,.\end{aligned}$$

□

$$\boxed{(\log_a(x))' = \frac{1}{x\log(a)}}$$

Preuve: Par la formule du changement de base pour le logarithme,

$$(\log_a(x))' = \Big(\frac{\log(x)}{\log(a)}\Big)' = \frac{1}{\log(a)}(\log(x))' = \frac{1}{\log(a)}\cdot\frac{1}{x}\,.$$

□

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\,,\quad x > 0\,.}$$

Preuve: En exponentiant, $x = e^{\log(x)}$ ($x > 0$),

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha\log(x)})' = e^{\alpha\log(x)}(\alpha\log(x))' = x^\alpha\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

□

Exemple 9.16. Considérons, pour $x > 0$, la fonction

$$h(x) = x^x\,.$$

Remarquons que $h(x)$ n'est ni de la forme x^α, ni de la forme a^x, mais bien du type $f(x)^{g(x)}$, on doit donc la considérer comme définie à l'aide d'une exponentiation :

$$h(x) := e^{x\log(x)}\,.$$

On la dérive alors en utilisant les règles de dérivation :

$$\begin{aligned}h'(x) = (e^{x\log(x)})' &= e^{x\log x}(x\log x)'\\ &= (\log(x) + x\tfrac{1}{x})e^{x\log x}\\ &= (\log(x)+1)x^x\,.\end{aligned}$$

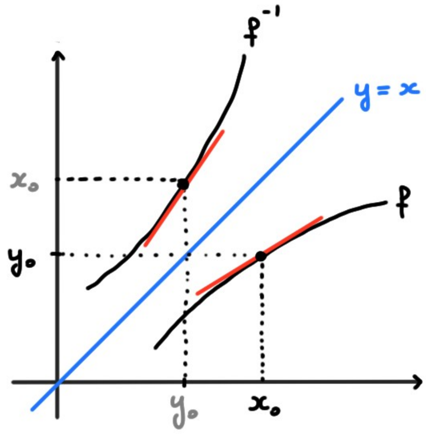
◇

Quiz 9.4.1. *Soit* $f(x) = \sin(\cos(\tan(x)))$. *Alors pour tout* $x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

1) □ $f'(x) = \cos(-\sin(1+\tan^2(x)))$
2) □ $f'(x) = \cos(\cos(\tan(x)))\sin(\tan(x))/(1-\sin^2(x))$
3) □ $f'(x) = \cos^2((1+\tan^2(x))$
4) □ $f'(x)^2 = \big(1-\sin^2(\cos(\tan(x)))\big)\sin^2(\tan(x))/\cos^4(x)$

9.5 Dérivée d'une fonction réciproque

Rappelons que le graphe de la fonction réciproque f^{-1} est le réfléchi du graphe de f à travers la diagonale :



Or la réflexion d'une droite de pente $m \neq 0$ à travers la diagonale est une droite de pente $\frac{1}{m}$. On s'attend donc à ce que la dérivée de f^{-1} au point (y_0, x_0) soit égale à l'inverse de la dérivée de f au point (x_0, y_0) :

Théorème 9.17. *Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert, et $f : I \to F$ une fonction bijective (en particulier, $F = \mathrm{Im}(f)$), dont la réciproque est notée $f^{-1} : F \to I$. Soit encore $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Preuve: Pour étudier la dérivée de la réciproque f^{-1} au point $y_0 = f(x_0)$, on considère le quotient est

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}.$$

Comme f est bijective, on peut associer à tout y proche de y_0 son unique préimage, $x = f^{-1}(y)$. Clairement, $y \to y_0$ implique $x \to x_0$. On peut donc récrire la limite

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Puisque $f'(x_0) \neq 0$, le dénominateur de cette dernière fraction est non nul dès que x est suffisamment proche de x_0, c'est-à-dire lorsque y est suffisamment proche de y_0.

Maintenant, en prenant la limite,

$$\begin{aligned} \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\ &= \frac{1}{f'(x_0)} \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \end{aligned}$$

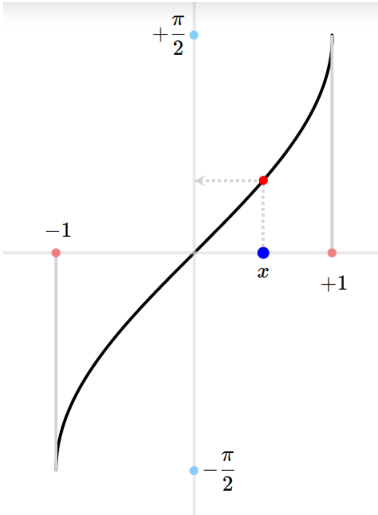
□

Informel 9.18. Pour se souvenir de la formule, on peut partir de la relation qui définit la fonction réciproque
$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall y \in F\,.$$
Puis, *en supposant que la réciproque est dérivable*, dériver par rapport à y des deux côtés. Du côté gauche, on dérive une composée, donc
$$f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1\,.$$
On retrouve donc bien
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Exemple 9.19. Supposons qu'on connaît $(e^x)' = e^x$ mais qu'on ne sait plus dériver $\log(x)$. Comme elles sont réciproques l'une de l'autre, que $f(x) = e^x$ est dérivable partout et que sa dérivée n'est jamais nulle, on a
$$e^{\log(y)} = y\,,$$
que l'on dérive par rapport à y,
$$\underbrace{e^{\log(y)}}_{=y}(\log(y))' = 1$$
On retrouve alors :
$$(\log(y))' = \frac{1}{y}\,.$$
◇

Dérivons maintenant les réciproques des fonctions trigonométriques.

Exemple 9.20. Rappelons que la réciproque du sinus est
$$\begin{aligned} \arcsin : [-1,1] &\to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \\ x &\mapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$
Par définition,
$$y = \sin(\arcsin(y)) \qquad \forall y \in [-1,1]$$
Puisque la dérivée du sinus ne s'annule nulle part sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, le théorème garantit que $\arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$. En prenant la dérivée par rapport à y des deux côtés de cette dernière identité : si $y \in]-1,1[$,
$$1 = \big(\sin(\arcsin(y))\big)' = \cos(\arcsin(y))(\arcsin(y))'\,.$$
Comme l'angle $\arcsin(y) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, son cosinus est positif, et donc
$$\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-\sin(\arcsin(y))^2} = \sqrt{1-y^2}\,.$$
On a donc
$$\boxed{(\arcsin(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \forall y \in]-1,1[}$$



◇

Exemple 9.21. Rappelons que la réciproque du cosinus est

$$\begin{aligned} \arccos : [-1,1] &\to [0,\pi] \\ x &\mapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

Par définition,

$$y = \cos(\arccos(y)) \qquad \forall y \in [-1,1]$$

Puisque la dérivée du cosinus ne s'annule nulle part sur $]0,\pi[$, le théorème garantit que $\arccos$ est dérivable sur $]-1,1[$. On calcule sa dérivée en prenant la dérivée par rapport à y des deux côtés de cette dernière identité : si $y \in]-1,1[$,

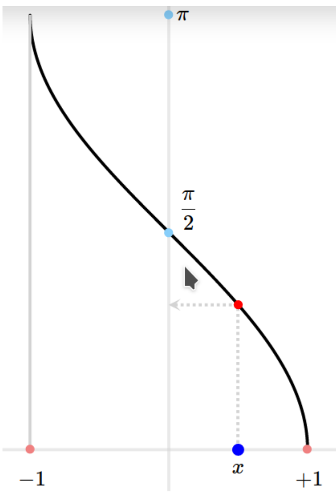
$$1 = \big(\cos(\arccos(y))\big)' = -\sin(\arccos(y))(\arccos(y))' .$$

Comme l'angle $\arccos(y) \in]0,\pi[$, son sinus est positif, et donc

$$\sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-\cos(\arccos(y))^2} = \sqrt{1-y^2} .$$

On a donc

$$\boxed{(\arccos(y))' = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \forall y \in]-1,1[}$$



◇

Exemple 9.22. Rappelons que la réciproque de la tangente est

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\to]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

Par définition,

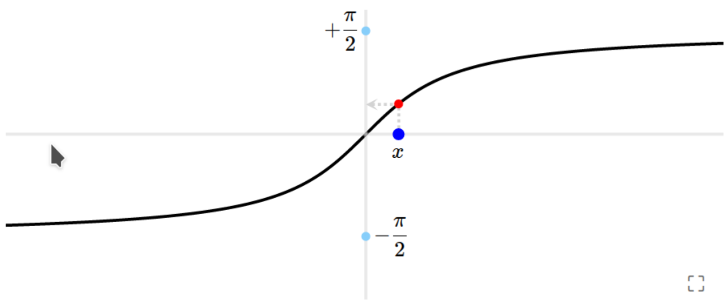
$$y = \tan(\arctan(y)) \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Comme la dérivée de la tangente ne s'annulle nulle part sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan$ est dérivable partout sur $\mathbb{R}$. En dérivant rapport à y des deux côtés de cette dernière identité,

$$\begin{aligned} 1 &= \big(\tan(\arctan(y))\big)' \\ &= (1+\tan^2(\arctan(y)))(\arctan(y))' \\ &= (1+y^2)(\arctan(y))' \,. \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{(\arctan(y))' = \frac{1}{1+y^2} \qquad \forall y \in \mathbb{R}\,.}$$



◇

Quiz 9.5.1. *Soient I,J deux intervalles ouverts, et $f : I \to J$ une bijection dérivable. Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Comme f est dérivable sur I, f^{-1} est dérivable sur J.*
2) ☐ *Si f^{-1} est dérivable sur J, alors $(f^{-1})' = (f')^{-1}$.*
3) ☐ *Pour tout $y \in J$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(y)}$.*
4) ☐ *Si x est tel que $f'(x) \neq 0$, et si $y = f(x)$, alors $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.*

9.6 Dérivées latérales

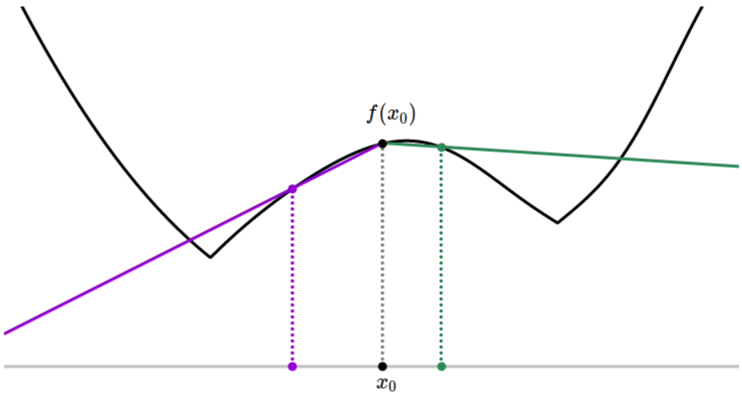
Pour parler de la *dérivabilité* d'une fonction en un point x_0, il faut que cette fonction soit définie dans un voisinage épointé de x_0. Ceci signifie en particulier que f doit être définie *des deux côtés de x_0*.

Si f n'est définie que d'un côté de x_0, on peut tout de même introduire une notion de *dérivée latérale* :

Définition 9.23. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

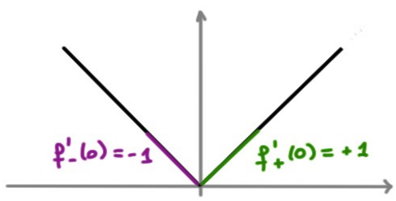
- Soit f définie en x_0 et dans un voisinage à gauche. On dit que f est **dérivable à gauche en** x_0 si le nombre $f'_-(x_0)$ défini par la limite
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existe (et est fini). On appelle $f'_-(x_0)$ la **dérivée à gauche en** x_0.
- Soit f définie en x_0 et dans un voisinage à droite. On dit que f est **dérivable à droite en** x_0 si le nombre $f'_+(x_0)$ défini par la limite
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existe (et est fini). On appelle $f'_+(x_0)$ la **dérivée à droite en** x_0.

Observons que la dérivabilité à gauche (resp. à droite) en x_0 implique qu'il existe une droite tangente à gauche (resp. à droite) au point $(x_0, f(x_0))$.



Il peut donc exister des fonctions qui peuvent être dérivables à gauche ou à droite en un point, mais sans être dérivable en ce point.

Exemple 9.24. On sait que $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$:



Pourtant, ses dérivées latérales existent en 0, puisque
$$f'_\pm(0) = \lim_{x \to 0\pm} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0\pm} \frac{\pm x}{x} = \pm 1\,.$$
◇

L'existence et l'égalité des dérivées latérales en un point entraîne la dérivabilité en ce point :

Théorème 9.25. *f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_-(x_0)$ et $f'_+(x_0)$ existent et sont égales (et dans ce cas, $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$).*

Preuve: Par définition,

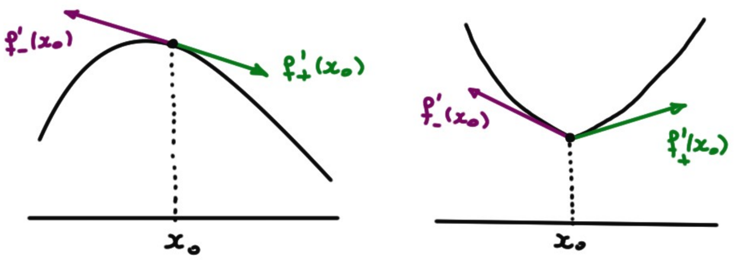
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,,$$
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Donc ces deux limites existent et sont égales si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et prend la même valeur. □

Informel 9.26. Donc si les dérivées latérales existent et sont égales, la fonction est dérivable (image de gauche ci-dessous), et si les dérivées latérales existent toutes les deux mais que leurs valeurs sont différentes, alors la fonction n'est pas dérivable, et son graphe fait un "coude" au point x_0 (image de droite ci-dessous) :



9.6.1 Fonctions définies par morceaux

Soient f, g deux fonctions définies sur toute la droite, et $x_* \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction f suivante, définie par morceaux :

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leqslant x_*\,, \\ h(x) & \text{si } x > x_*\,. \end{cases}$$

Si f est continue en x_*, on pourra tester la dérivabilité de f en x_*, par le théorème précédent, en calculant les dérivées latérales de f en x_*, et en vérifiant qu'elle sont égales.

Exemple 9.27. Étudions la dérivabilité de

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = 3 - x^2 & \text{si } x \leqslant 1\,, \\ h(x) = x^3 - 3x^2 + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

au point $x_* = 1$. Remarquons que f est continue en ce point puisque

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = 2 = \lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)\,,$$

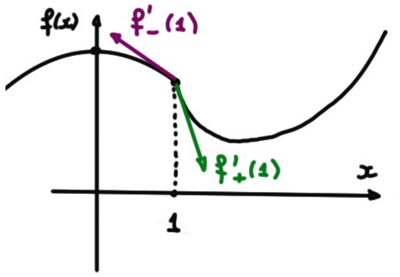
qui est également égale à $f(1) = 2$.

Pour tester la dérivabilité,

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(3 - x^2) - 2}{x - 1} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{h(x)-g(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^3-3x^2+4)-2}{x-1} = -3 \end{aligned}$$

Comme $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, f n'est pas dérivable en 1.



◇

Exemple 9.28. Soit

$$f(x) := \begin{cases} x^2+ax+1 & \text{si } x<0\,, \\ \sin(2x)+b & \text{si } x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Remarquons qu'en dehors de 0, f est partout dérivable, quelles que soient les valeurs de a et b. Déterminons les paramètres a, b de manière à ce que f soit dérivable en $x_0 = 0$.

Pour être dérivable en 0, il faut d'abord que f soit continue en 0. Commençons donc par assurer que f est continue en 0. Pour cela, remarquons que $f(0) = \sin(2\cdot 0) + b = b$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\sin(2x)+b) = b\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+ax+1) = 1\,.$$

Pour avoir la continuité en 0, on doit donc imposer $b=1$.

Passons à la dérivabilité en 0. Puisqu'on peut dorénavant considérer que $b=1$, on calcule d'abord

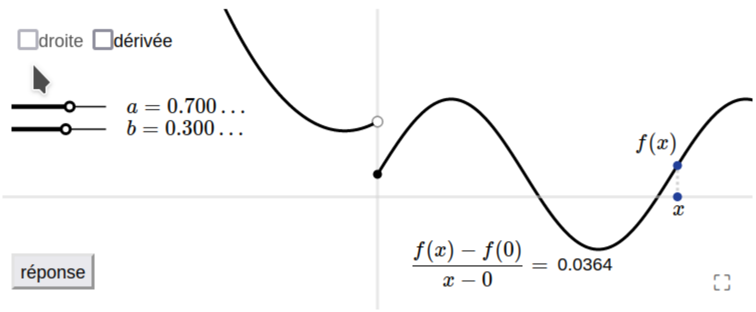
$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(h^2+ah+1)-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} (a+h) = a\,, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(\sin(2h)+1)-1}{h} \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin(2h)}{h} = 2\,. \end{aligned}$$

Comme f est dérivable en 0 si et seulement si $f'_-(0) = f'_+(0)$, la seule possibilité est d'imposer $a=2$.

◇



Quiz 9.6.1. *Soit f définie en x_0 et dans son voisinage. Vrai ou faux ?*

1) □ *Si $f'_-(x_0)$ existe, alors f est continue à gauche en x_0.*
2) □ *Si $f'_+(x_0) = 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que soit $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour tout $x_0 < x \leqslant x_0 + \delta$, soit $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x_0 < x \leqslant x_0 + \delta$.*
3) □ *Si $f'_-(x_0)$ et $f'_+(x_0)$ existent mais sont différentes, alors f n'est pas dérivable en x_0.*
4) □ *Si $f'_+(x_0)$ existe, alors il existe $\delta > 0$ tel que f est dérivable sur $]x_0, x_0 + \delta[$.*

9.7 Dérivées d'ordres supérieurs

On verra, plus tard, que les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction jouent un rôle important dans l'analyse fine de cette fonction au voisinage d'un point (voir en particulier la *Formule de Taylor*).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable en chaque point de l'intervalle ouvert I. On note sa dérivée, qui est la **première dérivée**,

$$f^{(1)} := f' .$$

Ensuite, si $f^{(1)} : I \to \mathbb{R}$ est elle-même dérivable, on dit que f est **deux fois dérivable sur** I, et on note sa deuxième dérivée comme suit :

$$f^{(2)} := (f^{(1)})' .$$

Aussi, pour $k \geqslant 2$, si la $(k-1)$-ème dérivée $f^{(k-1)} : I \to \mathbb{R}$ existe et est dérivable sur I, on dit que f est k **fois dérivable sur** I, et on note sa k-ème dérivée comme suit :

$$f^{(k)} := (f^{(k-1)})' .$$

Remarquons que si $f^{(k)}$ existe, cela entraîne que $f^{(k-1)}$ est dérivable, et donc en particulier continue.

Exemple 9.29. Si $f(x) = x^m$, alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= mx^{m-1} \\
f^{(2)}(x) &= m(m-1)x^{m-2} \\
f^{(3)}(x) &= m(m-1)(m-2)x^{m-3} \\
&\vdots \\
f^{(m)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = m! .
\end{aligned}$$

Puisque $f^{(m)}$ est une fonction constante, les dérivées d'ordre supérieur à m sont toutes nulles : pour tout $k > m$,

$$f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

◇

Exemple 9.30. Si $f(x) = \sin(\omega x)$, où ω est une constante. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \omega\cos(\omega x) \\ f^{(2)}(x) &= -\omega^2\sin(\omega x) \\ f^{(3)}(x) &= -\omega^3\cos(\omega x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

On peut écrire explicitement la k-ème dérivée, comme une fonction de k. En effet, en utilisant les relations

$$\begin{aligned} \sin(z+\tfrac{\pi}{2}) &= \cos(z)\,, \\ \sin(z+\pi) &= -\sin(z)\,, \end{aligned}$$

on a

$$f^{(k)}(x) = \omega^k \sin(\omega x + k\tfrac{\pi}{2})\,.$$

◇

Remarque 9.31. On ne peut pas toujours exprimer une grande dérivée aussi explicitement en fonction de k ! ◇

9.8 Fonctions continûment dérivables

(ici, Video: `v_derivee_C1.mp4`)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert.

Un premier niveau de régularité que l'on a rencontré, pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, est celui de *continuité*. Ensuite, on a vu que la *dérivabilité* est un niveau de régularité plus fort (dans le sens où toute fonction dérivable est continue).

Il est naturel d'introduire un niveau de régularité encore supérieur, plus fort que la dérivabilité, en exigeant que la dérivée soit elle-même continue :

Définition 9.32. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable en tout point de I. Si $f' : I \to \mathbb{R}$ est continue, on dit que f est **continûment dérivable** sur I. On note $C^1(I)$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur I.

Exemple 9.33. Sur $I = \mathbb{R}$, considérons $f(x) = x^2\sin(x)$. Puisque f est un produit d'un polynôme (dérivable) par un sinus (dérivable aussi), elle est dérivable. De plus,

$$f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)\,.$$

Comme f' est une combinaison linéaire de produits de polynômes par des sinus et cosinus, elle est elle-même continue. On en déduit que f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$: $f \in C^1(\mathbb{R})$. ◇

Exemple 9.34. Sur $]0,1[$, considérons $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors f est dérivable sur $]0,1[$ et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Comme f' est aussi continue sur $]0,1[$, ceci implique que f est continûment dérivable sur $]0,1[$: $f \in C^1(]0,1[)$. ◇

Les polynômes, les fonctions trigonométriques, etc. sont des fonctions continûment dérivables sur leur ensemble de définition.

Bien-sûr, une fonction qui n'est pas dérivable en un point n'est pas continûment dérivable. Mais il est aussi possible qu'une fonction soit dérivable partout, sans être continûment dérivable :

Exemple 9.35. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{5} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

On remarque que f est continue en tout point, en particulier en 0 puisque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)\,.$$

Ensuite, f est dérivable en tout point $x \neq 0$. Sur $\mathbb{R}^*$, sa dérivée se calcule à l'aide des règles de dérivation :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{5}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2x}{5}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{5}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,. \end{aligned}$$

Ensuite, f est aussi dérivable en 0, puisque

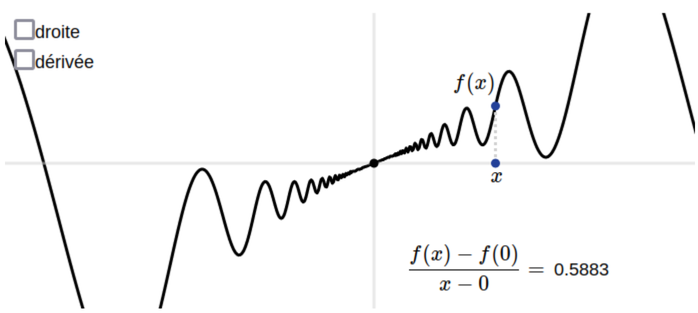
$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{5}\sin(\frac{1}{x}) - 0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{5}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Donc f est dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

Testons maintenant la *continuité de f'*. Clairement, f' est continue sur $\mathbb{R}^*$, puisque par l'expression ci-dessus ce n'est qu'une combinaison de fonctions continues :

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x}{5}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{5}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Pourtant, on remarque que lorsque $x \to 0$, $f'(x)$ n'a pas de limite, ce qui est dû à la présence de $\frac{1}{5}\cos(\frac{1}{x})$. Ce terme n'ayant pas de limite en 0, f' n'est pas continue en 0. Ceci fait de f une fonction qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas continûment dérivable. ◇



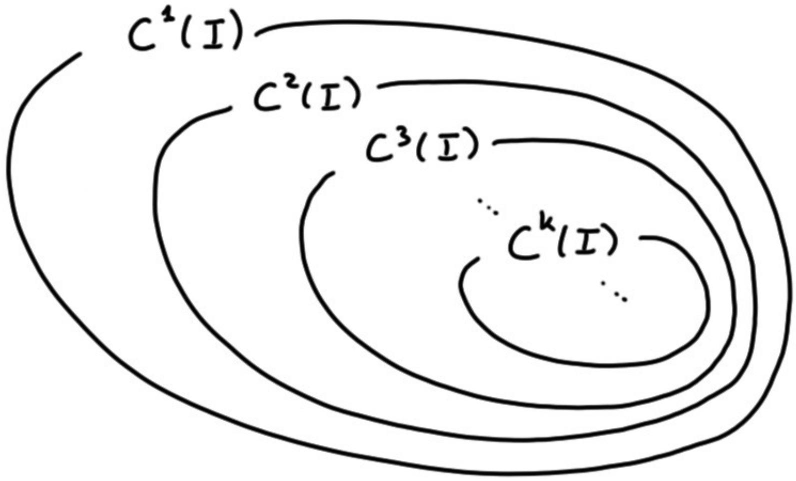
9.8.1 Fonctions k fois continûment dérivables

Définition 9.36. $C^k(I)$ désigne l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$, k fois dérivables, telles que $f^{(1)}, \dots, f^{(k)}$ existent et sont continues sur I. On dit qu'une telle fonction est **de classe** C^k **(sur** I**)**.

Informel 9.37. Plus l'indice k est grand, plus une fonction $f \in C^k$ est *régulière*.

Remarquons que si f est $k+1$ fois dérivable sur I, alors elle est de classe C^k. On a donc les inclusions suivantes :

$$C^1(I) \supset C^2(I) \supset \cdots \supset C^k(I) \supset C^{k+1}(I) \supset \cdots$$



Exemple 9.38. Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. Alors

$$f^{(1)}(x) = f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) = \cdots = f^{(k)}(x) = \cdots = e^x\,,$$

donc $f \in C^k(\mathbb{R})$ pour tout $k \geqslant 1$. ◇

Exemple 9.39. Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} +x^2 & \text{si } x \geqslant 0\,, \\ -x^2 & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Montrons que $f \in C^1(\mathbb{R})$. D'abord, f est clairement dérivable en tout point x_0. En effet, si $x > 0$ alors $f'(x) = (x^2)' = 2x$, et si $x < 0$ alors $f'(x) = (-x^2)' = -2x$. Il faut maintenant considérer $x_0 = 0$. Par un calcul direct,

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{+h^2}{h} = 0\,,$$
$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2}{h} = 0\,.$$

Donc $f'(0) = 0$. Ainsi, f est dérivable partout, et on peut écrire sa dérivée

$$f'(x) = \begin{cases} +2x & \text{si } x > 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,, \\ -2x & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Plus simplement :

$$f'(x) = 2|x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Puisque $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f' est continue sur $\mathbb{R}$, ce qui implique que $f \in C^1(\mathbb{R})$. Mais comme f' n'est pas dérivable en 0, on a aussi que $f \notin C^2(\mathbb{R})$. ◇

Quiz 9.8.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable en tout point $x \neq 0$. Vrai ou faux ?*

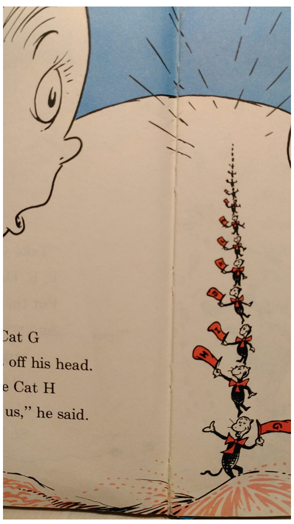
1) ☐ *f n'est pas dérivable en $x = 0$.*
2) ☐ *$f' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est continue.*
3) ☐ *Si $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$, alors f est dérivable en $x = 0$.*
4) ☐ *Si $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existe, alors f est continue en $x = 0$.*
5) ☐ *Si $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existe, alors $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe.*
6) ☐ *Si $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$ n'existent pas, alors f n'est pas dérivable en $x = 0$.*

Quiz 9.8.2. *(MAN 2021) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert. Parmi les conditions ci-dessous, lesquelles impliquent que f est continûment dérivable sur I ?*

1) ☐ *Pour tout $x_0 \in I$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ et la limite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.*
2) ☐ *Pour tout $x \in I$, la limite $g(x) := \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe, et $g : I \to \mathbb{R}$ est continue.*
3) ☐ *Il existe $x_0 \in I$ tel que f est continue et dérivable en x_0, et $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.*
4) ☐ *f est dérivable en tout $x_0 \in I$, et f' est dérivable en tout $x_0 \in I$.*

Quiz 9.8.3. *Soit $I =]a, b[$, $f : I \to \mathbb{R}$. Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Si $f \in C^1(I)$, alors f est continue sur I.*
2) ☐ *Si $f \in C^1(I)$, alors il n'existe aucun $x_0 \in I$ où f est deux fois dérivable.*
3) ☐ *Si $f^{(k)}$ existe, alors $f \in C^k(I)$.*
4) ☐ *Si $f \in C^1(I)$, alors $f' : I \to \mathbb{R}$ est bornée.*
5) ☐ *Si $f \in C^1(I)$, et si f' n'est pas bornée, alors f n'est pas bornée.*
6) ☐ *Si $f \in C^k(I)$, alors $f \in C^j(I)$ pour tout entier $1 \leqslant j < k$.*
7) ☐ *Si $f \in C^k(I)$, alors pour tout $x_0 \in I$ et tout $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\lim_{x\to x_0} f^{(j)}(x) = f^{(j)}(x_0)$.*
8) ☐ *Si $f'(x) = |x|$, alors $f \in C^1(I)$.*



9.9 Extréma locaux et le Théorème de Rolle

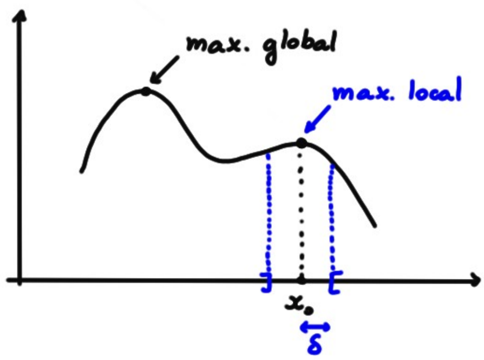
Définition 9.40. Soit f définie en x_0 et dans son voisinage. On dit que

- ⋆ f **possède un maximum local en** x_0 si il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\,.$$

- ⋆ f **possède un minimum local en** x_0 si il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x) \geqslant f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\,.$$



Bien-sûr, un maximum/minimum global est aussi local.

Le point de départ de cette section est le résultat suivant. Il suggère que la dérivée peut s'avérer être un outil pour la recherche de minimums/maximums :

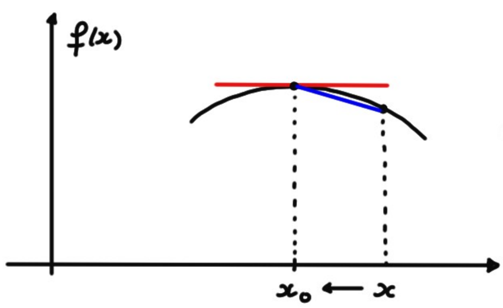
Lemme 20. *Soit f définie en x_0 et dans son voisinage. Si f possède un minimum/maximum local en x_0, et si f est dérivable en x_0, alors*

$$f'(x_0) = 0\,.$$

Preuve: Supposons que f possède un maximum local en x_0 : $\exists \delta > 0$ tel que $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in I :=]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

- ⋆ Si $x \in I$, $x > x_0$, on a toujours $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ puisque x_0 est un maximum local, et donc aussi (puisque $x - x_0 > 0$)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$



En prenant $x \to x_0^+$, cela donne

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0\,.$$

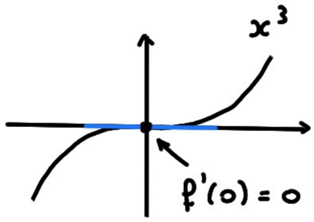
- ⋆ En procédant de même pour un $x < x_0$, on

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0\,,$$

et donc en prenant $x \to x_0^-$, on montre que $f'(x_0) \geqslant 0$.

Puisque f est dérivable en x_0, on doit avoir $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, et puisque ce nombre est à la fois $\leqslant 0$ et $\geqslant 0$, on a $f'(x_0) = 0$. □

Remarque 9.41. L'affirmation contraire n'est pas vraie : si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$, cela *n'implique pas* que f possède un minimum ou un maximum local en x_0 ! Prendre par exemple $f(x) = x^3$ au point $x_0 = 0$:



Comme $f'(x) = 3x^2$, on a $f'(0) = 0$, bien que 0 ne soit ni un minimum ni un maximum local. ◇

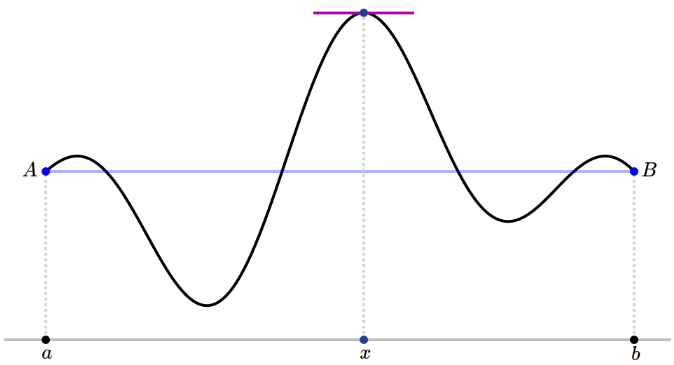
Théorème 9.42 (Théorème de Rolle). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = 0\,.$$

Preuve: Si f est constante, $f(a) = f(x) = f(b)$ pour tout $x \in]a, b[$, sa dérivée est nulle et donc on peut prendre n'importe quel point $c \in]a, b[$, et avoir $f'(c) = 0$.

Supposons donc que f n'est pas constante. Comme f est continue sur l'intervalle compacte $[a, b]$, elle atteint son maximum en un point $x^* \in [a, b]$, et son minimum en un point $x_* \in [a, b]$. Comme f n'est pas constante, au moins un de ces points se trouve strictement à l'intérieur de l'intervalle. Supposons que c'est $x^* \in]a, b[$. Comme x^* est un maximum global, c'est aussi un maximum local, et par le lemme précédent $f'(x^*) = 0$. □

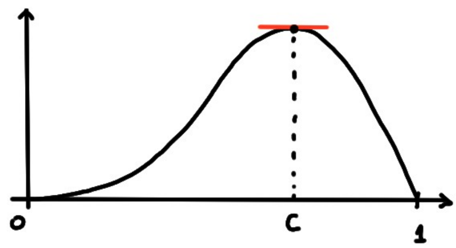
L'interprétation géométrique du Théorème de Rolle est claire : si le graphe d'une fonction lisse (continue et dérivable) part d'un point $A = (a, f(a))$ et arrive en un point $B = (b, f(b))$ qui est à la même hauteur que A, alors il existe au moins un point de son graphe où la droite tangente est horizontale :



Exemple 9.43. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) := \sin(\pi x^2) \cos(x)\,.$$

Comme f est continue et dérivable, et comme $f(0) = f(1) = 0$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.



Dans ce cas, c est solution de l'équation non-linéaire

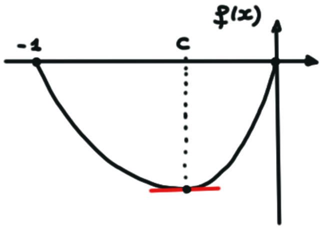
$$2\pi c\cos(\pi c^2)\cos(c) - \sin(\pi c^2)\sin(c) = 0\,,$$

et ne peut pas être donné explicitement. ◇

Parfois, le point c peut se calculer explicitement :
Exemple 9.44. Soit $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := x^4 + x\,.$$

On a $f(-1) = f(0) = 0$, et donc par le Théorème de Rolle il existe $c \in]-1, 0[$ tel que $f'(c) = 0$.



De plus, comme $f'(x) = 4x^3 + 1$, on a

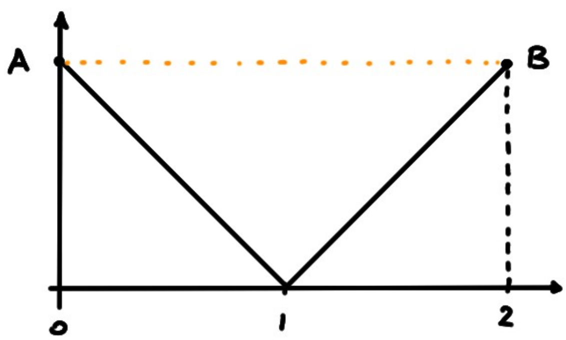
$$f'(c) = 0 \iff 4c^3 + 1 = 0 \iff c = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\,.$$

◇

Bien-sûr, si une des conditions du théorème n'est pas vérifiée, la conclusion du théorème n'est plus garantie (en général).
Exemple 9.45. Soit $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) := |x - 1|\,.$$

Ici $f(0) = f(2) = 1$, mais il n'existe aucun $c \in]0, 2[$ tel que $f'(c) = 0$.



Ce n'est pas une contradiction avec le Théorème de Rolle, puisque f ne satisfait pas aux hypothèses : elle est continue sur $[0, 2]$, dérivable en tout point de $]0, 2[$ *sauf* en $x = 1$. ◇

Quiz 9.9.1. *Soit f définie en x_0 et dans son voisinage. Vrai ou faux ?*

1) □ *Si x_0 est à la fois un minimum et un maximum local, alors f est constante dans un petit intervalle autour de x_0.*
2) □ *Si x_0 est un maximum ou un minimum local, alors f est dérivable en x_0.*
3) □ *Si f possède un minimum local en x_0, alors f est continue en x_0.*
4) □ *Si f n'est pas dérivable en x_0, alors x_0 n'est ni un minimum, ni un maximum local.*
5) □ *Si f possède un maximum local en x_0, alors $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout x.*
6) □ ⚠ *Si f est dérivable partout et si x_0 est un minimum local stricte, alors $f'(x_0) = 0$, et il existe $\delta > 0$ tel que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \delta[$.*

Quiz 9.9.2. *Parmi ces affirmations, lesquelles sont toujours vraies ?*

1) □ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Si il existe un point $c \in]a, b[$ où f est dérivable et $f'(c) = 0$, alors f est dérivable sur $]a, b[$.*
2) □ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*
3) □ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) > f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) < 0$.*
4) □ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) > 0$. Alors $f(a) < f(b)$.*
5) □ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*
6) □ ⚠ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ où f est dérivable.*
7) □ *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en tout point $x_0 \in [a, b]$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Quiz 9.9.3. *(MAN 2021) Vrai ou faux ? Si $f(x) = e^{x(x-1)(x-\pi)} + e^{\sin^2(x)}$, alors il existe $x \in]0, \pi[$ tel que $f'(x) = 0$.*

1) □ *FAUX*
2) □ *VRAI*

9.10 Le Théorème des accroissements finis

Le résultat suivant, appelé **Théorème des Accroissements Finis** (parfois abbrégé "TAF" par la suite), est une généralisation du Théorème de Rolle :

Théorème 9.46. *Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Preuve: Définissons

$$g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) .$$

Cette fonction est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $g(a) = g(b) = 0$. Par le Théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or

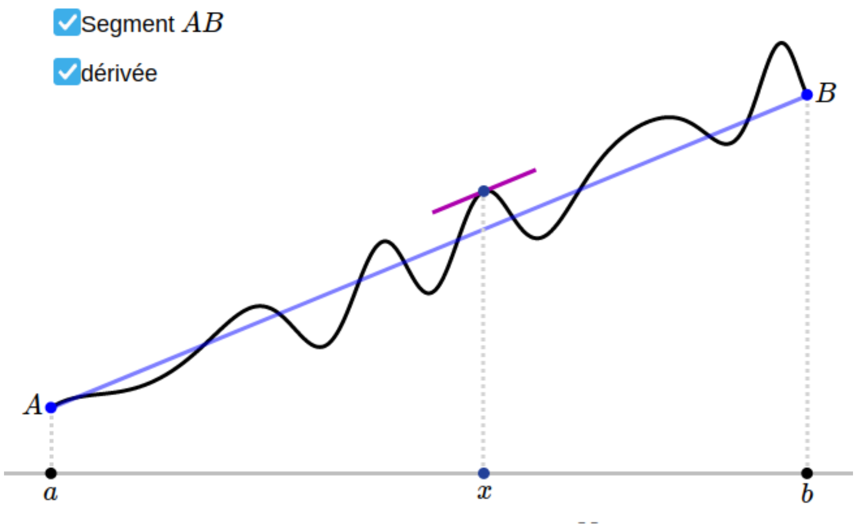
$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} ,$$

donc $g'(c) = 0$ est équivalent à $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Le quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

représente la pente du segment qui relie le point $A = (a, f(a))$ au point $B = (b, f(b))$. Donc l'interprétation géométrique du théorème des accroissements finis est la suivante : si le graphe d'une fonction lisse part d'un point A et arrive à un point B, il doit exister au moins un point de son graphe où la droite tangente est parallèle au segment AB :



9.10.1 Conséquence 1 : Variation de f et signe de f'

(ici, Video: v_derivee_vs_variation.mp4)

Proposition 12. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors*

1) *f est croissante sur $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a, b[$.*
2) *f est décroissante sur $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]a, b[$.*

Preuve: Supposons que f est croissante sur $[a, b]$. Considérons un point $x \in]a, b[$ quelconque. Comme f est dérivable en x, sa dérivée est égale à sa dérivée latérale à droite :

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{z \to x^+} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} .$$

Ce dernier quotient peut donc être considéré pour des $z > x$, ce qui implique que le dénominateur $z - x > 0$, et que le numérateur $f(z) - f(x) \geqslant 0$ (puisque f est supposée croissante). Donc le quotient est $\geqslant 0$, et donc sa limite est aussi positive : $f'(x) \geqslant 0$.

Supposons maintenant que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Soient $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. On peut appliquer le TAF sur $[x_1, x_2]$: il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geqslant 0 .$$

Comme $x_2 - x_1 > 0$, ceci implique $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Puisque ceci vaut pour toute paire x_1, x_2 (avec $x_1 < x_2$), on a bien montré que f est croissante sur $[a, b]$. □

Remarque 9.47. On peut également montrer, sous les mêmes hypothèses du théorème, que

1) $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[\Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[a, b]$

2) $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a,b[\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $[a,b]$

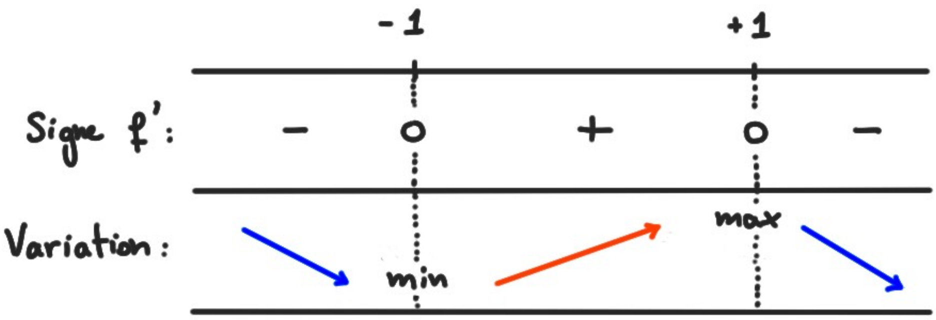
Mais les réciproques de ces affirmations ne sont pas vraies ! En effet, la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante, mais sa dérivée s'annule en 0. $\diamond$

Par la proposition ci-dessus, on peut étudier la **variation** d'une fonction dérivable, c'est-à-dire trouver les intervalles sur lesquels elle est croissante ou décroissante, simplement en étudiant le signe de sa dérivée.

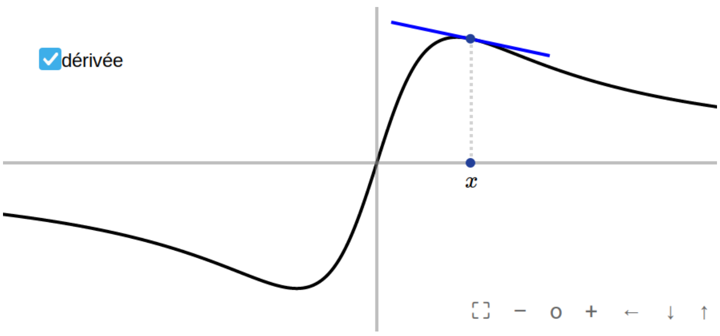
Exemple 9.48. Considérons $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, définie et dérivable sur tout $\mathbb{R}$. On a

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1+x^2-x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,.$$

Le signe de f' permet ainsi de déterminer les intervalles sur lesquels f est croissante ou décroissante :



En plus du fait que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$, ces informations permettent déjà de produire une esquisse raisonnable du graphe :



$\diamond$

La proposition ci-dessus peut aussi s'utiliser pour démontrer des inégalités "universelles" entre fonctions :

Exemple 9.49. Montrons que

$$\boxed{e^x \geqslant 1+x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.}$$

Si on pose $f(x) := e^x - (1+x)$, il s'agit donc de montrer que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or

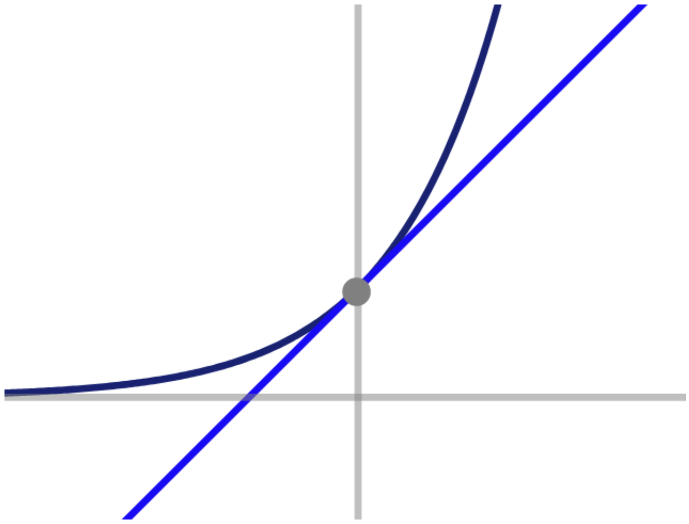
$$f'(x) = e^x - 1 \begin{cases} \leqslant 0 & \text{si } x \leqslant 0\,, \\ \geqslant 0 & \text{si } x \geqslant 0\,, \end{cases}$$

On conclut par la proposition que

* f est décroissante sur $]-\infty, 0]$, et donc $f(x) \geqslant f(0)$ pour tout $x \leqslant 0$,
* f est croissante sur $[0, +\infty[$, et donc $f(0) \leqslant f(x)$ pour tout $x \geqslant 0$,

Dans tous les cas, $f(x) \geqslant f(0) = 0$, ce qui démontre l'inégalité voulue.

On remarque que $y = 1 + x$ est l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = e^x$ au point $(0, 1)$. On a donc en démontré que le graphe de f est toujours au-dessus de sa droite tangente :



◇

Exemple 9.50. On peut également montrer que

$$\boxed{\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.}$$

◇

9.10.2 Conséquence 2 : Les fonctions de dérivée nulle sont des constantes

Lemme 21. *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable en tout point de $]a, b[$. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est constante.*

Preuve: On montre que f est constante en montrant qu'elle prend, en tout point x de l'intervalle, la même valeur qu'en un point x_0 fixé. Fixons donc $x_0 \in]a, b[$.

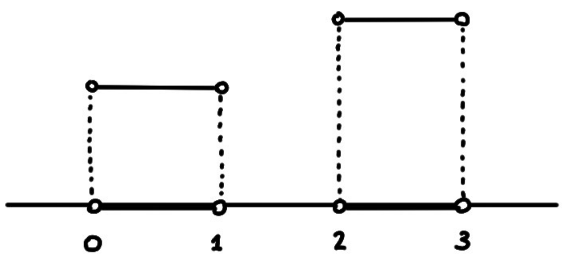
Prenons un autre point $x \in]a, b[$. Supposons que $x > x_0$. Puisque f est dérivable sur $]a, b[$, elle satisfait aux hypothèses du TAF sur $[x_0, x]$: il existe un point $c \in]x_0, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)\,.$$

Mais comme $f'(c) = 0$, ceci implique que $f(x) = f(x_0)$.

Si $x < x_0$, on fait la même chose sur $[x, x_0]$. □

Remarque 9.51. Dans le lemme précédent, il est essentiel que le domaine de la fonction soit *un intervalle*, pas juste un ouvert ! En effet, on peut très bien avoir une fonction définie sur un domaine qui est une union de deux intervalles ouverts, par exemple $D =]0, 1[\cup]2, 3[$, dont la dérivée est nulle partout, mais qui n'est pas constante :



◇

Comme conséquence du lemme, un résultat que l'on utilisera plus tard dans le chapitre sur l'intégration :

Corollaire 7. *Soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continues et dérivables sur* $]a, b[$. *Si*

$$f'(x) = g'(x) \qquad \forall x \in]a, b[\,,$$

alors il existe une constante C *telle que*

$$f(x) = g(x) + C \qquad \forall x \in]a, b[\,.$$

Preuve: Soit $h(x) := f(x) - g(x)$. Puisque

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[\,,$$

le lemme précédent garantit qu'il existe une constante C telle que $h(x) = C$, et donc $f(x) = g(x) + C$, pour tout $x \in [a, b]$. □

9.10.3 Conséquence 3 : Dérivées latérales et limites de la dérivée

Proposition 13. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue, dérivable sur* $]a, b[$.

1) *Si* $\lim_{x \to a^+} f'(x)$ *existe et est finie, alors* f *est dérivable à droite en* $x = a$, *et*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x)\,.$$

2) *Si* $\lim_{x \to b^-} f'(x)$ *existe et est finie, alors* f *est dérivable à gauche en* $x = b$, *et*

$$f'_-(b) = \lim_{x \to b^-} f'(x)\,.$$

Preuve: Pour démontrer la première affirmation, calculons la dérivée à droite en a :

$$f'_+(a) = \lim_{z \to a^+} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\,.$$

Appliquons le TAF sur $[a, z]$: il existe $c_z \in]a, z[$ tel que

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(c_z)\,.$$

Or $c_z \to a^+$ lorsque $z \to a^+$, et donc

$$\lim_{z \to a^+} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \to a^+} f'(c_z) = \lim_{c \to a^+} f'(c)\,,$$

ce qu'on voulait démontrer. □

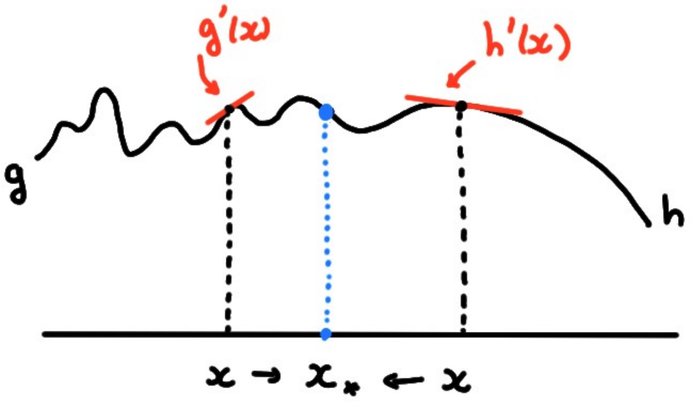
Cette dernière proposition est utile pour tester la dérivabilité d'une fonction définie par morceaux, au point de raccordement. En effet, soient g et h des fonctions dérivables, et soit

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leqslant x_*\,, \\ h(x) & \text{si } x > x_*\,. \end{cases}$$

Supposons que f est continue en x_* (ce qui, ici, signifie que $g(x_*) = \lim_{x\to x_*^+} h(x)$). Pour vérifier si f est aussi dérivable en x_*, on n'a a priori pas d'autre option que de calculer ses dérivées latérales en x_*,

$$f'_-(x_*) = \lim_{x\to x_*^-} \frac{g(x)-g(x_*)}{x-x_*} = g'_-(x_*)\,,$$
$$f'_+(x_*) = \lim_{x\to x_*^+} \frac{h(x)-g(x_*)}{x-x_*}\,,$$

et de voir si elles sont égales : $f'_-(x_*) \stackrel{?}{=} f'_+(x_*)$. Mais, puisque g (resp. h) est dérivable en tout $x < x_*$ (resp. $x > x_*$) proche de x_*, on peut éviter de passer par les dérivées latérales.



En effet, la proposition précédente garantit que $f'_-(x_*) = f'_+(x_*)$ si et seulement si

$$\lim_{x\to x_*^-} f'(x) = \lim_{x\to x_*^+} f'(x)\,,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\lim_{x\to x_*^-} g'(x) = \lim_{x\to x_*^+} h'(x)\,.$$

Exemple 9.52. Considérons la fonction suivante, déjà rencontrée plus haut,

$$f(x) := \begin{cases} x^2+ax+1 & \text{si } x \leqslant 0\,,\\ \sin(2x)+b & \text{si } x>0\,,\end{cases}$$

et reposons la question : Est-il possible de choisir a et b de façon à ce que f soit dérivable en 0 ?

On a vu que la continuité en 0 est garantie en imposant $b=1$. Par la remarque ci-dessus, on garantit la dérivabilité en 0 en imposant

$$\lim_{x\to 0^-} \big(2x+a\big) = \lim_{x\to 0^+} 2\cos(2x)\,,$$

ce qui donne $a=2$. ◇

9.10.4 Une généralisation du Théorème des accroissements finis

Le Théorème de Rolle permet en fait de démontrer un résultat plus général que le Théorème des accroissements finis :

Théorème 9.53. *(Théorème des Accroissements Finis généralisé (abbrégé "TAFG") par la suite) Soient f, g continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. Si $g(a) \neq g(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) \, .$$

Preuve: Puisqu'on suppose que $g(b) - g(a) \neq 0$, on peut définir

$$r(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \, .$$

Par les propriétés de $f$et g sur $[a, b]$, r est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec

$$r'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \, .$$

De plus, on observe que $r(a) = r(b) = 0$. Donc, par le Théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $r'(c) = 0$. □

Remarque 9.54. En prenant $g(x) = x$, on voit que le TAF est un cas particulier du TAFG. ◇

Quiz 9.10.1. *Vrai ou faux ?*

1) □ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) > f(b)$. Alors f est décroissante sur $[a, b]$*
2) □ *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si f est croissante sur $[a, b]$, alors $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a, b[$.*
3) □ *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, et $a < b < c$. Si f est croissante sur $[a, b[$ et décroissante sur $]b, c]$, alors $f'(b) = 0$.*
4) □ *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x < 0$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x > 0$, alors $x = 0$ est un maximum local.*
5) □ *Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue et croissante, alors elle est dérivable et $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a, b[$.*
6) □ *Si f est dérivable sur un ouvert D, et si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$, alors f est soit croissante, soit décroissante sur D.*
7) □ *Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) > 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que f est croissante sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.*
8) □ *Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) > 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0]$, et $f(x) > f(x_0)$ pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta]$.*

Quiz 9.10.2. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Si f atteint son maximum en $x^* \in]a, b[$, alors f est dérivable en x^*.*
2) ☐ *Si f atteint son maximum en a, alors f est dérivable à droite en a, et $f'_+(a) = 0$.*
3) ☐ *Si f atteint son minimum en $x_* \in]a, b[$, et si f est dérivable en x_*, alors $f'(x_*) = 0$.*
4) ☐ *Si f est dérivable en tout point $x_0 \in]a, b[$, alors elle atteint son maximum et son minimum en des points de $]a, b[$ où sa dérivée s'annule.*
5) ☐ *Si f est dérivable sur $]a, b[$, et si $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a, b[$.*
6) ☐ *Si f est dérivable sur $]a, b[$, et si $f'(x_0) > 0$ pour tout $x_0 \in]a, b[$, alors f n'atteint ni son minimum, ni son maximum.*
7) ☐ *Si f est dérivable sur $]a, b[$, et si $f'(x_0) > 0$ pour tout $x_0 \in]a, b[$, alors f atteint son minimum en a, et son maximum en b.*
8) ☐ *Si $f(a) = f(b) = H$ et si $f'_+(a)f'_-(b) < 0$, alors soit $f(x) \geqslant H$ pour tout $x \in]a, b[$, soit soit $f(x) \leqslant H$ pour tout $x \in]a, b[$.*
9) ☐ *Si $f(a) < f(b)$ et si $f'_+(a) > 0$ et $f'_-(b) > 0$, alors f atteint son minimum en a, et son maximum en b.*
10) ☐ *Il existe au moins un point $x_0 \in]a, b[$ en lequel f est dérivable.*
11) ☐ *Le nombre de points de $]a, b[$ où f n'est pas dérivable est fini.*
12) ☐ *Le nombre de points $x^* \in [a, b]$ où f atteint son minimum est fini.*

Quiz 9.10.3. *Parmi ces affirmations, lesquelles sont toujours vraies ?*

1) ☐ *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante sur chaque intervalle de la forme $[n, n + 1[$ ($n \in \mathbb{Z}$), alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
2) ☐ *Si f est dérivable sur un ouvert D, et si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in D$, alors f est une constante.*
3) ☐ *Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est telle que $f'(x) = 0$ pour pour tout $x \in]a, b[$, alors $f(x_1) = f(x_2)$ pour toute paire $x_1, x_2 \in]a, b[$.*

Quiz 9.10.4. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.*

1) ☐ *Si $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ n'existe pas, alors $f'_+(a)$ n'existe pas.*
2) ☐ *Si $\lim_{x\to a^+} f'(x) = +\infty$, alors $f'_+(a) = +\infty$.*
3) ☐ *Si $f'_+(a)$ existe et est finie, alors $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ existe et est finie.*
4) ☐ *Si $\lim_{x\to a^+} f'(x) = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}| \leqslant \varepsilon$ dès que $a < x \leqslant a + \delta$.*

9.11 La règle de Bernoulli-l'Hôpital

(ici, Video: `v_derivee_BH.mp4`)

Nous allons voir maintenant un outil puissant qui, lorsqu'il est bien utilisé, permet d'étudier des indéterminations qu'aucune des méthodes présentées jusqu'ici ne permettait d'aborder.

Malgré tout, cet outil a un prix : il ne s'applique que dans certaines situations très particulières (voir les hypothèses ci-dessous), et sa justification est délicate.

Théorème 9.55. *(Règle de Bernoulli-l'Hôpital) Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivables , telles que*

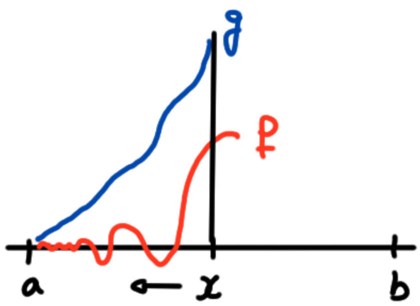
1) *$g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$,*
2) *la limite*
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$
est une indétermination du type "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$", c'est-à-dire que
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = L\,,$$
où $L \in \{0, +\infty, -\infty\}$.

Si
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = R\,,$$
où R est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$, alors
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = R\,.$$
Le résultat ci-dessus reste valable si on remplace partout

- *la limite $x \to a^+$ par $x \to b^-$, ou alors*
- *$]a, b[$ par $]a, +\infty[$ et la limite $x \to a^+$ par $x \to +\infty$, ou alors*
- *$]a, b[$ par $]-\infty, b[$ et la limite $x \to a^+$ par $x \to -\infty$.*

Preuve:
Commençons par traiter le cas où $L = 0$ et $R \in \mathbb{R}$.

Fixons un $x \in]a, b[$ (que l'on fera ensuite $\to a^+$).



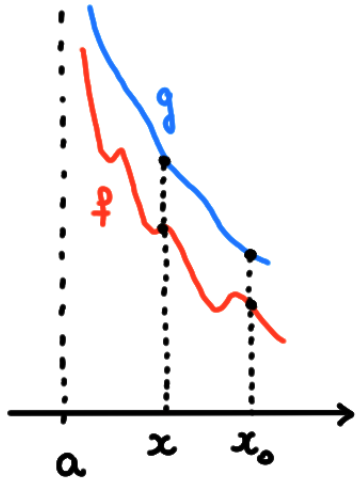
Comme $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = L = 0$, on peut prolonger f et g par continuité à $[a, x]$, en posant $f(a) := 0$, $g(a) := 0$. Comme maintenant f et g sont continues sur $[a, x]$ et dérivables sur $]a, x[$, on peut utiliser la généralisation du Théorème des accroissements finis (fin de la section précédente), pour garantir l'existence d'un point $c_x \in]a, x[$ tel que
$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} g'(c_x)\,.$$
Ceci nous permet de récrire le quotient (puisque ni g ni g' ne s'annulent dans $]a, b[$) :
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$
Maintenant, prenons la limite $x \to a^+$. Comme $a < c_x < x$, on a $c_x \to a^+$ lorsque $x \to a^+$, et donc
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = R\,.$$

Passons maintenant au cas où $L = +\infty$ et $R \in \mathbb{R}$.

On a donc $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$, et la limite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = R$$

est finie.



En préparation, fixons $a < x < x_0 < b$ et écrivons

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - R\Big| &\leqslant \Big|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\Big| + \Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - R\Big| \\ &\leqslant \Big|\frac{f(x)}{g(x)}\Big| \cdot \underbrace{\Big|1 - \frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}\Big|}_{=:\varphi_{x_0}(x)} + \underbrace{\Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - R\Big|}_{=:\psi_{x_0}(x)}\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - R\Big| &\leqslant \Big|\frac{f(x)}{g(x)}\Big|\varphi_{x_0}(x) + \psi_{x_0}(x) \\ &\leqslant \Big|\frac{f(x)}{g(x)} - R\Big|\varphi_{x_0}(x) + |R|\varphi_{x_0}(x) + \psi_{x_0}(x)\,,\end{aligned}$$

et on peut isoler $\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - R\Big|$ dans cette dernière inégalité :

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - R\Big| \leqslant \frac{|R|\varphi_{x_0}(x) + \psi_{x_0}(x)}{1-\varphi_{x_0}(x)}\,.$$

Voyons maintenant comment le côté droit peut être rendu arbitrairement petit en prenant x et x_0 suffisamment proches de a. D'abord, appliquons le TAFG sur $[x, x_0]$: il existe $c_{x,x_0} \in]x, x_0[$ tel que

$$\psi_{x_0}(x) = \Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - R\Big| = \Big|\frac{f'(c_{x,x_0})}{g'(c_{x,x_0})} - R\Big|\,.$$

Par hypothèse, $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to R$. Donc en fixant $\varepsilon > 0$, on peut prendre un $x_0 > a$ suffisamment proche de a, de façon à ce que pour tout $a < x < x_0$, $0 \leqslant \psi_{x_0}(x) \leqslant \varepsilon$. Ensuite, remarquons qu'à x_0 fixé, on a toujours $\lim_{x\to a^+} \varphi_{x_0}(x) = 0$. On a donc

$$\lim_{x\to a^+} \Big|\frac{f(x)}{g(x)} - R\Big| \leqslant \varepsilon\,.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a bien montré que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = R\,,$$

ce qu'on voulait démontrer. □

La règle de BH, si elle s'applique de part et d'autre d'un point a, permet évidemment de calculer des limites $x \to a$:

Exemple 9.56. Étudions la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$$

Clairement, $f(x) = \sin(x) - x$ et $g(x) = x^3$ satisfont aux hypothèses du théorème : toutes deux sont dérivables dans un voisinage de $x = 0$, ni g ni g' ne s'annulent dans un voisinage épointé de $x = 0$, et toutes deux tendent vers zéro lorsque $x \to 0$. On peut alors étudier la limite du quotient des dérivées :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

Comme cette limite existe et est finie, on peut conclure par le théorème que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{6}\,.$$

◇

Informel 9.57. On n'utilise surtout pas la règle de BH pour calculer des limites fondamentales, telles que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad !!!$$

En effet si on voulait utiliser BH pour cette limite, on devrait dériver le sinus : $(\sin(x))' = \cos(x)$. Or si on relit la preuve de comment on montre que la dérivée du sinus c'est le cosinus, on se rend compte qu'elle repose sur la connaissance de ... $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$!

Donc la limite "$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$" doit être considérée comme fondamentale, calculée uniquement à partir de la définition de base du sinus, dans le cercle trigonométrique.

Même si elle est formulée pour des indéterminations qui concernent des quotients, la règle de BH permet en fait de calculer des indéterminations de tous les types. Ceci se fait en récrivant la fonction dont ont aimerait calculer la limite, de façon a y faire apparaître un quotient.

Exemple 9.58. (Une indétermination "$0 \cdot \infty$")

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\log(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} &\overset{BH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -\lim_{x\to 0^+} x = 0\,.\end{aligned}$$

◇

Exemple 9.59. (Une indétermination "1^∞")

$$\lim_{x\to +\infty} \Big(\frac{x}{x+2}\Big)^x\,.$$

Puisque $\frac{x}{x+2} > 0$ pour tout x suffisamment grand et positif, on peut exponentier :

$$\Big(\frac{x}{x+2}\Big)^x = \exp\Big(x\log\big(\frac{x}{x+2}\big)\Big)$$

Comme l'exponentielle est continue, on pourra rentrer la limite (une fois qu'on aura vérifié que la limite dans l'exposant existe) :

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x}{x+2}\Big)^x = \exp\Big(\lim_{x\to+\infty} x\log\Big(\frac{x}{x+2}\Big)\Big)$$

Étudions donc la limite à l'intérieur de l'exponentielle. En réarrangeant, on fait apparaître une limite "$\frac{0}{0}$" :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\log\Big(\frac{x}{x+2}\Big) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)-\log(x+2)}{\frac{1}{x}}\\ &\overset{BH}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= -2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(x+2)} = -2\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x}{x+2}\Big)^x = \exp(-2)\,.$$

◇

Informel 9.60. Avant de se lancer corps et âme dans l'utilisation de la règle de BH, on a tout intérêt de s'arrêter un moment et se demander si elle est vraiment nécessaire, et surtout si ses hypothèses sont satisfaites...

Exemple 9.61. Considérons

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^7)\cos(\sin(x^8))}{x^7}\,.$$

Numérateur et dénominateur sont des fonctions dérivables , mais est-ce qu'on veut vraiment se mettre à dériver le numérateur ?

Or on voit que la composée $\cos(\sin(x^8))$ a une limite qui vaut 1 (différente de zéro), donc elle ne pose pas de problème, on peut simplement la séparer du reste, puis faire un changement de variable $z=x^7$, pour obtenir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^7)\cos(\sin(x^8))}{x^7} &= \underbrace{\big(\lim_{x\to 0}\cos(\sin(x^8))\big)}_{=1}\Big(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^7)}{x^7}\Big)\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z} = 1\,.\end{aligned}$$

◇

Exemple 9.62. Considérons

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x^2)}{3x}$$

Cette limite est de la forme $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ et se calcule directement, en mettant en évidence le terme dominant au numérateur,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x^2)}{3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{\sin(x^2)}{x})}{3x} = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{1}{3}+\frac{\sin(x^2)}{3x}\Big) = \frac{1}{3}\,.$$

Cette limite fournit un exemple de cas où numérateur et dénominateur sont tous les deux dérivables, mais le quotient $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'a pas de limite puisque

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1+2x\cos(x^2)}{3}\,,$$

qui n'a pas de limite lorsque $x\to\infty$. Donc la règle de BH ne s'applique pas. ◇

9.11.1 Utilisation répétée de la règle

L'idée utilisée dans ce dernier exemple permet de revenir sur quelque chose que nous avons déjà rencontré dans le chapitre sur les suites, à savoir la hiérarchie de comportements à l'infini des polynômes, exponentielles et logarithmes.

On aura alors parfois besoin d'utiliser la règle de BH plus d'une fois :

Exemple 9.63.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{3x}} \overset{BH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3e^{3x}} \overset{BH}{=} \frac{2}{3} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3e^{3x}} = \frac{2}{9} \times 0 = 0\,.$$

◇

Généralisons :

Lemme 22. *Pour toute base $a > 1$, tout $\alpha > 0$ et tout $m > 0$,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^{mx}} = 0\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{(\log_a(x))^\alpha}{x^m} = 0\,.$$

Preuve: Considérons la première limite. Deux remarques permettent de simplifier le calcul.

- ⋆ D'abord, on peut toujours écrire

  $$a^{mx} = e^{m'x}\,,$$

  où $m' = m\log(a)$. Or puisque $a > 1$, on a $m' > 0$. Donc il suffit de démontrer le résultat pour la base e.
- ⋆ Puisque $\alpha \leqslant \lfloor\alpha\rfloor + 1$, il suffit aussi de démontrer le résultat pour des α entiers, c.-à-d. $\alpha = k \in \mathbb{N}$.

Fixons donc $m > 0$, et montrons que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^{mx}} = 0\,.$$

Dans le cas où $k = 1$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{mx}} \overset{BH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{me^{mx}} = 0\,.$$

Supposons alors que le résultat a été démontré pour un entier k. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^{k+1}}{e^{mx}} &\overset{BH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(x^{k+1})'}{(e^{mx})'} \\
&= \frac{k+1}{m} \lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^{mx}} \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

et donc le résultat est vrai pour $k + 1$.

La deuxième limite est une conséquence de la première. En effet, ne posant $y = \log_a(x)$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log_a(x))^\alpha}{x^m} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^\alpha}{a^{my}} = 0\,.$$

□

Quiz 9.11.1. *Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivables, et g telle que $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Parmi les affirmations ci-dessous, lesquelles sont toujours vraies ?*

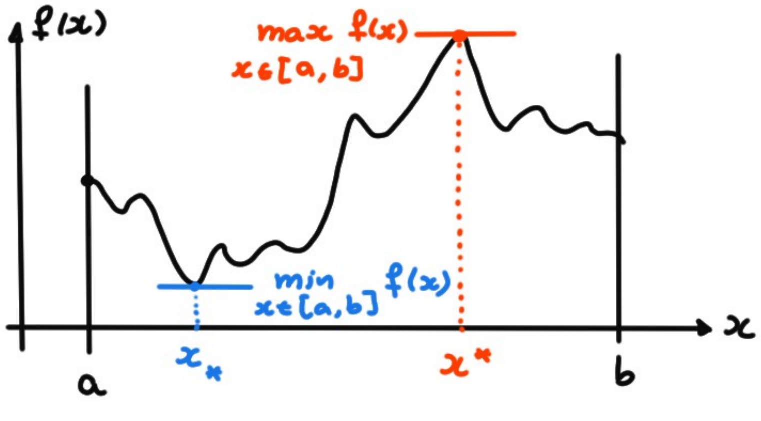
1) □ *Si* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *et* $\lim_{x \to a^+} g(x)$ *existent, alors* $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe.*
2) □ *Si f et g peuvent être prolongées par continuité à $[a, b[$, alors* $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe.*
3) □ *Si* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *et* $\lim_{x \to a^+} g(x)$ *existent, alors* $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe.*
4) □ $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$.
5) □ $\lim_{x \to a^+} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
6) □ $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
7) □ *Si* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$, *et si si* $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *n'existe pas, alors* $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *n'existe pas.*
8) □ *Si* $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = D$, *alors f' et g' sont bornées sur $]a, b[$.*
9) □ *Si* $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *n'existe pas, alors* $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *n'existe pas.*
10) □ *Si* $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, *alors* $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$.
11) □ *Si* $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = D$, *et si α, β sont des constantes, alors* $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)+\alpha}{g(x)+\beta} = D$.

Quiz 9.11.2. *Vrai ou faux ?*

1) □ $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{0}{1}$
2) □ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 - 1)'}{(x^2 + 1)'}$
3) □ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 - 1)'}{(x^2 + 1)'}$

9.12 Sur la recherche des extrema d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$

Passons maintenant à l'utilisation de la dérivée dans la recherche des extrema d'une fonction. On sait que lorsque $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, elle atteint son minimum et son maximum :



Dans cette section, on décrit un algorithme qui permet (en principe) de *trouver* ces extrema par le calcul.

Considérons, pour fixer les idées, la recherche du **maximum global** d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On supposera que f est continue. Par simple observation, puisqu'on *sait* qu'il est atteint quelque part sur $[a, b]$, on peut facilement lister toutes les possibilités :

1) Il peut être atteint sur les bords, en $x = a$ ou en $x = b$.
2) Il peut être atteint à l'intérieur de l'intervalle, c.-à-d. dans $]a, b[$. Mais comme c'est un maximum global, il est aussi local. Donc si f est dérivable en ce point, sa dérivée s'y annule. Et si elle n'est pas dérivable, on traite le cas séparément.

Cette simple distinction des cas nous mène directement à un algorithme pour la recherche du minimum et du maximum de f :

1) On commencera par chercher les **points stationnaires**, c'est-à-dire les points $x \in]a, b[$ où f est dérivable et s'annule : $f'(x) = 0$, ainsi que les points de $]a, b[$ où f n'est pas dérivable.
2) On regardera les valeurs de la fonction sur le bord de l'intervalle, en $x = a$ et $x = b$, et on les comparera avec les valeurs en chacun des points trouvés à l'étape précédente.
3) Après avoir listé toutes ces valeurs, on garde la plus grande, et la plus petite.

Remarque 9.64. On a vu (dans **Continuité sur un intervalle compact** (lien vers la section `m_fonctions_continuite_sur_a_b`)) que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors son ensemble image est un intervalle fermé et borné, donné par

$$\mathrm{Im}(f) = \Big[\min_{x\in[a,b]} f(x)\,,\ \max_{x\in[a,b]} f(x)\Big]\,,$$

et peut donc être trouvé à l'aide de l'algorithme décrit ci-dessus. ◇

Exemple 9.65. Cherchons les extremas de la fonction $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ sur $[-1, 2]$.

1) Points stationnaires :

$$\begin{aligned} f'(x) = 12(x^3 + x^2 - 2x) &= 12x(x^2 + x - 2) \\ &= 12x(x+2)(x-1)\,, \end{aligned}$$

   donc la dérivée est nulle en $-2 \notin [-1, 2]$, en $0 \in [-1, 2]$ et en $1 \in [-1, 2]$. On garde :

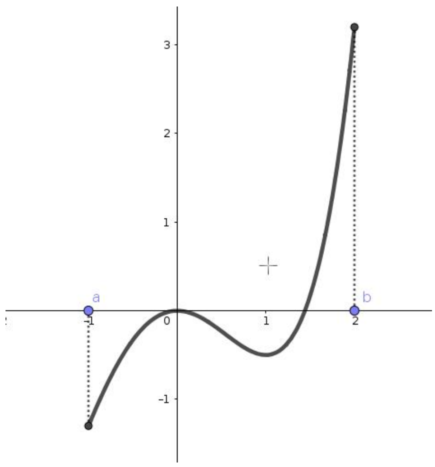
$$\boxed{f(0) = 0 \qquad f(1) = -5}$$

2) Sur les bords :

$$\boxed{f(-1) = -13, \qquad f(2) = 32}$$

En comparant les quatre valeurs encadrées ci-dessus, on voit que

- ⋆ f atteint son maximum global en $x = 2$ (sur le bord)
- ⋆ f atteint son minimum global en $x = -1$ (sur le bord)



En particulier,

$$\mathrm{Im}(f) = [-13, 32]\,.$$

◇

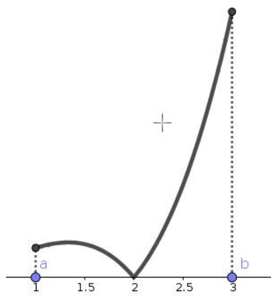
Exemple 9.66. Considérons $f(x) = |x^2(x-2)|$ sur l'intervalle $[1, 3]$. Comme $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ est continue, elle atteint son minimum et son maximum. On commence par écrire

$$|x^2(x-2)| = \begin{cases} -x^2(x-2) & \text{si } x \in [1,2]\,, \\ x^2(x-2) & \text{si } x \in]2,3]\,. \end{cases}$$

1) Points stationnaires : Sur $]1, 2[$, $f'(x) = x(4-3x)$, donc deux points où la dérivée s'annule, en $0 \notin]1, 2[$ et en $\frac{4}{3} \in]1, 2[$:
$$\boxed{f(\tfrac{4}{3}) = \frac{32}{27}}$$
Sur $]2, 3[$, $f'(x) = x(3x-4)$, donc ne s'annule pas.
2) Points où f n'est pas dérivable ? Seul candidat : $x = 2$. En effet,
$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (x(4-3x)) = -4$$
$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (x(3x-4)) = +4$$
Donc on garde
$$\boxed{f(2) = 0}$$
3) Sur les bords :
$$\boxed{f(1) = 1 \quad f(3) = 9}$$

On conclut que f

⋆ atteint son minimum en $x = 2$,
⋆ atteint son maximum en $x = 3$ (sur le bord).



Remarquons qu'en $x = \frac{4}{3}$, f possède un maximum, qui est local mais pas global.

On a aussi montré que

$$\mathrm{Im}(f) = [0, 9]$$

◇

Quiz 9.12.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Vrai ou faux ?*

1) □ *Si $x_0 \in]a, b[$ est un point stationnaire de f, alors x_0 est soit un minimum local, soit un maximum local.*
2) □ *Le nombre de points stationnaires de f dans $]a, b[$ est fini.*
3) □ *Si f possède une infinité de points stationnaires dans $]a, b[$, alors f atteint son maximum en une infinité de points.*
4) □ *Si f possède dans $]a, b[$ plus de points stationnaires que de points où elle n'est pas dérivable, alors elle atteint son minimum et son maximum en un point stationnaire.*

9.13 Dérivée seconde et convexité/concavité

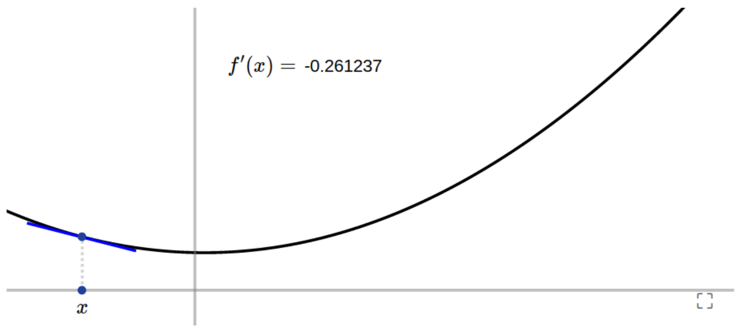
(ici, Video: v_derivee_convexes.mp4)

Rappelons qu'une fonction f est convexe si pour toute paire de points $x_1 < x_2$, et pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\,.$$

L'interprétation géométrique étant la suivante : si on choisit deux points quelconques sur le graphe de f, le segment qui les relie est entièrement au-dessus du graphe.

Or on peut remarquer que lorsque f est *dérivable*, c'est-à-dire lorsque $f'(x)$ est défini pour tout x, alors la convexité semble être équivalente à la croissance de $x \mapsto f'(x)$:

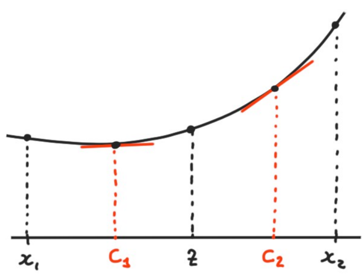


Sur l'animation ci-dessus, on a une fonction qui est manifestement convexe et dérivable, et on observe que sa dérivée est croissante. Ceci implique que si la dérivée est dérivable, et si la dérivée de la dérivée, c'est-à-dire la *dérivée seconde*, est positive, alors la fonction doit être convexe. Plus précisément :

Théorème 9.67. *Soit I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I (f est dérivable, et f' est aussi dérivable sur I).*

1) *Si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est convexe sur I.*
2) *Si $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est concave sur I.*

Preuve: Il suffit de démontrer la première implication. Remarquons d'abord que comme $f'' \geqslant 0$, f' est croissante sur I. Soient $x_1 < x_2$ dans I. Fixons $\lambda \in]0,1[$ et posons $z := (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$.



On applique deux fois le théorème des accroissements finis :

- ⋆ Sur $[x_1, z]$: il existe $c_1 \in]x_1, z[$ tel que

$$f'(c_1) = \frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1}$$

- ⋆ Sur $[z, x_2]$: il existe $c_2 \in]z, x_2[$ tel que

$$f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(z)}{x_2 - z}$$

Remarquons que comme $c_1 < c_2$, et puisque f' est croissante,

$$f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$$

Donc

$$\begin{aligned} f(z) - f(x_1) &\leqslant f'(c_2)(z - x_1) \qquad | \cdot (1-\lambda) \\ f(x_2) - f(z) &= f'(c_2)(x_2 - z) \qquad | \cdot \lambda \end{aligned}$$

En soustrayant les deux inégalités (multipliées par $1-\lambda$ et λ), on trouve

$$f(z) - \{(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\} \leqslant f'(c_2)\underbrace{\big((1-\lambda)(z-x_1) - \lambda(x_2 - z)\big)}_{=0} = 0\,.$$

On a donc montré que

$$f(z) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\,.$$

□

Exemple 9.68. Prenons $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$. Comme

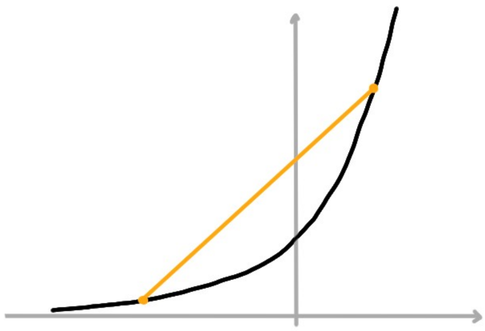
$$f''(x) = 2 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

le théorème garantit que f est convexe. ◇

Exemple 9.69. Prenons $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$. Puisque

$$f''(x) = e^x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

le théorème garantit que f est convexe.

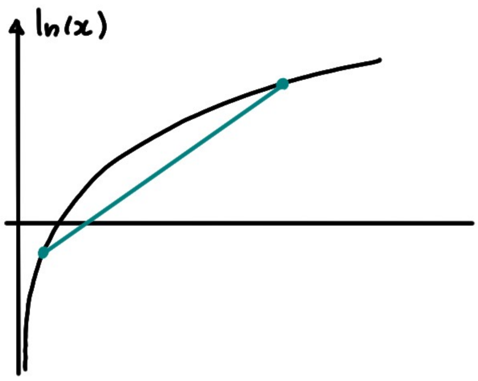


◇

Exemple 9.70. Considérons maintenant $f(x) = \log(x)$, sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme

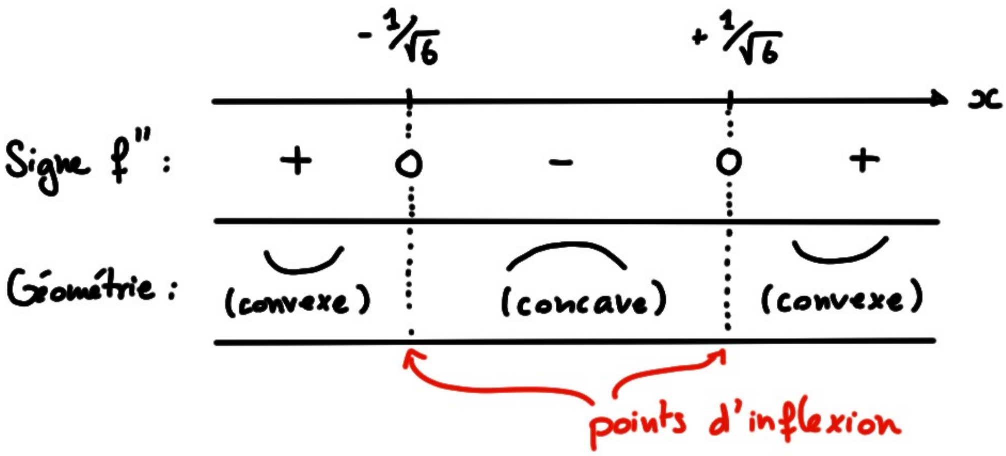
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,$$

le théorème entraîne que f est concave :



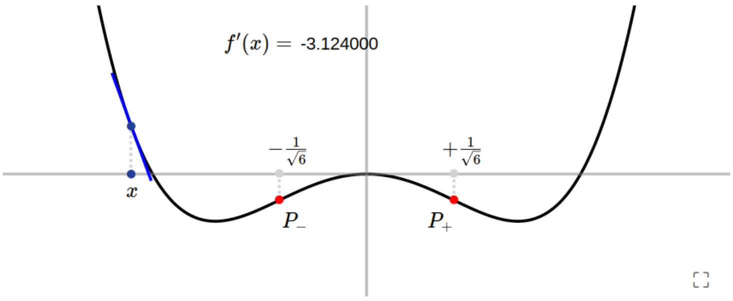
◇

Exemple 9.71. Considérons le polynôme $f(x) = x^4 - x^2$, et cherchons les intervalles sur lesquels f est convexe/concave. Puisque f est deux fois dérivable, l'étude du signe de $f''(x) = 2(6x^2 - 1)$ donne :



On en déduit par le théorème que :

- ⋆ f est convexe sur $]-\infty, -\sqrt{1/6}[$,
- ⋆ f est concave sur $]-\sqrt{1/6}, +\sqrt{1/6}[$,
- ⋆ f est convexe sur $]+\sqrt{1/6}, +\infty[$.



Les points $P_\pm = (\pm\sqrt{1/6}, f(\pm\sqrt{1/6}))$ sont des **points d'inflexion** : ce sont des points du graphe où la nature de la courbe change, passant de concave (resp. convexe) à convexe (resp. concave). ◇

Quiz 9.13.1. *Soit I un intervalle ouvert et borné, $f : I \to \mathbb{R}$. Vrai ou faux ?*

1) □ *Si f n'est pas deux fois dérivable, alors elle n'est pas convexe.*
2) □ *Si f n'est pas dérivable, alors elle n'est pas convexe.*
3) □ *Si f est deux fois dérivable sur I et si $f''(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est convexe.*
4) □ *Si f est convexe, alors elle est majorée.*

Quiz 9.13.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Vrai ou faux ?*

1) □ *f atteint son minimum.*
2) □ *Il n'existe aucun intervalle $[a, b]$ sur lequel f est de la forme $f(x) = mx + h$.*
3) □ *Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $]-\infty, \beta]$, croissante sur $[\beta, +\infty[$.*
4) □ *Si f est bornée, alors c'est une constante.*
5) □ *f est continue* ⚠ .

Chapitre 10

Développements limités

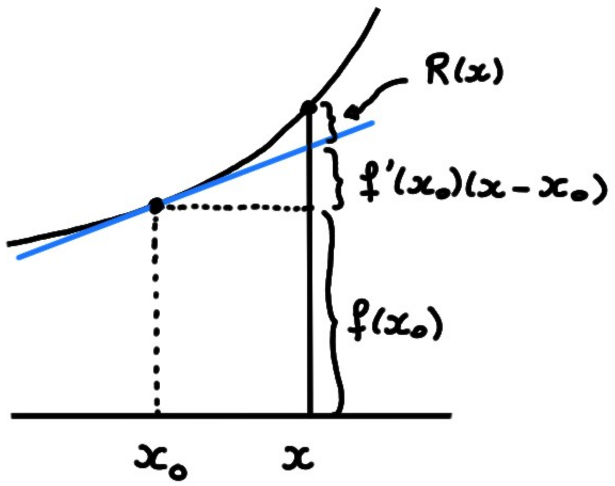
10.1 Introduction

(ici, Video: v_DL_intro.mp4)

Rappelons que la dérivabilité d'une fonction f en un point x_0 permet de la représenter au voisinage de ce point :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (f'(x_0) + r_{x_0}(x))(x - x_0) \\ &= \underbrace{\underbrace{f(x_0)}_{\text{ordre zéro}} + f'(x_0)(x - x_0)}_{1^{er}\ ordre} + \underbrace{r_{x_0}(x)(x - x_0)}_{=R(x),\text{ reste}}, \end{aligned}$$

où $\lim_{x\to x_0} r_{x_0}(x) = 0$.



Cette dernière expression doit être lue de la façon suivante : pour un x proche de x_0, $f(x)$ se calcule en prenant

1) sa valeur en x_0, $f(x_0)$, à laquelle il faut rajouter...
2) une correction linéaire en $x - x_0$, $f'(x_0)(x - x_0)$, à laquelle on rajoute encore...
3) un **reste** $R(x) = (x - x_0)r_{x_0}(x)$.

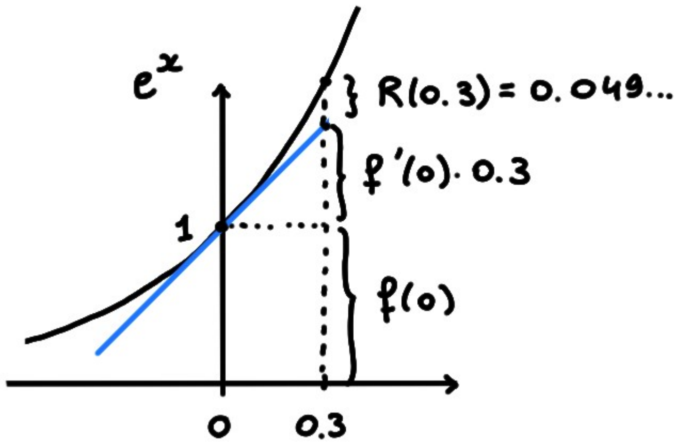
La somme des trois termes donne *exactement* $f(x)$, et ils sont en ordre *décroissant* d'importance (voir la figure ci-dessus) : la correction linéaire est petite puisque $x - x_0$ est petit, et le reste est petit puisque $\lim_{x\to x_0} R(x) = 0$. Mais en fait le reste est beaucoup plus petit que la correction linéaire, puisque

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} r_{x_0}(x) = 0\,.$$

Informel 10.1. En d'autres termes, $R(x)$ est "doublement" petit, puisque c'est le produit de $x - x_0$ (qui est petit lorsque x est proche de x_0) par $r_{x_0}(x)$ (qui est aussi petit lorsque x est proche de x_0).

Exemple 10.2. Considérons $f(x) = e^x$, au voisinage du point $x_0 = 0$. Si on s'intéresse par exemple au point $x = 0.3$, on obtient

$$f(0.3) = \underbrace{f(0)}_{1} + \underbrace{f'(0)0.3}_{0.3} + \underbrace{0.3r_0(0.3)}_{0.0498...} = 1.3498\ldots$$



◇

Une question naturelle est de savoir si il est possible d'obtenir une approximation de la fonction qui aille au-delà de l'approximation linéaire (et de son reste) : pour un point fixé $x \neq x_0$, peut-on approximer $f(x)$ à l'aide d'une expression qui soit plus précise que l'approximation linéaire ?

La première amélioration naturelle serait une approximation *quadratique* (du deuxième ordre), qui du point de vue graphique consiste à approximer le graphe, localement, par une parabole plutôt que par une droite. Une telle approximation, si elle existe, est plus précise puisqu'elle doit tenir compte de la *courbure* du graphe dans le voisinage du point.

Après l'approximation quadratique, on pourra essayer de produire une approximation cubique, et ainsi de suite, on pourra considérer des approximations d'ordres de plus en plus grand, à l'aide de *polynômes*. C'est le but de ce chapitre que de présenter cette construction, et de donner des conditions sur f qui garantissent que ces approximations sont possibles.

Informel 10.3. Certaines formules/expressions, dans ce chapitre, sont assez longues. On pourra donc augmenter la largeur du texte visible avec les boutons "+" et "−" dans la barre ci-dessus.

10.2 Définition et unicité

Un *développement limité* permet de représenter une fonction au voisinage d'un point x_0, à l'aide d'un *polynôme* :

$$f(x) = \text{polynôme}(x) + R(x)\,.$$

Le polynôme approximera bien la fonction dans le sens où la valeur du reste $R(x)$ doit être négligeable proche de x_0, dans un sens très précis :

Définition 10.4. Soit f définie au voisinage de x_0. On appelle **développement limité d'ordre** n **de** f **autour de** x_0 une représentation de $f(x)$ de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + R(x)\,,$$

où

- $\star$ les $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sont des coefficients (constants), et le polynôme

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

  est appelé **partie principale** du développement, et
- $\star$ le **reste** $R(x)$ est de la forme

$$R(x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x)\,,$$

  où $\varepsilon(x)$ est une fonction définie dans un voisinage épointé de x_0, telle que

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0\,.$$

Remarque 10.5. $\star$ Remarquons que dans le cas $n = 1$, la partie principale n'est autre que la droite tangente en x_0, et dans le reste $R(x) = (x - x_0)\varepsilon(x)$, la fonction $\varepsilon(x)$ représente $r_{x_0}(x)$:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{=a_0} + \underbrace{f'(x_0)}_{=a_1}(x - x_0) + \underbrace{(x - x_0)r_{x_0}(x)}_{=R(x)}$$

- $\star$ On évitera de trop alourdir l'écriture, en omettant d'indiquer la dépendance de $R(x)$ et $\varepsilon(x)$ en f, n, et x_0 (une notation plus précise serait $R_{f,x_0,n}(x)$, $\varepsilon_{f,x_0,n}(x)$).
- $\star$ Il est important, la plupart du temps, de souligner que *plus x est proche de x_0, plus le reste devient négligeable par rapport à la partie principale*! Plus précisément, **le reste est toujours plus petit que le terme de la partie principale de plus grand degré**. En effet, pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^k} = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{n-k}\varepsilon(x) = 0\,.$$

  C'est pour cette raison que la partie principale fournit une bonne approximation de la fonction au voisinage de x_0.
- $\star$ Dans la suite, pour abbréger "développement limité d'ordre n", on écrira simplement "$DL(n)$".

$\diamond$

La façon très précise dont le $DL(n)$ a été défini a une première conséquence importante : lorsqu'il existe, il est unique.

Lemme 23. *Si f possède un $DL(n)$ autour de x_0, alors la fonction $\varepsilon(x)$ et les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont uniques.*

Preuve: Supposons que f possède un $DL(n)$ en x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x)\,.$$

Montrons que l'on peut calculer un à un chacun des coefficients, et qu'ils dépendent tous uniquement de f et de x_0.

Pour commencer, en prenant $x \to x_0$ des deux côtés de l'expression, on obtient que $\lim_{x\to x_0} f(x) = a_0$, donc a_0 est fixé. Ensuite, remarquons que

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-a_0}{x-x_0}\\
&\quad= \lim_{x\to x_0} \big(a_1 + \underbrace{a_2(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^{n-1}+(x-x_0)^{n-1}\varepsilon(x)}_{\to 0}\big)\\
&\quad= a_1\,,
\end{aligned}$$

donc a_1 est fixé. Par récurrence, on voit que si $a_0, a_1, \dots, a_k$ sont connus, alors a_{k+1} est fixé par

$$a_{k+1} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \big\{a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_k(x-x_0)^k\big\}}{(x-x_0)^{k+1}}$$

Ceci montre que les coefficients sont uniques.

Une fois qu'on a les coefficients, on peut simplement exprimer $\varepsilon(x)$,

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - \big\{a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n\big\}}{(x-x_0)^n}\,.$$

(Donc le reste, est une fonction en général compliquée, mais que l'on peut toujours exprimer explicitement à l'aide de $f(x)$ et de la partie principale.) □

Informel 10.6. On utilisera ce dernier résultat souvent dans ce qui suit : *dès que* l'on peut écrire une fonction f, au voisinage d'un point x_0, comme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \varepsilon(x)(x-x_0)^n\,,$$

où $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, c'est qu'on a trouvé *le* (= l'unique) $DL(n)$ de f autour de x_0.

Exemple 10.7. Reprenons $f(x) = e^x$ au voisinage de $x_0 = 0$. On sait que

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)\,,$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$. Ceci représente un $DL(1)$ en $x_0 = 0$.

Montrons maintenant que cette fonction possède un $DL(2)$ en 0, donné par

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)\,.$$

(Attention : la fonction $\varepsilon(x)$, ici, n'est pas la même que celle de la ligne précédente !) Pour ce faire exprimons, explicitement en fonction de x,

$$\varepsilon(x) = \frac{e^x - \{1 + x + \frac{x^2}{2}\}}{x^2}$$

(cette fonction est effectivement définie dans un voisinage épointé de $x_0 = 0$), et calculons

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \big\{1 + x + \frac{1}{2}x^2\big\}}{x^2}\\
&\overset{BH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \big\{1 + x\big\}}{2x}\\
&\overset{BH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \big\{1\big\}}{2}\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Par le théorème d'unicité, ceci implique que l'expression ci-dessus est bien le $DL(2)$. ◇

(ici, Video: v_DL_voir_DL_exp.mp4)

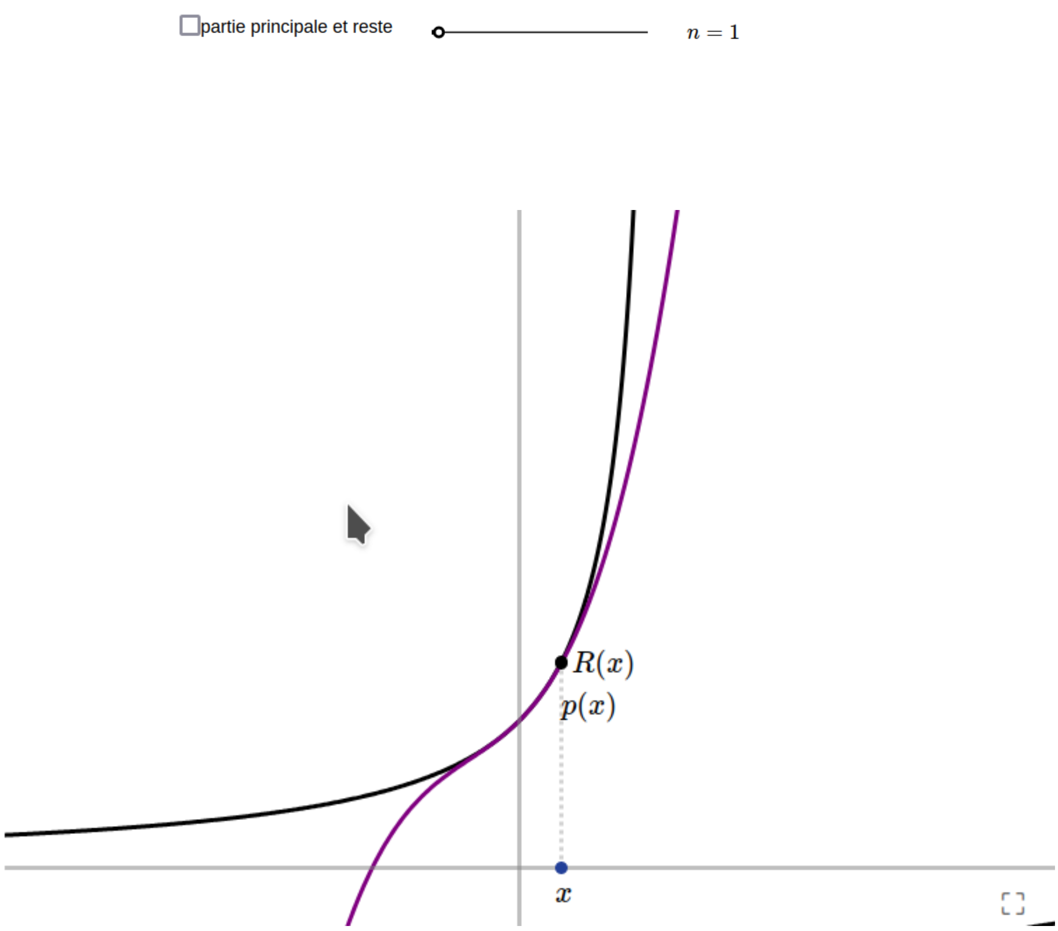
Exemple 10.8. Considérons $f(x) = \frac{1}{1-x}$, dans un voisinage de $x = 0$. Rappelons la formule obtenue pour une somme géométrique : pour tout $x \neq 1$,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

qui permet d'écrire

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}_{\text{principale}} + x^n \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{=:\varepsilon(x)}$$

Puisque $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, cette expression est bien le $DL(n)$ de f autour de zéro.



◇

Quiz 10.2.1. *Soit I un ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Si f possède un $DL(n)$ en x_0, alors il existe des coefficients réels $a_0, a_1, \dots, a_n$, avec $a_n \neq 0$, tels que*
$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$
pour tout $x \in I$.
2) ☐ *Si f est dérivable en x_0, alors elle possède un $DL(1)$ en x_0.*
3) ☐ *Si f possède un $DL(n)$ en x_0, alors f est continue en x_0.*
4) ☐ *Si f possède un $DL(n)$ en x_0, alors f est dérivable en x_0.*
5) ☐ *Si f possède un $DL(n)$ en x_0, alors f possède un $DL(n+1)$ en x_0.*
6) ☐ *Si f possède un $DL(n)$ en x_0, alors il existe un polynôme $p(x)$ et $\delta > 0$ tels que $f(x) = p(x)$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.*
7) ☐ *Si f possède un $DL(n)$ en x_0, alors il existe $\delta > 0$ tel que f est dérivable en tout point $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.*
8) ☐ *Si f possède un $DL(2)$ en x_0, alors f est deux fois dérivable en x_0.*
9) ☐ *Si f possède un $DL(n)$ en x_0, alors elle possède un $DL(k)$ en x_0, pour tout entier $1 \leqslant k < n$.*
10) ☐ *Si $g : I \to \mathbb{R}$, et si f et g possèdent chacune un $DL(n)$ en x_0, dont les parties principales sont égales, alors il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.*

10.3 Propriétés de base

Une conséquence de l'unicité est qu'un développement limité d'ordre n donne automatiquement des développements limités d'ordres inférieurs :

Corollaire 8. *Si f possède un $DL(n)$ autour de x_0, donné par*
$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + R(x)\,,$$
alors pour tout $0 \leqslant k < n$, f possède un $DL(k)$ autour de x_0, donné par
$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_k(x - x_0)^k + \widetilde{R}(x)\,.$$
(Les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_k$ sont les mêmes, mais le reste est différent.)

Preuve: En effet, pour tout $k < n$, on peut réarranger le $DL(n)$ comme suit :
$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_k(x - x_0)^k + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \\ &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^k \underbrace{\left(a_{k+1}(x - x_0) + \cdots + (x - x_0)^{n-k}\varepsilon(x)\right)}_{=:\tilde{\varepsilon}(x)} \end{aligned}$$
Comme $\tilde{\varepsilon}(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$, l'unicité du $DL(k)$ implique bien que cette dernière ligne est le $DL(k)$ de f autour de x_0. □

On peut ensuite obtenir des développements limités de sommes ou de produits de fonctions :

Lemme 24. *Soient f, g définies au voisinage de x_0, possédant chacune un $DL(n)$:*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \varepsilon(x)(x - x_0)^n\,,$$
$$g(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots + b_n(x - x_0)^n + \eta(x)(x - x_0)^n\,.$$

Alors

1) *$f + g$ possède aussi un $DL(n)$ autour de x_0, donné par*

$$(f + g)(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \phi(x)(x - x_0)^n\,,$$

où $c_k := a_k + b_k$, et $\phi(x) := \varepsilon(x) + \eta(x)$.

2) *$f \cdot g$ possède aussi un $DL(n)$ autour de x_0, donné par*

$$(f \cdot g)(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)^2 + \cdots + d_n(x - x_0)^n + \psi(x)(x - x_0)^n\,,$$

où $d_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$, et $\lim_{x\to x_0} \psi(x) = 0$.

Preuve: 1. En additionnant les deux $DL(n)$ et en regroupant les termes correspondants aux mêmes puissances, on a

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) = &(a_0 + b_0)\\ &+ (a_1 + b_1)(x - x_0)\\ &+ \cdots\\ &+ (a_n + b_n)(x - x_0)^n\\ &+ \underbrace{(\varepsilon(x) + \eta(x))}_{=:\phi(x)}(x - x_0)^n\,. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to x_0} \phi(x) = 0$, l'unicité du DL fait que l'expresion ci-dessus est bien le $DL(n)$ pour $f + g$.

2. Considérons pous simplifier le cas $n = 2$. Et pour y voir clair, écrivons les parties principales de manière plus compacte :

$$f(x) = p(x) + \varepsilon(x)(x - x_0)^2\,,$$
$$g(x) = q(x) + \eta(x)(x - x_0)^2\,,$$

où

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$$
$$q(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2\,.$$

En multipliant les deux $DL(2)$, et en regroupant, on obtient

$$\begin{aligned} &f(x)g(x)\\ &= p(x)q(x) + p(x)\eta(x)(x - x_0)^2 + q(x)\varepsilon(x)(x - x_0)^2 + \varepsilon(x)\eta(x)(x - x_0)^4\\ &= p(x)q(x) + (x - x_0)^2\underbrace{\left(p(x)\eta(x) + q(x)\varepsilon(x) + \varepsilon(x)\eta(x)(x - x_0)^2\right)}_{=:\psi_1(x)}\,, \end{aligned}$$

où $\psi_1(x) \to 0$ quand $x \to x_0$. Ensuite, calculons explicitement le produit des parties principales, et regroupons les puissances :

$$\begin{aligned} p(x)q(x) = &\, a_0b_0\\ &+ (a_0b_1 + a_1b_0)(x - x_0)\\ &+ (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x - x_0)^2\\ &+ \underbrace{(a_1b_2 + a_2b_1)(x - x_0)^3 + a_2b_2(x - x_0)^4}_{=:\psi_2(x)(x-x_0)^2}\,, \end{aligned}$$

où $\psi_2(x) \to 0$ quand $x \to x_0$. On a donc, en posant $\psi(x) := \psi_1(x) + \psi_2(x)$,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = a_0 b_0 & \\ &+ (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x - x_0) \\ &+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(x - x_0)^2 \\ &+ \psi(x)(x - x_0)^2 \,. \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule dans le cas où $n = 2$. Le cas général se traite de façon similaire. □

Exemple 10.9. Considérons

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x} \qquad \text{au voisinage de } x_0 = 0\,.$$

On a déjà calculé plus haut les $DL(2)$ de e^x et $\frac{1}{1-x}$,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)\,, \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^2\eta(x)\,, \end{aligned}$$

Donc, par le lemme précédent,

$$\begin{aligned} e^x \cdot \frac{1}{1-x} &= (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1)x + (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 1)x^2 + x^2\psi(x) \\ &= 1 + 2x + \tfrac{5}{2}x^2 + x^2\psi(x)\,. \end{aligned}$$

◇

10.4 La formule de Taylor

Maintenant, pour une fonction f donnée, on aimerait

- ⋆ Donner une condition suffisante sur f pour garantir qu'elle possède un $DL(n)$ en un point x_0.
- ⋆ Savoir comment calculer les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et le reste.

Sans surprise, l'existence d'un DL sera garantie si la fonction est suffisamment *lisse* dans le voisinage de x_0.

10.4.1 La formule

Rappelons que pour un intervalle ouvert I, $C^k(I)$ désigne l'ensemble de fonctions k-fois dérivables, dont les dérivées $f^{(1)} = f', f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ sont toutes continues.

Théorème 10.10. *Soit I un intervalle ouvert, et $f \in C^{k+1}(I)$. Alors quel que soit $x_0 \in I$, f possède un $DL(k)$ autour de x_0, donné par*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R(x)\,,$$

où le reste $R(x) = (x - x_0)^k\varepsilon(x)$, et où la fonction $\varepsilon(x)$ est donnée par

$$\varepsilon(x) = (x - x_0)\frac{f^{(k+1)}(u)}{(k+1)!}\,,$$

et u est un réel entre x_0 et x, qui dépend de x_0, x, k, f.

L'expression ci-dessus, qui exprime le $DL(k)$ dans lequel les coefficients impliquant les dérivées d'ordre supérieur de la fonction, est la **Formule de Taylor**; lorsque $x_0 = 0$, c'est la **Formule de MacLaurin**.

Preuve: Fixons un point $x_0 \in I$, puis étudions $f(x)$ en un autre point $x \in I$, $x \neq x_0$. Sans perte de généralité, supposons que $x_0 < x$. Considérons le nombre A_x, défini implicitement par

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + (x - x_0)^{k+1}\frac{A_x}{(k+1)!}\,.$$

(Cela signifie que si on le désire, on peut savoir ce que vaut A_x en l'isolant dans cette dernière expression.)

Avec x_0 et x fixés, on introduit la fonction $\varphi : [x_0, x] \to \mathbb{R}$, définie par

$$\varphi(t) := f(x) - \left\{ f(t) + f'(t)(x - t) + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x - t)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k + (x - t)^{k+1}\frac{A_x}{(k+1)!} \right\}.$$

Remarquons que φ satisfait aux hypothèses du Théorème de Rolle :

- ⋆ $\varphi(t)$ est continue sur $[x_0, x]$, et dérivable sur $]x_0, x[$. En effet, les puissances de t qu'elle contient sont évidemment dérivables, et comme on suppose que f est $k+1$ fois dérivable, toutes les dérivées $f^{(1)}(t), \dots, f^{(k)}(t)$ apparaissant dans $\varphi(t)$ sont continues.
- ⋆ $\varphi(x_0) = \varphi(x) = 0$.

Il existe donc un point $u \in]x_0, x[$ tel que $\varphi'(u) = 0$.

Maintenant, dérivons φ par rapport à t. (On rappelle que dans cette dérivation, "x" est considéré comme une constante !)

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= 0 - \left\{ (f(t))' + (f'(t)(x - t))' + \left(\frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x - t)^2\right)' + \cdots + \left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k\right)' + \left((x - t)^{k+1}\frac{A_x}{(k+1)!}\right)' \right\} \\
&= -\left\{ f'(t) + (f''(t)(x - t) - f'(t)) + \left(\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x - t)^2 - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x - t)^1\right) \right. \\
&\qquad + \left(\frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x - t)^3 - \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x - t)^2\right) \\
&\qquad + \cdots \\
&\qquad \left. + \left(\underbrace{\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k} - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x - t)^{k-1}\right) - \underbrace{(x - t)^k\frac{A_x}{k!}} \right\}.
\end{aligned}$$

En profitant du téléscopage,

$$\varphi'(t) = \frac{(x - t)^k}{k!}\left(A_x - f^{(k+1)}(t)\right),$$

En utilisant cette expression au point $t = u$ défini ci-dessus,

$$0 = \varphi'(u) = \frac{(x - u)^k}{k!}\left(A_x - f^{(k+1)}(u)\right).$$

Puisque $x_0 < u < x$, on a $(x - u)^k \neq 0$, ce qui implique

$$A_x = f^{(k+1)}(u)\,,$$

et prouve la formule de Taylor.

Pour montrer qu'on a vraiment obtenu un $DL(k)$, il reste à étudier le reste, qui est donné par

$$\varepsilon(x) = (x - x_0)\frac{f^{(k+1)}(u)}{(k+1)!}\,.$$

Considérons un petit intervalle fermé autour de x_0 : $J = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$. Puisque $f \in C^{(k+1)}(I)$, la continuité de $f^{(k+1)}$ sur I implique qu'elle est bornée sur J : il existe une constante C telle que

$$|f^{k+1}(x)| \leqslant C \qquad \forall x \in J\,.$$

En particulier, $|f^{(k+1)}(u)| \leqslant C$, ce qui implique que sur J, $|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{C}{(k+1)!}|x - x_0|$. En particulier,

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0\,.$$

(ici, Video: a_breaking_bad_DL.mp4)

□

Informel 10.11. Le résultat ci-dessus est intéressant, mais ses hypothèses peuvent en fait être affaiblies : il existe un résultat similaire, mais qui garantit l'existence d'un $DL(k)$ pour une fonction k fois (et non pas $k+1$ fois) continûment dérivable. L'avantage de la formulation ci-dessus est que le reste est exprimé de façon très explicite, ce qui permettra d'utiliser le résultat efficacement au chapitre suivant.

Donc la formule de Taylor nous dit que l'on peut obtenir un développement limité en x_0 d'ordre arbitrairement grand, à condition que la fonction soit suffisamment dérivable en x_0 et dans son voisinage, et que l'on sache calculer ses dérivées $f^{(k)}(x_0)$.

Exemple 10.12. Considérons

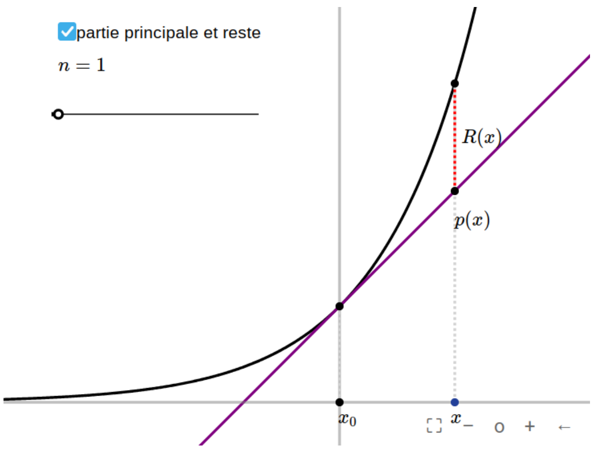
$$f(x) = e^x \qquad \text{au voisinage de } x_0 = 0\,.$$

Comme e^x est de classe C^{k+1} pour tout k, elle possède des développements limités de tous les ordres. On a $f^{(j)}(x) = e^x$ et donc $f^{(j)}(0) = 1$ pour tout j. Par la formule de MacLaurin,

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + R(x)}\,,$$

où $R(x) = x^k \varepsilon(x)$, et

$$\varepsilon(x) = x\frac{e^u}{(k+1)!} \qquad \text{pour un certain } u \in]0, x[\,.$$



◇

Exemple 10.13. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ autour de $x_0 = 0$. Puisque f n'est pas définie en $x = 1$, on la considère par exemple dans l'ouvert $]-1, 1[$. Écrivons $f(x) = (1-x)^{-1}$, et calculons ses dérivées :

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= (-1)(1-x)^{-2}(-1) \\
f^{(2)}(x) &= (-1)(-2)(1-x)^{-3}(-1)^2 \\
f^{(3)}(x) &= (-1)(-2)(-3)(1-x)^{-4}(-1)^3 \\
&\dots \\
f^{(k)}(x) &= (-1)(-2)(-3)\cdots(-k)(1-x)^{-(k+1)}(-1)^k\,.
\end{aligned}$$

On a donc $f^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}$ pour tout j, ce qui donne

$$f^{(j)}(0) = j!$$

Par la formule de MacLaurin,

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + R(x)\,,}$$

qui est bien ce que nous avions trouvé plus haut. ◇

Exemple 10.14. Considérons $f(x) = \sin(x)$ en $x_0 = 0$. Rappelons que

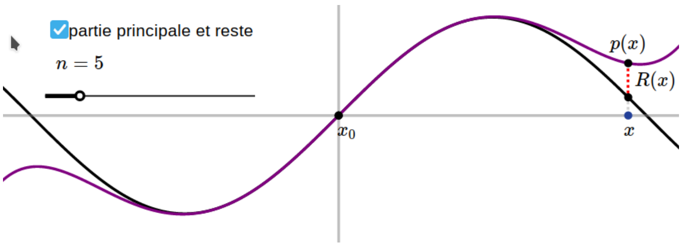
$$f^{(k)}(x) = \sin(x + k\tfrac{\pi}{2})\,,$$

donc $f^{(k)}(0) = 0$ pour tous les k pairs, ce qui a pour conséquence que le développement de MacLaurin ne contient aucune puissance paire. On a par exemple le $DL(3)$,

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + R(x)}$$

ou le $DL(5)$:

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R(x)\,.}$$



◇

Remarque 10.15. Si on dispose d'une calculatrice qui ne connaît pas les fonctions trigonométriques, on peut utiliser des développements limités. Pour illustrer le procédé, supposons que l'on veuille calculer le sinus d'un angle de 1 radian, $\sin(1)$, sans calculatrice. En allant jusqu'à l'ordre 9, l'approximation par la partie principale

$$\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

fournit déjà une approximation remarquable, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$. Si on l'utilise pour $x = 1$:

$$\sin(1) \simeq 0.8414710097 \quad \text{(ordre 9)}$$

Si on compare avec la valeur "exacte" obtenue avec une calculatrice :

$$\sin(1) = 0.841470984808\cdots \quad \text{(exact)}\,.$$

◇

Exemple 10.16. $f(x) = \cos(x)$ en $x_0 = 0$:

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R(x)}$$

◇

Exemple 10.17. $f(x) = \log(1+x)$ en $x_0 = 0$. Les dérivées se calculent facilement :

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= (1+x)^{-1} \\ f^{(2)}(x) &= (-1)(1+x)^{-2} \\ f^{(3)}(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3} \\ &\cdots \\ f^{(k)}(x) &= (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k}\,, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,.$$

On a ainsi le $DL(k)$:

$$\boxed{\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + R(x)\,.}$$

◇

10.4.2 À propos de l'existence d'un DL

Quiz 10.4.1. *Soit I un ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Vrai ou faux ?*

1) □ *Si il existe un polynôme $p(x)$ de degré n tel que $f(x) = p(x - x_0) + R(x)$, où $R(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$, alors f possède un $DL(n)$ en x_0.*
2) □ *Si il existe un polynôme $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ tel que $f(x) = p(x - x_0) + (x - x_0)^n g(x)$, où $g(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$, alors f possède un $DL(n)$ en x_0.*
3) □ *Si $p(x)$ est un polynôme de degré n tel que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{p(x)} = 1$, alors f possède un $DL(n)$ en x_0.*
4) □ *Si f est de classe C^k dans I, alors f possède un $DL(k-1)$ en x_0.*

10.5 Utilisation de DL pour le calcul de limites

Les développements limités fournissent un moyen très précis d'approximer une fonction au voisinage d'un point, à l'aide d'un polynôme. Et les polynômes étant des objets très simples à manipuler, l'utilisation de développements limités peut grandement simplifier l'étude d'une fonction en ce point.

Par exemple, ils peuvent être utiles pour le calcul de certaines limites.

Dans toutes les indéterminations "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

rencontrées précédemment, on étudie un quotient de deux fonctions dont les valeurs deviennent toujours plus petites à mesure que x se rapproche de x_0. *Lever l'indétermination* c'est, en somme, arriver à expliciter la "petitesse" de chacune des deux fonctions, de façon suffisamment précise pour arriver à pouvoir calculer la valeur du quotient lorsque x est proche de x_0.

Exemple 10.18. Considérons l'indétermination "$\frac{0}{0}$" dans la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

On a déjà calculé cette limite (en multipliant et divisant par le conjugué $\cos(x)+1$), mais voyons comment utiliser un DL pour approcher le problème de façon différente.

Comme on s'intéresse à x proche de 0, on peut utiliser le $DL(2)$ du cosinus vu plus haut,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x)\,,$$

où on rappelle que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Ce DL permet de montrer que la "petitesse" du numérateur de notre quotient est en fait quadratique en x, puisque

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) = \big(-\frac{1}{2} + \varepsilon(x)\big)x^2\,.$$

(Une "petitesse en x^2" donc.) Ceci donne

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \frac{(-\frac{1}{2}+\varepsilon(x))x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} + \varepsilon(x)\,.$$

Cette expression montre, de manière transparente, que ce quotient est proche de $-\frac{1}{2}$ quand x est proche de 0. En effet, puisque $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, la limite est

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = -\frac{1}{2}\,.$$

◇

Informel 10.19. Attention : lorsqu'on utilise un $DL(n)$, on utilise le fait que la fonction "$\varepsilon(x)$" est petite proche du point considéré. Pourtant, on ne sait en général pas estimer précisément la petitesse de $\varepsilon(x)$!

Parfois, pour arriver à décrire précisément la petitesse d'un terme, il est nécessaire de choisir un DL d'un ordre suffisamment grand, comme dans l'exemple suivant :

Exemple 10.20. (Sur l'importance du choix de l'ordre du DL.) Étudions

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2 - x^2\cos(x)}{x^2(1-\cos x)}\,.$$

Numérateur et dénominateur sont petits quand x est proche de 0, et des DL vont permettre de quantifier précisément leurs petitesses respectives. Par contre, on va voir qu'il sera nécessaire de prendre un développement d'ordre *suffisamment élevé* pour conclure.

1) Commençons simplement, en prenant le $DL(1)$ pour le sinus et le $DL(2)$ pour le cosinus. On nomme les restes différemment pour pouvoir les distinguer :

$$\sin(x) = x + x\varepsilon_s(x) \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon_c(x)\,.$$

Alors le numérateur devient

$$\begin{aligned}(\sin x)^2 - x^2\cos(x) &= \big(x + x\varepsilon_s(x)\big)^2 - x^2\big(1 - \tfrac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon_c(x)\big)\\ &= \underbrace{2x^2\varepsilon_s(x) + x^2\varepsilon_s(x)^2 + \frac{x^4}{2!} + x^4\varepsilon_c(x)}_{??}\end{aligned}$$

Dans cette expression, tout est petit, mais aucun terme ne domine clairement les autres. Il est donc nécessaire d'aller à un ordre plus élevé.

2) Prenons le $DL(3)$ pour le sinus, en gardant le $DL(2)$ pour le cosinus :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_s(x) \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon_c(x)\,.$$

Alors le numérateur peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&(\sin x)^2 - x^2\cos x \\
&= \big(x - \tfrac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_s(x)\big)^2 - x^2\big(1 - \tfrac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon_c(x)\big) \\
&= \frac{1}{6}x^4 + x^4 \underbrace{\big(\tfrac{x^2}{(3!)^2} + x^2\varepsilon_s(x)^2 + 2\varepsilon_s(x) - \tfrac{x^2}{3!}\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)\big)}_{\equiv \varepsilon(x)} \\
&= \Big(\frac{1}{6} + \varepsilon(x)\Big)x^4\,.
\end{aligned}$$

Maintenant, on comprend que la petitesse du numérateur est en x^4.

Ensuite, le dénominateur devient

$$\begin{aligned}
x^2(1-\cos x) &= x^2\Big\{1 - \Big(1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon_c(x)\Big)\Big\} \\
&= \frac{1}{2}x^4 - x^4\varepsilon_c(x) \\
&= \Big(\frac{1}{2} - \varepsilon_c(x)\Big)x^4\,.
\end{aligned}$$

et représente donc aussi une petitesse en x^4. Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2 - x^2\cos(x)}{x^2(1-\cos x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{6}+\varepsilon(x))x^4}{(\frac{1}{2}-\varepsilon_c(x))x^4} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+\varepsilon(x)}{\frac{1}{2}-\varepsilon_c(x)} \\
&= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Remarquons que dans ce calcul, on a vraiment travaillé partout avec des égalités ! ◇

Quiz 10.5.1. *Vrai ou faux ? (Sans calculs !)*

1) □ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x) - (x - x^3/6)}{x^5}$ *existe*

2) □ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x) - (1 - x^2/2 + x^4)}{x^3} = 0$

3) □ $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+x) - (x - x^2/2)}{x^4} = +\infty$

4) □ $\lim_{x\to \infty}\frac{\log(1+x) - (x - x^2/2)}{x^4} = 0$

10.6 Composition de DL

Supposons qu'on veuille un $DL(n)$ d'une fonction f autour d'un point x_0, et que cette fonction soit en fait une composée :

$$f(x) = (g\circ h)(x) = g(h(x))\,.$$

On supposera, pour simplifier l'exposition, que les fonctions g et h possèdent des dérivées de tous les ordres.

Informel 10.21. A priori, on pourrait utiliser la formule de Taylor, qui permet d'obtenir un développement limité pour f en passant par les dérivées $f^{(1)}(x_0), \dots, f^{(k)}(x_0)$. Mais puisque f est une composée, le calcul de $f^{(k)}(x_0)$, pour k grand, risque bien d'être compliqué...

10.6.1 Cas simples

Voyons un exemple simple de composée dans lequel on peut éviter de passer par le calcul des grandes dérivées de f.

Exemple 10.22. Fixons un entier n, grand, et cherchons un $DL(n)$ de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

autour de $x = 0$. Cette fonction peut s'écrire

$$f(x) = \frac{1}{1-z}\Big|_{z=-x^2} = g(h(x))\,,$$

où

$$g(x) = \frac{1}{1-x}\,, \qquad h(x) = -x^2\,.$$

Pour g, on a déjà calculé le $DL(n)$ autour de $z_0 = 0$,

$$g(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + R(z)\,,$$

où $R(z) = z^n\varepsilon(z)$. Comme $z = h(x) = -x^2$ est proche de 0 lorsque x est proche de $x_0 = 0$, on peut l'injecter directement dans le DL de g, ce qui donne le DL de $f = g \circ h$:

$$\begin{aligned} g(h(x)) &= 1 + h(x) + h(x)^2 + h(x)^3 + \dots + h(x)^n + R(h(x)) \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + R(-x^2) \end{aligned}$$

Si on regarde le reste de plus près,

$$R(-x^2) = (-x^2)^n\varepsilon(-x^2) = x^{2n}\tilde{\varepsilon}(x)\,,$$

où on a posé $\tilde{\varepsilon}(x) := (-1)^n\varepsilon(-x^2)$, qui tend bien vers zéro lorsque $x \to 0$.

On a donc

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\tilde{\varepsilon}(x)\,.$$

◇

On peut utiliser une idée semblable pour des développements qui ne sont pas forcément autour de $x = 0$:

Exemple 10.23. Soit

$$f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Cherchons un $DL(n)$ de f autour de $x_0 = 3$. Ici aussi, on pourrait facilement calculer les dérivées de f d'ordre quelconque (voir plus bas), mais on peut aussi récrire f en utilisant le fait qu'on l'étudie autour de $x_0 = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{3 + (x-3)} \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{1 + \frac{x-3}{3}} \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{1-z}\Big|_{z=-\frac{x-3}{3}} \\ &= \frac{1}{3}g(h(x))\,, \end{aligned}$$

où $g(z)=\frac{1}{1-z}$ et $h(x)=-\frac{x-3}{3}$. Quand x est proche de $x_0=3$, $z=h(x)$ est proche de zéro ; on peut donc directement injecter $h(x)$ dans le $DL(n)$ de g :

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{3}\Big\{1+h(x)+h(x)^2+h(x)^3+\cdots+h(x)^n+R(h(x))\Big\}\\
&=\frac{1}{3}\Big\{1-\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{3^2}(x-3)^2-\frac{1}{3^3}(x-3)^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{3^n}(x-3)^n+R(-\frac{x-3}{3})\Big\}\\
&=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}(x-3)+\frac{1}{3^3}(x-3)^2-\frac{1}{3^4}(x-3)^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n+\tilde{R}(x)
\end{aligned}$$

Remarquons que l'on tombe bien ce qu'on aurait trouvé en passant par la formule de Taylor. En effet, si $f(x)=\frac{1}{x}$, alors

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!x^{-(n+1)}\,,$$

et donc

$$\frac{f^{(n)}(3)}{n!}=\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\,.$$

◇

10.6.2 Cas plus compliqués

Dans les deux exemples ci-dessus, $h(x)$ était un petit polynôme, que l'on a pu directement injecter dans le DL de g, pour obtenir le DL de $g\circ h$. Que faire, alors, si h n'est plus un polynôme ?

Informel 10.24. Par exemple, comment calculer un $DL(n)$ de

$$f(x)=\log(1+\sin(x))$$

autour de $x_0=0$? L'idée est que l'on connaît le $DL(n)$ de $\log(1+z)$ pour z autour de zéro :

$$\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}+R(z)\,,$$

Comme $\sin(x)$ est petit lorsque x est proche de 0, on aimerait utiliser cette expression pour $z=\sin(x)$:

$$\begin{aligned}
&\log(1+\sin(x))\\
&\qquad=\sin(x)-\frac{(\sin(x))^2}{2}+\frac{(\sin(x))^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}(\sin(x))^n}{n}+R((\sin(x)))\,.
\end{aligned}$$

Cette jolie formule est correcte, mais ce n'est pas un développement limité ("polynôme+reste") ! Donc ce qu'on pourrait faire ensuite, c'est utiliser le DL du sinus et l'injecter dans cette expression...

Théorème 10.25. *Soient*

1) *$h(x)$ une fonction possédant un $DL(n)$ autour de x_0, et*
2) *$g(z)$ une fonction possédant un $DL(n)$ autour de $z_0=h(x_0)$.*

Alors $f(x):=g(h(x))$ possède un $DL(n)$ autour de x_0, dont la partie principale s'obtient comme suit : ***on injecte la partie principale du développement de $h(x)$ dans la partie principale du développement de $g(z)$, on développe, et on ne garde que les termes qui sont des puissances de $x-x_0$ plus petites ou égales à n.***

Preuve: Nous omettons la preuve, en reconnaissant qu'elle représente un calcul assez fastidieux, qui pourtant ne représente aucune difficulté particulière. (Il s'agit en gros de savoir développer les puissances d'un polynôme, et de regrouper correctement les termes, pour voir tout ce qui part dans le reste.) □

Informel 10.26. Ce qui est pratique, dans ce procédé, c'est qu'on peut se concentrer uniquement sur les parties principales, on n'a pas besoin de regarder les restes de trop près !

Exemple 10.27. Cherchons le $DL(3)$ de $f(x) = \log(1 + \sin(x))$ autour de $x_0 = 0$. On commence par identifier la composition : $f(x) = g(h(x))$, où $g(z) = \log(1 + z)$, $h(x) = \sin(x)$. Prenons un $DL(3)$ pour $h(x)$,

$$\sin(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!}}_{\text{principale}} + x^3\varepsilon_s(x)\,.$$

et un $DL(3)$ pour $g(z)$:

$$\log(1 + z) = \underbrace{z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}}_{\text{principale}} + z^3\varepsilon_{\log}(z)\,.$$

Maintenant, on injecte la partie principale du $DL(3)$ du sinus dans la partie principale du $DL(3)$ du logarithme, on développe, on regroupe les puissances en ordre croissant, et on ne garde que les puissances $\leqslant 3$:

$$\begin{aligned} z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}\Big|_{z=x-\frac{x^3}{3!}} &= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 \\ &= \underbrace{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3}_{\text{puissances}\leqslant 3} + \underbrace{\cdots}_{\text{puissances }>3} \end{aligned}$$

Donc le $DL(3)$ de f autour de $x = 0$ est donné par

$$\log(1 + \sin(x)) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)\,.$$

◇

Chapitre 11

Séries entières et séries de Taylor

11.1 Introduction

Supposons qu'une fonction f possède des développements limités en x_0, *de tous les ordres* :

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + R_1(x)\\
f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + R_2(x)\\
f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + R_3(x)\\
&\vdots\\
f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 \cdots + a_n(x-x_0)^n + R_n(x)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Que se passe-t-il si on prend $n \to \infty$?

Remarquons qu'au-dessus, on a fait attention de nommer le reste différemment en fonction de l'ordre du DL.

Puisqu'un développement limité d'ordre de plus en plus grand implique une approximation de $f(x)$ toujours meilleure, on s'attend à ce que la limite "$n \to \infty$" mène à une reconstruction *exacte* de $f(x)$, dans laquelle il n'y a plus d'approximation.

Décrivons plus précisément ce processus de limite. *Fixons* un point x dans le voisinage de x_0.

1) D'abord, à mesure que n devient plus grand, le polynôme de la partie principale contient toujours plus de termes. Dans la limite $n \to \infty$ il devient une *série de puissances* (un "polynôme de degré infini") :

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\,,$$

et pour que cette série fasse du sens, il faut pouvoir montrer qu'elle converge pour le x qu'on a fixé.

2) Ensuite, afin de garantir que cette série décrit exactement la fonction, il faut s'assurer que la suite de restes, au point x qu'on a fixé, tend vers zéro :

$$R_n(x) \to 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty$$

(Attention : ici x est fixé, c'est n qui tend vers l'infini !)

Si on peut vérifier ces deux conditions, cela signifie que la valeur de f en x peut se calculer à l'aide de la série :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \,.$$

On verra plus tard que ce programme est possible, sous certaines hypothèses.

Mais avant cela, nous allons introduire et étudier plus systématiquement les séries de puissance du type ci-dessus.

11.2 Séries entières

Indépendamment du problème énoncé ci-dessus, on peut étudier les séries (infinies) de puissances sans qu'elles soient nécessairement liées à une suite de développements limités :

Définition 11.1. Une série de la forme

$$\sum_{k \geqslant 0} a_k (x - x_0)^k$$

où $(a_k)_{k \geqslant 0}$ est une suite donnée, $x_0 \in \mathbb{R}$, est appelée **série entière** (ou **série de puissances**, en anglais : **power series**).

Une série entière est un type particulier de série, où x joue le rôle de paramètre; sa convergence/divergence dépend en général de x. Pour pouvoir utiliser cette série comme une fonction, on s'intéresse donc aux valeurs de x pour lesquelles elle converge :

$$D := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ converge} \right\} ,$$

Remarque 11.2. D contient toujours au moins le point $x = x_0$! ◇

On peut alors définir une fonction sur D, à l'aide de la somme de la série :

$$\begin{aligned} \psi : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \psi(x) := \sum_{k \geqslant 0} a_k (x - x_0)^k \,. \end{aligned}$$

La fonction ψ est, par nature (c'est une fonction définie par une série !), difficile à étudier. Considérons d'abord un cas simple bien connu :

Exemple 11.3. Considérons la série entière associée à la suite constante $a_k = 1$, au point $x_0 = 0$:

$$\psi(x) = \sum_{k \geqslant 0} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

On reconnaît la série géométrique, qui comme on sait converge si et seulement si $x \in D =]-1, 1[$.

Ce qu'on peut dire, en plus, c'est que si $x \in]-1, 1[$, alors non seulement la série définit bien une fonction, mais on sait en plus que

$$\psi(x) = \frac{1}{1 - x} \qquad (!!!)$$

Donc on peut formuler ce résultat comme suit : lorsque $x \in]-1, 1[$, la série entière convergente $\sum_{k \geqslant 0} x^k$ est en fait juste une *représentation* de la fonction $\frac{1}{1-x}$. ◇

11.2.1 Rayon et intervalle de convergence

L'ensemble des x pour lesquels une série entière converge a une structure assez simple :

Théorème 11.4. *Il existe un $0 \leqslant R \leqslant +\infty$ tel que*

$$\sum_{k\geqslant 0} a_k(x-x_0)^k \begin{cases} \textit{converge si } |x-x_0| < R\,, \\ \textit{diverge si } |x-x_0| > R\,. \end{cases}$$

On appelle R le ***rayon de convergence*** *de la série.*

De plus, dans le cas où on peut donner un sens à la limite

$$\sigma := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,,$$

alors

$$R = \begin{cases} +\infty & \textit{si } \sigma = 0\,, \\ \frac{1}{\sigma} & \textit{si } 0 < \sigma < \infty\,, \\ 0 & \textit{si } \sigma = \infty\,. \end{cases}$$

Preuve: Écrivons notre série entière sous la forme $\sum_{k\geqslant 0} b_k(x)$, où

$$b_k(x) := a_k(x-x_0)^k\,.$$

Commençons par supposer que la limite suivante existe :

$$\sigma(x) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n(x)|}\,,$$

on sait, par le critère de Cauchy, que

$$\sum_{k\geqslant 0} b_k(x) \begin{cases} \text{converge si} & \sigma(x) < 1\,, \\ \text{diverge si} & \sigma(x) > 1\,. \end{cases}$$

Or si on regarde de plus près,

$$\sigma(x) = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-x_0|\sigma\,,$$

ce qui implique que

$$\sum_{k\geqslant 0} b_k(x) \begin{cases} \text{converge si} & |x-x_0| < \frac{1}{\sigma}\,, \\ \text{diverge si} & |x-x_0| > \frac{1}{\sigma}\,. \end{cases}$$

Donc en définissant R par $R := \frac{1}{\sigma}$, on obtient bien le résultat. □

Remarque 11.5. ⋆ On peut vérifier que la limite σ peut s'exprimer sous une autre forme, utile dans certaines situations :

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,,$$

⋆ La conclusion du théorème ci-dessus reste vraie si σ est défini par

$$\sigma := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

◇

Le théorème ci-dessus garantit que l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels une série entière converge est nécessairement un intervalle, appelé **intervalle de convergence** :

- ⋆ Si $R = 0$, la série converge uniquement lorsque $x = x_0$, et donc $D = \{x_0\}$ (un intervalle ne contenant que le point x_0).
- ⋆ Si $0 < R < \infty$, alors D est un intervalle, d'un des 4 types suivants :

$$\begin{aligned} &]x_0 - R, x_0 + R[\,, \\ &[x_0 - R, x_0 + R[\,, \\ &]x_0 - R, x_0 + R]\,, \\ &[x_0 - R, x_0 + R]\,. \end{aligned}$$

- ⋆ Si $R = \infty$, elle converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $D = \mathbb{R}$.

Informel 11.6. Dans le cas où $0 < R < \infty$, on déterminera le type d'intervalle en étudiant la convergence de la série entière $\sum_k a_k(x - x_0)^k$ au bord de l'intervalle, c'est-à-dire en $x = x_0 \pm R$.

Une fois que D est connu, la série entière permet donc de définir la *fonction*

$$\begin{aligned} \psi : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \psi(x) := \sum_{k\geqslant 0} a_k(x - x_0)^k\,. \end{aligned}$$

Considérons pour commencer des exemples de séries entières centrées en $x_0 = 0$:

$$\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$$

Par le théorème ci-dessus, on sait que l'intervalle de convergence est forcément de la forme

1) $D = \{0\}$ (lorsque $R = 0$),
2) $D = \mathbb{R}$ (lorsque $R = \infty$).
3) $D =]-R, R[$, $[-R, R[$, $]-R, R]$ ou $[-R, R]$ (lorsque $0 < R < \infty$), et on déterminera précisément le cas en étudiant la série en $x = \pm R$.

Exemple 11.7. Considérons

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} x^k\,.$$

Dans ce cas,

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\tfrac{(-1)^n}{2^n}\right|} = \frac{1}{2}\,,$$

et donc $R = \frac{1}{\sigma} = 2$: la série converge pour tout $-2 < x < 2$, et diverge si $x > 2$ ou $x < -2$. Regardons maintenant ce qui se passe en $x = \pm 2$.

- ⋆ En $x = +2$ la série est
$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots\,,$$
et donc elle diverge.
- ⋆ En $x = -2$ la série est
$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots\,,$$
donc elle diverge aussi.

On conclut donc que l'intervalle de convergence est $D =]-2, 2[$. ◇

Exemple 11.8. Considérons
$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k$$
Ici,
$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{2\frac{\log(n)}{n}} = e^0 = 1\,,$$
donc $R = 1$. Comme la série diverge lorsque $x = \pm 1$, on a que $D =]-1, 1[$. ⋄

Exemple 11.9. Considérons
$$\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k$$
Ici,
$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty\,,$$
donc $R = 0$. Donc la série converge si et seulement si $x = 0$: $D = \{0\}$ ⋄

Exemple 11.10. Considérons
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$
Utilisons la version "d'Alembert" :
$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1/(n+1)}{1/n} \right| = 1\,,$$
donc $R = 1$. Regardons $x = \pm 1$:

- ⋆ En $x = +1$, la série est
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\,,$$
qui est la série harmonique, qui diverge.
- ⋆ En $x = -1$, la série est
$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots\,,$$
qui est (à un signe près) la série harmonique alternée, qui converge.

On conclut que l'intervalle de convergence est $D = [-1, 1[$. ⋄

Exemple 11.11. Considérons
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$
On trouve
$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = 0\,,$$
et donc $R = \infty$: la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc son intervalle de convergence est $D = \mathbb{R}$. (Cette série peut en fait être utilisée pour **définir la fonction exponentielle** (lien vers la section m_fonctions_EXPLOG).) ⋄

Quiz 11.2.1. *Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Si une série entière converge en x_1 et x_2, alors elle converge en tout point intermédiaire x', $x_1 < x' < x_2$.*
2) ☐ *Il existe une série entière qui converge en $x = -1$, diverge en $x = 0$, et converge en $x = +1$.*
3) ☐ *Si une série entière $\sum_k a_k (x - x_0)^k$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $a_k = 0$ pour tout k suffisamment grand.*

Quiz 11.2.2. *Soit f la fonction définie par la série entière*

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (x - x_0)^n ,$$

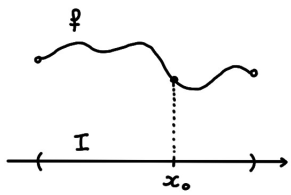
et soit D son intervalle de convergence. Vrai ou faux ?

1) $\square$ $D \ni x_0$.
2) $\square$ *Si* $a_n \to 0$, *alors* $D = \mathbb{R}$.
3) $\square$ *Si* $a_n \to \infty$, *alors* $D = \{x_0\}$.
4) $\square$ *Si* $a_n \to -\infty$, *alors* $D \subset \mathbb{R}_-$.
5) $\square$ *Si* $D \neq \mathbb{R}$, *alors* D *est soit de la forme* $]x_0 - R, x_0 + R[$, *soit de la forme* $[x_0 - R, x_0 + R]$.
6) $\square$ *Si* $x \in \mathbb{R}$ *est tel que* $\lim_{n\to\infty} a_n (x - x_0)^n = 0$, *alors* $x \in D$.
7) $\square$ *Si* $a_n = 0$ *pour une infinité d'indices* n, *alors* $D = \mathbb{R}$.
8) $\square$ *Si* $a_n = 0$ *pour tout* n *suffisamment grand, alors* $D = \mathbb{R}$.
9) $\square$ *Si* $\lim_{n\to\infty} |a_n| > 0$, *alors* $D = \{x_0\}$.
10) $\square$ *Si* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, *alors* $D = \mathbb{R}$.
11) $\square$ *Si* $\sqrt[n]{|a_n|}$ *n'est pas bornée, alors* $D = \{x_0\}$.

11.3 Séries entières et représentation de fonctions

Revenons à notre problème initial, qui était de prendre la limite $n \to \infty$ pour une fonction qui possède, pour tout n, un $DL(n)$.

Soit I un intervalle ouvert, f une fonction définie sur I, et $x_0 \in I$ un point fixé.



On sait, depuis la formule de Taylor, que si f est de classe C^n sur I, alors elle possède un $DL(n)$ en x_0. Donc si on veut que f possède des développements limités de tous les ordres, on peut imposer qu'elle soit *infiniment dérivable* sur I.

Définition 11.12. L'ensemble des fonctions **infiniment dérivables sur** I est défini par

$$C^\infty(I) := \left\{ f : I \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \in C^k(I) \ \forall k \geqslant 1 \right\}$$

Exemple 11.13. Les fonctions fondamentales, telles que polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmes, sont toutes infiniment dérivables sur leur domaine de définition. ◇

Donc si $f \in C^\infty(I)$, elle possède un développement limité à tous les ordres en x_0, dont les coefficients sont donnés par $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$:

$$\begin{aligned}
&f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x) \\
&f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R_2(x)\,. \\
&f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \tfrac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + R_3(x)\,. \\
&\qquad\vdots \\
&f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \tfrac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \cdots + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)\,. \\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant décrire les contraintes à imposer pour garantir que dans la limite $n \to \infty$, les parties principales permettent de reconstruire entièrement $f(x)$.

On l'a déjà dit, dans la limite, les parties principales donnent naissance à une série entière :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,,$$

Il sera donc essentiel de s'assurer que *le x qu'on considère appartient à l'intervalle de convergence de cette série.*

Mais ça n'est pas encore suffisant : on voudra aussi que *la limite des restes soit nulle*, pour le x qu'on considère :

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Le procédé peut donc être résumé de la façon suivante :

1) On calculera le rayon de convergence R et l'intervalle de convergence de la série entière

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,,$$

noté I_s.

2) On déterminera tous les $x \in I$ pour lesquels $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$; on notera I_r l'ensemble de ces x.

Informel 11.14. Rappelons qu'à n fixé, $R_n(x)$ étant le reste du $DL(n)$ de f autour de x_0,

$$\lim_{x\to x_0} R_n(x) = 0\,.$$

Mais ici, ce que l'on fait est différent : on fixe un x proche de x_0, et on demande que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0\,.$$

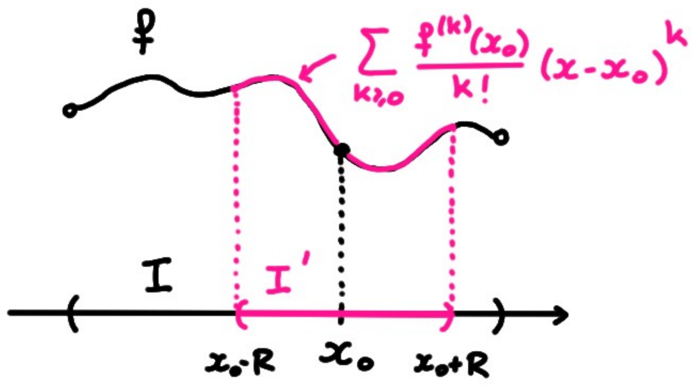
Si ces deux étapes peuvent être vérifiées rigoureusement, on aura montré que sur l'ensemble

$$I' := I \cap I_s \cap I_r\,.$$

f peut être **représentée** à l'aide de la série

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \forall x \in I'\,,$$

appelée **série de Taylor** (ou **développement de Taylor**). Lorsque $x_0 = 0$, on l'appelle **série de MacLaurin** (ou **développement de MacLaurin**).



Définition 11.15. Une fonction infiniment dérivable f, définie au voisinage du point x_0, **possède un développement de Taylor (DT) en** x_0 si elle peut être représentée par sa série de Taylor dans ce voisinage :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\,.$$

Si la fonction peut effectivement être représentée par sa série de Taylor, cela signifie qu'elle peut être entièrement reconstruite, dans un voisinage de x_0, à l'aide de la connaissance de *toutes* ses dérivées en x_0.

11.4 Exemples

Étudions maintenant quelques développements de Taylor classiques. Nous utiliserons le procédé décrit plus haut sur quelques exemples simples, puis listerons aussi d'autres développements, dont la justification rigoureuse ne sera pas donnée, puisqu'elle requiert d'autres techniques.

Exemple 11.16. Étudions le développement de MacLaurin de $f(x) = e^x$.

Puisque $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout k, $f \in C^\infty(I)$, avec $I = \mathbb{R}$. Pour tout n fixé, son $DL(n)$ autour de 0 est donné par

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)\,,$$

où $R_n(x) = x^n \varepsilon_n(x)$, avec

$$\varepsilon_n(x) = x\frac{e^u}{(n+1)!}\,,$$

où u est un nombre entre 0 et x. Voyons si on peut prendre la limite $n \to \infty$, en vérifiant les deux étapes décrites plus haut.

1) D'abord, la série de MacLaurin associée est

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}x^k\,.$$

On a vu que cette série a un rayon de convergence infini, elle converge donc pour tout x : $I_s = \mathbb{R}$.

2) Ensuite, pour calculer la limite du reste, on commence par l'estimer comme suit : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|R_n(x)| = |x^n \varepsilon_n(x)| &= \left|x^{n+1}\frac{e^u}{(n+1)!}\right| \\ &\leqslant |x|^{n+1}\frac{e^{|u|}}{(n+1)!} \\ &\leqslant e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Dans cette dernière inégalité, on a utilisé le fait que u est entre 0 et x, et donc $|u| \leqslant |x|$. Maintenant, puisque x est fixé, le critère de d'Alembert (pour les suites) implique que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0\,,$$

on a donc bien que le reste tend vers zéro : $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, pour tout $x \in I_r = \mathbb{R}$.

Ceci implique que l'exponentielle peut être écrite à l'aide de sa série de MacLaurin, pour tout réel $x \in I' = I \cap I_s \cap I_r = \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^x = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}x^k\,.}$$

$\diamond$

Remarque 11.17. En général, dans les livres d'analyse, la fonction exponentielle est **définie** par sa série de MacLaurin, ce qui représente toutes sortes d'avantages. Mais bien sûr, si on la définit par sa série, il faut ensuite démontrer que des propriétés classiques, comme par exemple $e^{x+y} = e^x e^y$ ou $(e^x)' = e^x$, sont effectivement vérifiées. $\diamond$

Exemple 11.18. Considérons le sinus hyperbolique,

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,.$$

Puisqu'on a déjà la série de Taylor de e^x, et que celle-ci converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k\geqslant 0}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k\geqslant 0}\frac{(-x)^k}{k!}\Big) \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}\frac{(1-(-1)^k)}{2}x^k\,.\end{aligned}$$

Mais puisque

$$\frac{1-(-1)^k}{2} = \begin{cases}0 & k \text{ pair,}\\ 1 & k \text{ impair,}\end{cases}$$

seuls les termes d'indices impairs demeurent. On a donc

$$\boxed{\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k\geqslant 0}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,\qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

De même pour le cosinus hyperbolique,

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,$$

$$\boxed{\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

◇

Exemple 11.19. Considérons le développement de MacLaurin de $f(x) = \sin(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. On peut écrire ses dérivées de façon compacte,

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\tfrac{\pi}{2})\,,$$

ce qui donne $f^{(n)}(0) = \sin(n\frac{\pi}{2})$. On a donc que toutes les dérivées d'ordre pair sont nulles, $f^{(2k)}(0) = 0$, alors que $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, ce qui donne une série de Taylor

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}\,.$$

On vérifie facilement que cette série converge pour tout $x \in I_s := \mathbb{R}$. Le reste étant $R_n(x) = x^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}$, et puisque $|f^{(n+1)}(u)| \leqslant 1$, on a aussi que $R_n(x) \to 0$ pour tout $x \in I_r := \mathbb{R}$. Ceci montre que la série de Taylor décrit f sur toute la droite :

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

On peut procéder de même pour montrer que

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

◇

Voyons un exemple où on est forcé de restreindre les valeurs de x pour pouvoir implémenter notre programme :

Exemple 11.20. Considérons $f(x) = \log(1+x)$, définie sur $I =]-1, +\infty[$. Sur I, f est infiniment dérivable, et ses dérivées sont données par

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k}\,.$$

Ainsi, sa série de MacLaurin est

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\,,$$

et on a vu que l'intervalle de convergence de cette série entière est $I_s :=]-1, 1]$,

L'étude du reste est plus délicate. Si $x \in I_s$,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= |x^n \varepsilon_n(x)| \\ &= \left| x^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} \right| \\ &= \frac{1}{n+1} \left| \frac{x}{1+u} \right|^{n+1} \end{aligned}$$

On voit que pour tendre vers zéro, il faut s'assurer que $|\frac{x}{1+u}| \leqslant 1$. Distinguons les cas. D'une part, si $x \geqslant 0$, alors $u \geqslant 0$, et donc

$$\left| \frac{x}{1+u} \right| = \frac{x}{1+u} \leqslant x \leqslant 1\,,$$

ce qui permet d'écrire

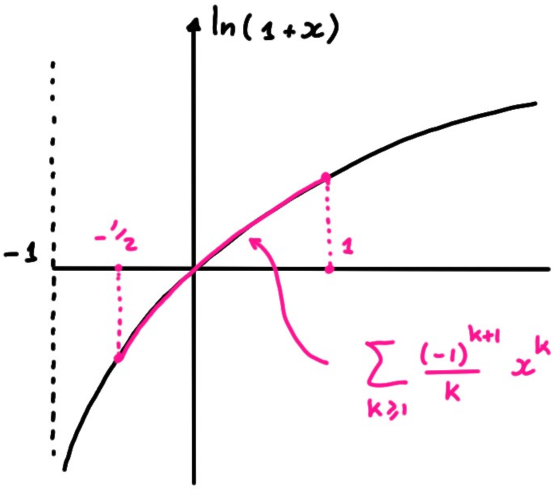
$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty\,.$$

D'autre part, si $-1 < x \leqslant 0$ alors $1+u \geqslant 1+x > 0$ et donc

$$\left|\frac{x}{1+u}\right| = \frac{-x}{1+u} \leqslant \frac{-x}{1+x}\,.$$

Donc pour garantir $|\frac{x}{1+u}| \leqslant 1$, on peut imposer $\frac{-x}{1+x} \leqslant 1$, qui est équivalent à $x \geqslant -\frac{1}{2}$. Donc $R_n(x) \to 0$ dès que $x \in I_r := [-\frac{1}{2}, 1]$. Ainsi, on a montré que

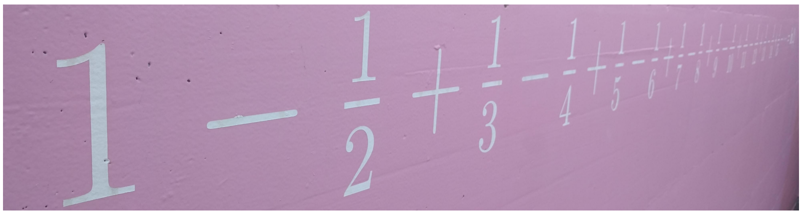
$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\,, \quad \forall x \in [-\tfrac{1}{2}, 1]}$$



On ne le fera pas ici, mais on peut en fait montrer que la série de MacLaurin représente la fonction sur tout l'intervalle $]-1, 1]$. ◇

Si on utilise le développement ci-dessus en $x = 1$ (juste sur le bord de l'intervalle où on a le droit de l'utiliser !), on peut écrire

$$\log(2) = \log(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$$



Remarque 11.21. On peut aussi montrer, avec une méthode qui n'a rien à voir avec les développements limités (voir **ici** (lien web)), que

$$\log(2) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$$

◇

Exemple 11.22. On peut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,.}$$

◇

Remarque 11.23. Puisque $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, on peut utiliser cette série de Taylor pour représenter π :

$$\pi = 4\frac{\pi}{4} = 4\arctan(1) = 4\Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\cdots\Big)$$

Chaque somme partielle de cette série fournit une approximation du nombre π. Par exemple, à l'ordre 11,

$$\pi \simeq 4\Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}\Big) = 2.9760\cdots.$$

Cette approximation n'est pas très bonne, car les sommes partielles de cette série se rapprochent assez lentement de leur limite. **En fait** (lien web), il faudrait aller jusqu'à l'ordre 300 pour avoir seulement deux décimales correctes :

$$\begin{aligned}\pi \simeq& 4\Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{299} - \frac{1}{301}\Big)\\ &= 3.14821509\cdots.\end{aligned}$$

Il existe d'autres séries **voir Wiki)** (lien web) qui permettent d'approximer π, dont les sommes partielles s'approchent beaucoup plus rapidement de leur limite. Considérons par exemple la formule de **Chudnovsky** (1987) :

$$\pi = 2\sum_{k\geqslant 0}\frac{2^k(k!)^2}{(2k+1)!}.$$

Avec 11 termes,

$$\begin{aligned}\pi \simeq& 2\Big(1 + \frac{2}{3!} + \frac{2^2 2!^2}{5!} + \cdots + \frac{2^{11}(11!)^2}{23!}\Big)\\ &= 3.1413584\ldots\end{aligned}$$

◇

11.4.1 Des fonctions que l'on ne peut pas représenter par une série de Taylor ?

Voyons maintenant un exemple d'une fonction qui est infiniment dérivable en un point mais qui ne peut *pas* être représentée par sa série de Taylor, même si cette dernière est bien définie :

Exemple 11.24. Considérons

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

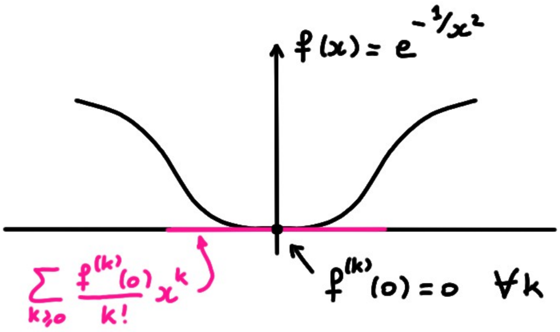
Clairement, f est infiniment dérivable partout en dehors de $x = 0$. En travaillant un peu plus (laissé en exercice), on peut montrer que f est également infiniment dérivable en $x = 0$, et que ses dérivées en ce point sont toutes nulles :

$$f^{(k)}(0) = 0 \qquad \forall k \geqslant 1\,.$$

On en déduit que le $DL(n)$ en $x_0 = 0$ existe, et est donnée par

$$f(x) = \underbrace{0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \cdots + 0\cdot x^n}_{=0} + \underbrace{R_n(x)}_{=f(x)}$$

On en déduit que sa série de MacLaurin est la série entière dont *tous les termes sont nuls* ; elle converge donc en tout $x \in \mathbb{R}$, mais ne représente évidemment pas la fonction...



Ce qui se passe, ici, c'est que le reste est *égal* à la fonction elle-même, et donc pour tout $x \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$. $\diamond$

Chapitre 12

Intégrale

12.1 Introduction

Le problème original du *calcul intégral* était de calculer des aires, des longueurs et des volumes, pour des objets géométriques du plan ou de l'espace, plus compliqués que les formes simples de la géométrie, tels que triangles, rectangles, cercles, parallélépipèdes, sphères, ...

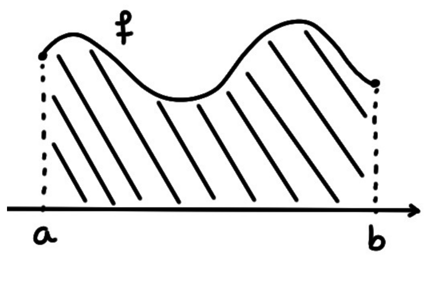
Plus tard, surtout après les travaux de Newton et Leibniz à la fin du XIIXème siècle, le calcul intégral permettait d'aller bien plus loin que le calcul des aires et de volumes, trouvant des applications à la mécanique, thermodynamique, etc., plus tard à la théorie des probabilités, puis à tous les domaines des sciences.

12.1.1 Aires de régions simples

Nous nous concentrerons, dans cette introduction, sur des régions particulières du plan, limitées par le graphe d'une fonction et un axe. Donc dans cette section nous traiterons uniquement des fonctions dont les valeurs sont positives ; dans les sections suivantes on passera au cas plus général. On va donc considérer une fonction sur un intervalle fermé et borné, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, telle que

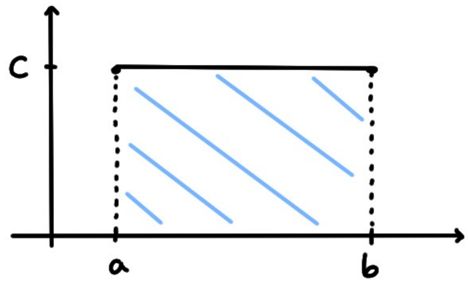
$$f(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [a, b]$$

On considérera la région délimitée par le graphe de f, par l'axe Ox, et par les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$:



Commençons par un cas très simple mais très important :

Exemple 12.1. Considérons une droite horizontale, c'est-à-dire une fonction constante, $f(x) = C$ $\forall x \in [a, b]$, où C est constante strictement positive.



Dans ce cas, la région en question est un rectangle, et l'aire se calcule par

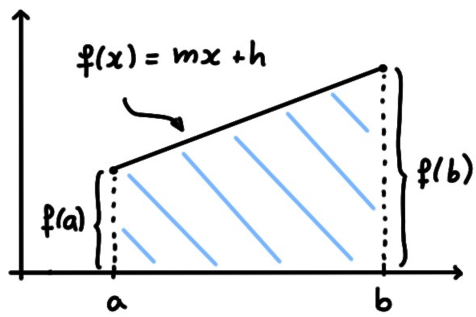
$$\text{aire} = \text{base} \times \text{hauteur} = (b-a) \times C = C(b-a)\,.$$

◇

Exemple 12.2. Si on considère maintenant la région délimitée par une droite de pente non-nulle, d'équation

$$y = f(x) = mx + h \qquad \forall x \in [a,b]\,,$$

positive en tout point de $[a,b]$,



alors la région considérée est un trapèze (si d'aventure $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, c'est un triangle), dont on calcule l'aire en faisant

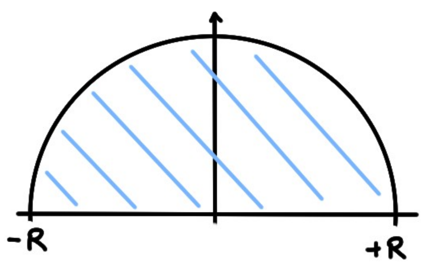
$$\begin{aligned} \text{aire} &= \text{moyenne des bases} \times \text{hauteur} \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2} \times (b-a) \\ &= \frac{(ma+h)+(mb+h)}{2} \times (b-a) \\ &= \frac{1}{2}m(b^2-a^2) + h(b-a)\,. \end{aligned}$$

◇

Exemple 12.3. Finalement, si on considère

$$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2} \qquad \forall x \in [-R,R]\,,$$

alors la région considérée est un demi-disque de rayon R,



et donc son aire est

$$\text{aire} = \frac{1}{2}\pi R^2\,.$$

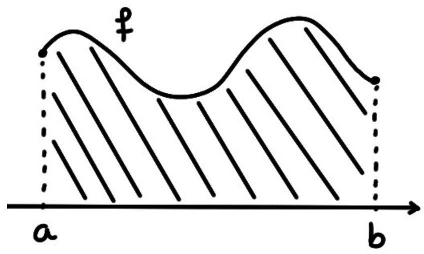
◇

Les exemples ci-dessus font partie des quelques cas de figures géométriques du plan dont on peut calculer l'aire sans avoir recours au calcul intégral.

12.2 Définition de l'intégrale de Riemann-Darboux

Dans toute cette section, on fixera une fonction *bornée* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Pour garder en tête l'interprétation en terme d'une "aire sous la courbe", les illustrations se feront la plupart du temps pour une fonction positive.



Pourtant, la construction de l'intégrale que l'on va donner ci-dessous est *indépendante du signe de la fonction sur l'intervalle*.

12.2.1 Subdivisions

L'idée générale de base de l'intégration est *d'approximer un objet compliqué à l'aide d'une union d'objets simples.* Dans l'intégrale d'une fonction, on approxime l'aire sous le graphe de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ à l'aide de "régions simples" qui sont des rectangles.

La première étape est de diviser l'intervalle :

Définition 12.4. On appelle **subdivision** (aussi : **partition**) de l'intervalle $[a, b]$ toute collection ordonnée de nombres

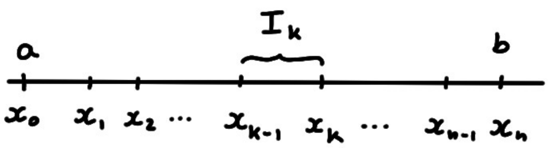
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

On notera en général une subddivision par la lettre

$$\sigma = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)\,.$$

Soit $\sigma = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On définit, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'intervalle

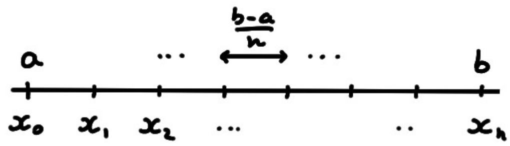
$$I_k := [x_{k-1}, x_k]\,.$$



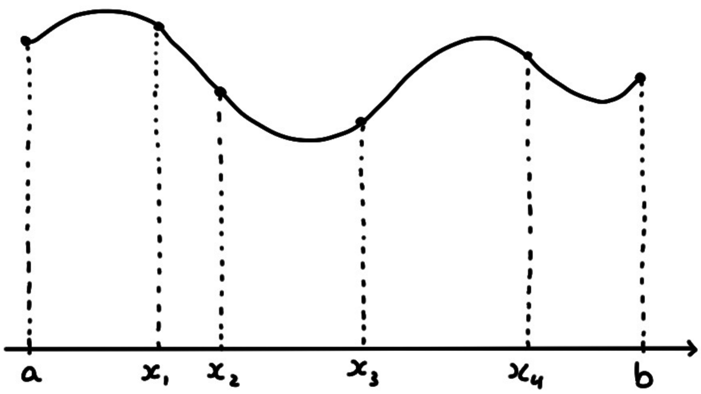
Notons qu'en général, les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ne sont pas forcément tous de même longueur.

Définition 12.5. On appelle **subdivision régulière (à n éléments) de** $[a, b]$ la subdivision dont les intervalles I_k ont tous taille $\frac{b-a}{n}$, c'est-à-dire pour laquelle $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$:

$$\sigma = \left(a, a + \tfrac{b-a}{n}, a + 2\tfrac{b-a}{n}, \ldots, a + (n-1)\tfrac{b-a}{n}, b\right)$$



Une fois que l'on se donne une subdivision, on peut l'utiliser pour diviser la région sous le graphe de f en régions plus fines, qui commencent à ressembler à des rectangles :



12.2.2 Sommes de Darboux

Pour une subdivision donnée $\sigma = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$, introduisons pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, les nombres

$$m_k := \inf_{x \in I_k} f(x)\,, \qquad M_k := \sup_{x \in I_k} f(x)\,,$$

Puisqu'on suppose que f est bornée, ces nombres sont finis.

On peut alors définir deux sommes associées à la subdivision σ :

Définition 12.6. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, et σ une subdivision de $[a, b]$. On définit :

1) la **somme de Darboux inférieure**,

$$\underline{S}_\sigma(f) := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})\,,$$

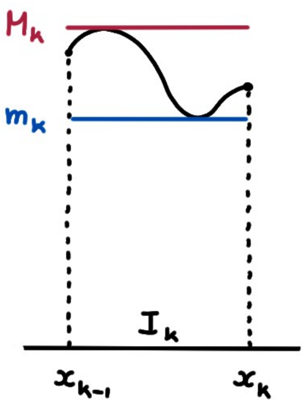
2) la **somme de Darboux supérieure**

$$\overline{S}_\sigma(f) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})\,.$$

Par définition,

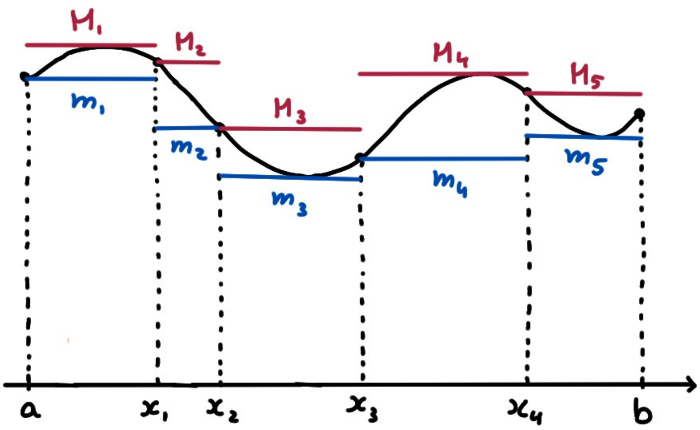
$$\underline{S}_\sigma(f) \leqslant \overline{S}_\sigma(f)\,.$$

Considérons la fonction sur l'intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Dans le cas où $f(x) \geqslant 0$, $m_k(x_k - x_{k-1})$ (resp. $M_k(x_k - x_{k-1})$) représente l'aire d'un rectangle, dont le côté supérieur est situé *en-dessous* (resp. *en-dessus*) du graphe de f.



Donc sur I_k, la *vraie* aire sous le graphe peut toujours être comparée aux aires de ces deux rectangles, ce qui a pour conséquence que globalement, l'aire sous la courbe peut être minorée et majorée par les sommes de Darboux :

$$\underline{S}_\sigma(f) \leqslant \text{aire} \leqslant \overline{S}_\sigma(f)\,.$$

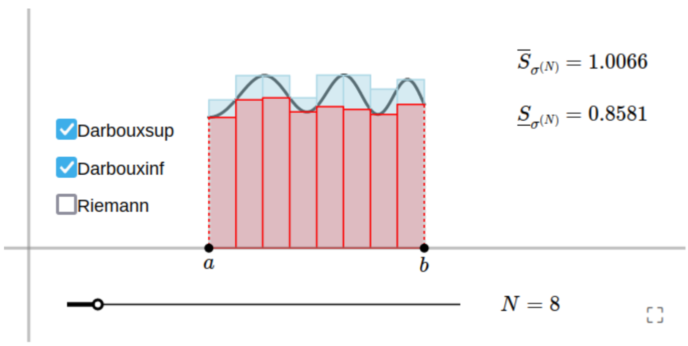


Voyons maintenant comment se comportent les sommes de Darboux lorsqu'on rajoute un point à la subdivision :

Lemme 25. *Soit* $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n)$ *une subdivision de* $[a,b]$*, et soit* $\sigma' = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_k, \dots, x_n)$ *la subdivision obtenue en rajoutant un point* y *à* σ*, entre* x_{k-1} *et* x_k*. Alors*

$$\underline{S}_\sigma(f) \leqslant \underline{S}_{\sigma'}(f) \leqslant \overline{S}_{\sigma'}(f) \leqslant \overline{S}_\sigma(f)\,.$$

A priori, $\underline{S}_\sigma(f)$ et $\overline{S}_\sigma(f)$ sont des nombres différents : $\underline{S}_\sigma(f) < \overline{S}_\sigma(f)$. Mais le lemme ci-dessus nous dit qu'ils ne peuvent que se rapprocher lorsque l'on rajoute des points dans la subdivision. On s'attend donc à ce que pour des fonctions "raisonnables", il soit possible de rendre $\underline{S}_\sigma(f)$ arbitrairement proche de $\overline{S}_\sigma(f)$, en prenant une subdivision suffisamment fine :



Ceci motive la définition suivante :

Définition 12.7. Pour une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée, on définit les nombres

$$\underline{S}(f) := \sup_{\sigma} \underline{S}_{\sigma}(f)\,,$$
$$\overline{S}(f) := \inf_{\sigma} \overline{S}_{\sigma}(f)\,.$$

Si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$, on dit que f est **intégrable au sens de Riemann/Darboux** . On appelle le nombre $S = \underline{S}(f) = \overline{S}(f) \equiv S$ l'**intégrale de** f, et on le note

$$S = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Par convention, on définit

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0\,.$$

Remarque 12.8. Le symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ représente un nombre, qui ne dépend pas du "x" qui apparaît deux fois. On appelle ce "x" une **variable d'intégration**. C'est une variable **muette**, dans le sens où elle est uniquement utilisée pour construire l'intégrale ; l'intégrale n'en dépend pas explicitement. Donc on pourrait aussi écrire

$$I = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha = \int_a^b f(m)\,dm = \cdots$$

Les nombres a et b sont appelés **bornes d'intégration**. ◇

Informel 12.9. À propos de la terminologie : Le symbole $\int$, apparemment introduit par Newton, est une espèce de "S", qui peut rappeler l'origine de l'intégrale : "somme".

À strictement parler, l'intégrale **au sens de Riemann** passe par la définition des **sommes de Riemann**

$$S^*_{\sigma}(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1})\,,$$

où pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, x_k^* est un point quelconque choisi dans $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Ces sommes satisfont toujours

$$\underline{S}_{\sigma}(f) \leqslant S^*_{\sigma}(f) \leqslant \overline{S}_{\sigma}(f)\,.$$

Quiz 12.2.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, σ une subdivision de $[a,b]$, et $\overline{S}_{\sigma}(f)$ et $\underline{S}_{\sigma}(f)$ les sommes Darboux supérieures et inférieures. Vrai ou faux ?*

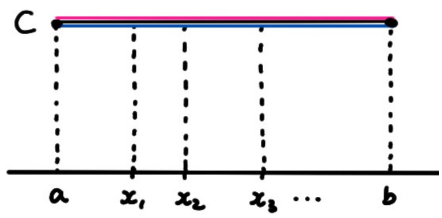
1) ☐ $\underline{S}_{\sigma}(f) \leqslant \overline{S}_{\sigma}(f)$.
2) ☐ *Si* $\underline{S}_{\sigma}(f) = \overline{S}_{\sigma}(f)$, *alors f est intégrable.*
3) ☐ *Si* $\underline{S}_{\sigma}(f) < \overline{S}_{\sigma}(f)$, *alors f n'est pas intégrable.*
4) ☐ *Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est aussi bornée, telle que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\overline{S}_{\sigma}(f) \leqslant \overline{S}_{\sigma}(g)$.*
5) ☐ *Si $\sigma' \subset \sigma$, alors $\overline{S}_{\sigma'} \geqslant \overline{S}_{\sigma}(f)$ et $\underline{S}_{\sigma'} \leqslant \underline{S}_{\sigma}(f)$.*
6) ☐ *Si $\sup_{\sigma} \underline{S}_{\sigma}(f) = \inf_{\sigma} \overline{S}_{\sigma}(f)$, alors f est intégrable.*

12.3 Les fonctions intégrables

Se pose maintenant la question de savoir quelles fonctions sont réellement intégrables au sens de la définition donnée plus haut.

Commençons par un exemple (trop) simple.

Exemple 12.10. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction constante : $f(x) = C$.



Si $C > 0$, on sait que l'intégrale doit exister, et puisqu'elle représente l'aire du rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur C, elle doit être égale à $C(b-a)$. Voyons pourquoi c'est effectivement le cas.

Soit σ une subdivision de $[a, b]$. Puisque $m_k = C$ pour tout k, la Darboux inférieure vaut

$$\begin{aligned}\underline{S}_\sigma(f) &= \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= C\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\ &= C((\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \cdots + (x_n - \cancel{x_{n-1}})) \\ &= C(x_n - x_0) \\ &= C(b-a)\,.\end{aligned}$$

De même, $M_k = C$ pour tout k, et donc la somme de Darboux supérieure vaut $\overline{S}_\sigma(f) = C(b-a)$. Puisque les sommes ne dépendent pas du choix de la subdivision, ceci implique

$$\begin{aligned}\underline{S}(f) &= \sup_\sigma \underline{S}_\sigma(f) = C(b-a)\,, \\ \overline{S}(f) &= \inf_\sigma \overline{S}_\sigma(f) = C(b-a)\,,\end{aligned}$$

et donc $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$, ce qui entraîne que f est intégrable et que son intégrale vaut

$$\int_a^b f(x)\,dx = C(b-a)\,.$$

◇

Ce dernier exemple est excessivement simple : puisque la fonction est constante, les sommes de Darboux sont constantes et ne dépendent pas de la subdivision, donc ne donnent aucun travail particulier.

Mais en général, dès que la fonction n'est plus constante, les sommes de Darboux *sont toujours* différentes, $\underline{S}_\sigma(f) < \overline{S}_\sigma(f)$, peu importe la subdivision, et montrer qu'elles peuvent malgré tout être rendues proches l'une de l'autre semble être un problème difficile.

Dans la section suivante, nous allons donner un résultat qui, même s'il ne permet pas forcément de *calculer* une intégrale, pourra au moins garantir l'intégrabilité...

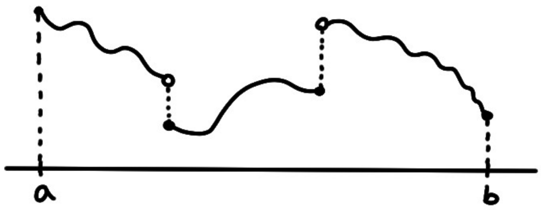
Remarque 12.11. Les résultats énoncés sur cette page sont donnés sans démonstration, puisqu'ils reposent tous, pour la plupart, sur la notion de **continuité uniforme**, une notion qui n'est pas traitée dans ce cours. ◇

12.3.1 Une condition suffisante pour l'intégrabilité : la continuité

Théorème 12.12. *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue, alors elle est intégrable.*

Par conséquent, toutes les fonctions fondamentales (polynômes, fonctions trigo, exponentielles et logarithmes) sont intégrables sur les intervalles fermés et bornés contenus dans leurs domaines.

En fait, on peut montrer qu'il suffit que f soit continue *par morceaux* pour être intégrable :



La résultat ci-dessus a la conséquence suivante : si une fonction n'est pas intégrable, c'est qu'elle doit être "très discontinue".

Exemple 12.13. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x):=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\,,\\ 0 & \text{si } x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]\,.\end{cases}$$

On voit facilement que $\underline{S}_\sigma(f)=0$ et $\overline{S}_\sigma(f)=1$, quelle que soit la subdivision σ. Donc f n'est pas intégrable. ◇

Voyons ensuite un résultat qui montre que l'on peut en principe *calculer* l'intégrale d'une fonction continue en choisissant des suites de subdivisions.

Pour une subdivision $\sigma=(x_0,x_1,\dots,x_n)$, on définit

$$|\sigma|:=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k-x_{k-1}|\,.$$

Théorème 12.14. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue, et $\sigma^{(N)}$ une suite de subdivisions telle que, dans la limite où $N\to\infty$,*

$$|\sigma^{(N)}|\to 0\,.$$

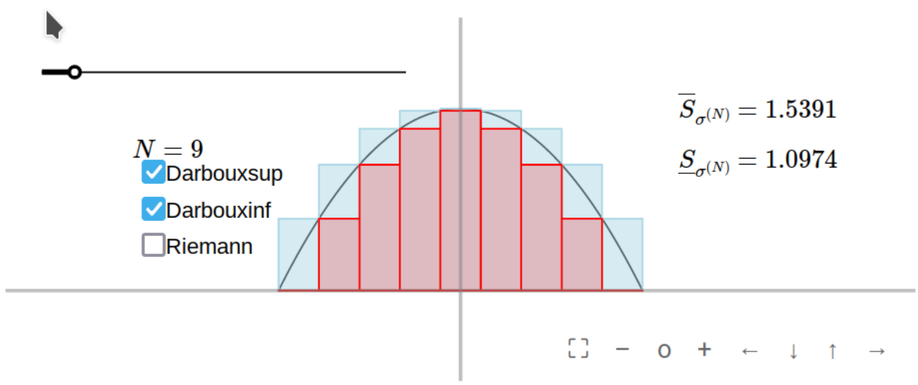
Alors

$$\overline{S}_{\sigma^{(N)}}(f)\to\int_a^b f(x)\,dx\,,\qquad \text{et } \underline{S}_{\sigma^{(N)}}(f)\to\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Dans la pratique, on utilise souvent une suite de partitions régulières, où $\sigma^{(N)}$ contient N intervalles de longueurs égales. Voyons cela sur un exemple.

Exemple 12.15. Considérons l'aire sous la "parabole d'Archimède", dont l'équation est

$$f(x)=1-x^2\,,\qquad x\in[-1,1]\,.$$



Par parité, il suffit de calculer l'aire de la moitié de l'aire sous la courbe, disons la partie de droite :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\,dx\,.$$

f étant continue, on peut utiliser le théorème et calculer l'intégrale en utilisant une suite de subdivisions Le plus simple, dans ce cas, est d'utiliser des subdivisions régulières. Prenons donc la suite de subdivisions $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots$ définie par

$$\sigma^{(N)} = \left(0, \tfrac{1}{N}, \tfrac{2}{N}, \dots, \tfrac{N-1}{N}, 1\right),$$

Dans $\sigma^{(N)}$, on a que $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{N}$.
On peut maintenant récrire précisément la somme de Darboux supérieure :

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{\sigma^{(N)}}(f) &= \sum_{j=0}^{N-1} f(\tfrac{j}{N})\frac{1}{N} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\Big(1 - \big(\frac{j}{N}\big)^2\Big) \\
&= 1 - \frac{1}{N^3}\sum_{j=0}^{N-1} j^2 \\
&= 1 - \frac{(N-1)N(2(N-1)+1)}{6N^3}
\end{aligned}$$

Dans cette dernière ligne, on a utilisé la formule

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.}$$

(Pour une preuve, voir ce qui a été fait **ici** (lien vers la section `m_recurrence`).)

Donc, par le théorème,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \lim_{N\to\infty} \overline{S}_{\sigma^{(N)}}(f) \\
&= 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{(N-1)N(2(N-1)+1)}{6N^3} \\
&= 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}\,,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{4}{3} = 1.33333\dots\,.$$

◇

12.3.2 Propriétés des fonctions intégrables

(ici, Video: `v_integrale_proprietes.mp4`)

Proposition 14. *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables.*

1) ***Linéarité*** *: pour toutes constantes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^b \big(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)\big) dx = \lambda_1 \int_a^b f(x) dx + \lambda_2 \int_a^b g(x) dx\,.$$

2) *Pour tout $a < c < b$, on a la* ***relation de Chasles***

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx\,.$$

3) *Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(x) dx \leqslant \int_a^b g(x) dx\,.$$

4) *Si $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ pour tout $x \in [a,b]$, alors*

$$\alpha(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \beta(b-a)\,.$$

5)

$$\Big|\int_a^b f(x)\, dx\Big| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

La relation de Chasles est valable seulement lorsque $a < c < b$, mais pour qu'elle reste vraie plus généralement,

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^a f(x)\, dx = \int_a^a f(x)\, dx = 0\,,$$

nous adopterons la convention suivante :

$$\boxed{\int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx\,.}$$

Quiz 12.3.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Si f est bornée, alors f est intégrable.*
2) ☐ *Si f n'est pas bornée, alors f n'est pas intégrable.*
3) ☐ *Si f est continue, alors f est intégrable.*
4) ☐ *Si f n'est pas continue en au moins un point $x_0 \in]a,b[$, alors f n'est pas intégrable.*
5) ☐ *Si f est intégrable, alors f est continue.*
6) ☐ *Si f est intégrable, alors f est continue par morceaux.*
7) ☐ *Si f est dérivable sur $]a,b[$, alors f est intégrable.*
8) ☐ *Si f est intégrable, alors pour tout $a < c < d < b$, $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ est aussi intégrable.*

Quiz 12.3.2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, intégrable. Vrai ou faux ?*

1) ☐ $\int_a^b f(x)\,dx$ *représente l'aire sous le graphe de* f.
2) ☐ *Si* $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$, *alors* $f(x) \geqslant 0$ *pour tout* $x \in [a,b]$.
3) ☐ *Si* $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$, *alors l'intégrale représente l'aire sous le graphe de* f.
4) ☐ *Si* $f(x) = C$ *pour tout* $x \in [a,b]$, *alors* $\int_a^b f(x)\,dx = C(b-a)$.
5) ☐ *Si* $f(x) \geqslant 0$ *pour tout* $x \in [a,b]$, *alors* $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Quiz 12.3.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique, de période T. Vrai ou faux ?*

1) ☐ $\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = 0$
2) ☐ $\int_{-T}^{0} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$
3) ☐ $\int_0^{nT} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x)\,dx$ $(n \in \mathbb{N})$
4) ☐ *La limite* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$ *existe*

12.4 Le Théorème de la Moyenne

12.4.1 La moyenne d'une fonction ?

En arithmétique, on définit la *moyenne* d'une famille de nombres $x_1, x_2, \dots, x_N$ par

$$\bar{x} := \frac{1}{N}\big(x_1 + x_2 + \cdots + x_N\big)$$

Si on veut calculer la valeur moyenne d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on ne peut pas simplement *sommer* ses valeurs , et on a naturellement recours à l'intégrale :

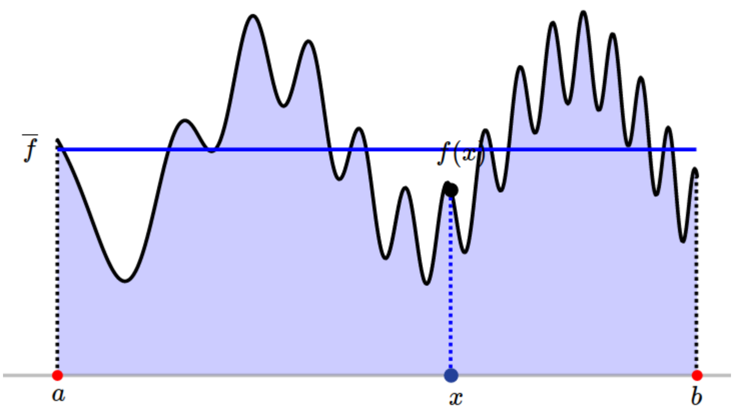
Définition 12.16. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, on définit sa **valeur moyenne sur** $[a,b]$ par

$$\bar{f} := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,.$$

$\bar{f}$ est l'analogue continu de la moyenne discrète $\bar{x}$. En effet,

⋆ à la somme des x_k, $k \in \{1,\dots,N\}$ correspond l'intégrale des $f(x)$, $x \in [a,b]$, et
⋆ à la division par la taille de l'échantillon, $\frac{1}{N}$, correspond la division par la longueur de l'intervalle $\frac{1}{b-a}$.

Lorsque $f(x) \geqslant 0$, on peut interpréter le nombre $\bar{f}$ géométriquement : c'est l'unique nombre tel que le rectangle de base $[a,b]$ et de hauteur $\bar{f}$ ait même aire que la région sous la courbe.



Informel 12.17. Supposons que la région sous le graphe de f est une forme faite de glace, contenue dans un récipient de base $[a,b]$; la quantité de glace présente dans cette forme est égale à

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

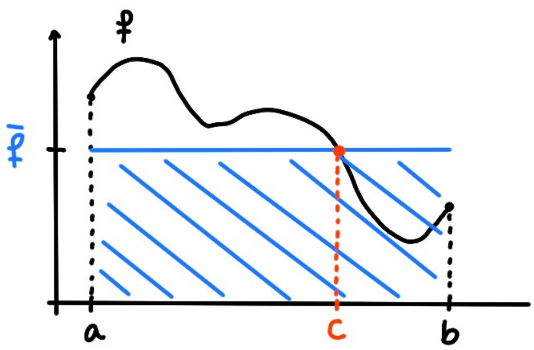
Si on laisse la glace fondre, après un certain temps, toute la glace s'est transformée en eau, dont le niveau dans le récipient est à une certaine hauteur $\bar{f}$. Puisque la quantité d'eau est (en première approximation) égale à la quantité de glace initiale, on doit avoir

$$(b-a)\bar{f} = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Le niveau d'eau coïncide donc avec la valeur moyenne de f.

Théorème 12.18. *(Théorème de la moyenne) Si* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *est continue, alors il existe* $c\in]a,b[$ *tel que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,.$$



Preuve: Comme f est continue, elle atteint une valeur minimum m et une valeur maximum M ; de plus, $\mathrm{Im}(f)=[m,M]$, ce qui implique $m\leqslant f(x)\leqslant M$ pour tout $x\in[a,b]$, et donc aussi

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b M\,dx\,,$$

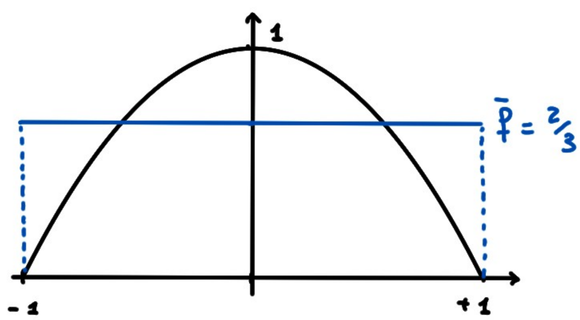
ce qui donne, après division par $b-a$,

$$m\leqslant \bar{f}\leqslant M\,.$$

Mais comme $\mathrm{Im}(f)=[m,M]$, le Théorème de la valeur intermédiaire implique qu'il existe au moins un $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=\bar{f}$. □

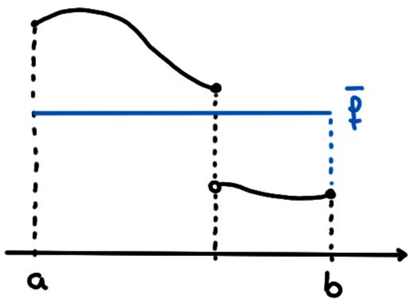
Exemple 12.19. Considérons encore la parabole d'Archimède, qui est le graphe de la fonction continue $f(x)=1-x^2$, $x\in[-1,1]$. Sa valeur moyenne est donnée par

$$\bar{f} = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$



On voit qu'il existe deux nombres, $\overline{c} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in]-1,1[$, tels que $f(c) = \overline{f}$. ◇

Remarque 12.20. Remarquons que si f n'est pas continue, alors le résultat n'est pas toujours vrai :



Cette fonction est manifestement continue par morceaux, donc intégrable, et sa valeur moyenne $\bar{f}$ est bien définie. Par contre, il n'existe aucun $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \bar{f}$. ◇

12.5 Théorème Fondamental de l'Analyse

(ici, Video: v_integrale_TF_1.mp4)

Maintenant que l'on a défini l'intégrale et que l'on a étudié ses principales propriétés, revenons au problème plus appliqué, qui est celui de savoir comment *calculer* $\int_a^b f(x)dx$.

12.5.1 Une fonction auxiliaire

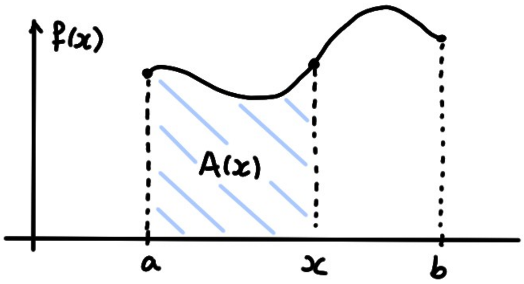
Dans cette section, nous supposerons en général que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue.

Définition 12.21. On appelle **fonction aire (associée à f)** la fonction $A : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$A(x) := \int_a^x f(t)dt\,.$$

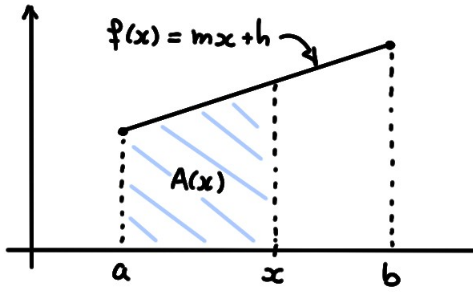
Remarque 12.22. On a pris soin de nommer la variable d'intégration différemment (on a choisi "t", mais on aurait pu prendre n'importe quelle lettre différente de x), pour montrer que la dépendance de $A(x)$ en x est dans la borne supérieure de l'intégrale. ◇

Comme son nom l'indique, $A(x)$ peut être interprétée, lorsque f est positive, comme l'aire sous le graphe de f, entre les droites verticales d'abscisses a et x respectivement. Cette aire dépend bien sûr du choix de x :



Par définition, on a $A(a) = 0$, et notre but est de calculer $A(b)$.

Exemple 12.23. Si $f(x) = mx + h$, est positive sur $[a,b]$, alors $A(x)$ est une aire de trapèze :



On peut donc calculer explicitement :

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-a)\times\frac{f(a)+f(x)}{2} \\ &= \frac{1}{2}m(x^2-a^2)+h(x-a)\,. \end{aligned}$$

Remarque : $A(x)$ est dérivable sur $]a,b[$, et

$$A'(x) = \Big(\frac{1}{2}m(x^2-a^2)+h(x-a)\Big)' = mx+h = f(x) \qquad (!)$$

◇

Cette propriété surprenante que l'on vient d'observer, à savoir que *la dérivée de la fonction aire est égale à la fonction*, est en fait toujours vraie...

12.5.2 Première partie

Théorème 12.24. *(Théorème Fondamental, première partie) Pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $x \mapsto A(x)$ est dérivable sur $]a,b[$, et sa dérivée vaut f :*

$$A'(x) = f(x) \qquad \forall x \in]a,b[\,.$$

Preuve: Fixons $x \in]a,b[$, et montrons que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)\,.$$

D'abord, puisque $a < x < x+h$, la relation de Chasles entraîne

$$A(x+h) = A(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\,,$$

qui permet d'écrire

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt\,.$$

Maintenant, le Théorème de la Moyenne, appliqué à l'intégrale du membre de droite de cette dernière égalité, garantit l'existence d'un $c_h \in]x,x+h[$ tel que

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c_h)\,.$$

Or lorsque $h \to 0^+$, on a $c_h \to x^+$, et comme f est continue en x cela donne

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} f(c_h) = \lim_{c\to x^+} f(c) = f(x)\,.$$

On procède de même avec la limite $h \to 0^-$, pour montrer que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)\,.$$

Ceci montre donc que $A'(x)$ existe et vaut $f(x)$. □

Les fonctions qui, comme A, sont dérivables, et dont la dérivée vaut f, portent un nom :

Définition 12.25. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert. Une fonction F dérivable sur cet intervalle et telle que $F' = f$ est appelée une **primitive** de f.

Informel 12.26. En anglais, on utilise le terme “**antiderivative**”, plus approprié puisqu'il exprime parfaitement la propriété qui définit F.

Exemple 12.27. Par exemple, $F(x) = x - \frac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x) = 1 - x^2$, puisque

$$F'(x) = \Big(x - \frac{x^3}{3}\Big)' = 1 - x^2 = f(x) \qquad \forall x\,.$$

Remarquons que $G(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi^2}{6}$ est *aussi* une primitive de $f(x)$, puisque la constante $\frac{\pi^2}{6}$ a une dérivée nulle, et donc $G'(x) = f(x)$. ◇

On le voit dans ce dernier exemple : lorsqu'une fonction possède une primitive, elle en possède une infinité, puisqu'on peut toujours ajouter une constante arbitraire qui ne contribue pas à la dérivée.

Le lemme suivant a déjà été démontré précédemment (conséquence du Théorème des accroissements finis, **ici** (lien vers la section `m_derivee_theoreme_accroissements_finis`)).

Lemme 26. *Soit I un intervalle ouvert, et soient $F, G : I \to \mathbb{R}$ deux primitives de f, alors il existe une constante C telle que*

$$F(x) = G(x) + C \quad \forall x \in I\,.$$

Avant de poursuivre, une conséquence de ce qui précède :

Lemme 27. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue.*

Preuve: La continuité en les points $x_0 \in]a, b[$ suit de la dérivabilité démontrée plus haut. Il reste donc à vérifier la continuité sur le bord. Pour démontrer la continuité à droite en a, on peut profiter du fait que f est bornée (puisqu'elle est continue) : il existe une constante C telle que$|f(t)| \leqslant C$ pour tout $t \in [a, b]$. Par conséquent,

$$|A(x)| = \Big|\int_a^x f(t)\,dt\Big| \leqslant \int_a^x |f(t)|\,dt \leqslant C \int_a^x dt = C|x-a|\,,$$

qui implique

$$\lim_{x \to a^+} A(x) = 0 = A(a)\,.$$

On montre de même que $\lim_{x \to b^-} A(x) = A(b)$. □

12.5.3 Deuxième partie

(ici, Video: v_integrale_TF_2.mp4)

Théorème 12.28. *(Théorème Fondamental, deuxième partie) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, et soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\,.$$

Parfois, on utilisera aussi la notation

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)\,.$$

Preuve: On sait que la fonction aire $A(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ est une primitive de f. Donc, par le lemme précédent, il existe une constante C telle que $A(x) = F(x) + C$ pour tout $x \in]a, b[$. Par continuité, ceci implique aussi que $A(a) = F(a) + C$ et $A(b) = F(b) + C$. On trouve la valeur de C en remarquant que $A(a) = 0$, ce qui implique $C = -F(a)$. On a donc

$$\int_a^b f(x)\, dx = A(b) = F(b) - F(a)\,.$$

□

Exemple 12.29. On a déjà vu une primitive de $f(x) = 1 - x^2$: $F(x) = x - \frac{x^3}{3}$. On peut donc recalculer l'aire sous la parabole d'Archimède :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (1 - x^2)\, dx &= F(1) - F(-1)\\ &= \Big(1 - \frac{1^3}{3}\Big) - \Big((-1) - \frac{(-1)^3}{3}\Big)\\ &= \frac{4}{3}\,.\end{aligned}$$

◇

Le Théorème Fondamental a montré que le calcul d'une intégrale peut, en principe, se réduire à un calcul de primitive. Or la recherche d'une primitive peut souvent représenter un travail considérable, même pour des fonctions simples.

Nous allons donc, après avoir dit quelques généralités, passer un certain temps à décrire quelques-unes de méthodes classiques de calcul de primitives, appelées aussi *méthodes d'intégration*.

Quiz 12.5.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et, pour tout $x \in [a, b]$, $A(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Vrai ou faux ?*

1) □ $\lim_{x\to a^+} A(x) = 0$
2) □ *A est dérivable à droite en $x = a$, et $A'_+(a) = f(a)$.*
3) □ *A est dérivable sur $]a, b[$ et $A'(x) = f(x)$.*
4) □ *$A : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue.*
5) □ *Si il existe g telle que $f(x) = g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $A(x) = g(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.*
6) □ *A est croissante.*
7) □ *Si f est croissante, alors A est croissante.*
8) □ *Si f est décroissante, alors A est décroissante.*
9) □ *Si $f \geqslant 0$, alors A est croissante.*
10) □ *Si f est dérivable sur $]a, b[$ et croissante, alors A est convexe.*
11) □ *Si A possède un maximum local en $x_0 \in]a, b[$, alors $f(x_0) = 0$.*

Quiz 12.5.2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, et $I = \int_a^b f(t)\,dt$. Vrai ou faux ?*

1) ☐ *Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a,b[$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a,b[$, alors $I = F(b) - F(a)$.*
2) ☐ *Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ n'est pas une primitive de f, alors $I \neq F(b) - F(a)$.*
3) ☐ *Il existe $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $I = F(b) - F(a)$.*
4) ☐ *Si F et G sont des primitives de f, alors $F(a) = G(a)$, et $F(b) = G(b)$.*

12.6 Primitives élémentaires

(ici, Video: v_integrale_primitives.mp4)

Le Théorème Fondamental garantit que si une fonction $f(x)$ est continue sur un intervalle, alors elle possède *toujours* au moins une primitive, donnée par la fonction aire calculée entre un point a (quelconque dans I) et x :

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Nous savons aussi que si une fonction possède une primitive F alors elle en possède une infinité, puisque l'on peut toujours ajouter une constante arbitraire à F.

Remarque 12.30. Même si toute fonction continue possède une primitive, cela ne veut pas dire qu'on peut la calculer explicitement. Par exemple, la fonction

$$f(x) = e^{-x^2/2}$$

étant continue, elle possède une primitive. Mais on ne peut pas l'exprimer de façon simple. *Plus précisément, il n'est pas possible d'écrire sa primitive à l'aide d'une combinaison linéaire finie de produits ou compositions de fonctions élémentaires.* . Voir la remarque à 4min50 **ici (3Blue1Brown)** (lien web). ◇

Définition 12.31. Soit f une fonction continue. On appelle **intégrale indéfinie de** f la famille de toutes ses primitives. On la notera :

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad F(x) + C\,,$$

Commençons par lister l'intégrale indéfinie des principales fonctions élémentaires :

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\mathbf{F}(\mathbf{x})$
k (constante)	$kx + C$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$2\sqrt{x} + C$
$\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$\log\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\log(a)} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$-\log\lvert\cos(x)\rvert + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$\arcsin(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + C$
$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x)) + C$

12.6.1 Propriétés de l'intégrale indéfinie

Énonçons quelques-unes des propriétés élémentaires de l'intégrale indéfinie (on suppose partout que les fonctions intégrées sont continûment dérivables).

- ⋆ $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
- ⋆ $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- ⋆ $\displaystyle\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$

⋆ $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log|g(x)| + C$ (en supposant que $g(x) \neq 0$ sur l'intervalle considéré)

Beaucoup de primitives peuvent se calculer très simplement si elles concernent une fonction dans laquelle on peut observer une structure qui permet d'utiliser directement une des relations ci-dessus. Parfois, une petite manipulation peut être nécessaire avant l'intégration.

Exemple 12.32. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int xe^{-x^2/2}\,dx\,.$$

On observe qu'en posant $g(x) = -\frac{x^2}{2}$, on a $g'(x) = -x$. Donc, en insérant $1 = (-1)\cdot(-1)$, on fait apparaître $g'(x)$, et on utilise $\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$

$$\begin{aligned}\int xe^{-x^2/2}\,dx &= -\int (-x)e^{-x^2/2}\,dx\\ &= -\int e^{g(x)}g'(x)\,dx\\ &= -e^{g(x)} + C\\ &= -e^{-x^2/2} + C\end{aligned}$$

Dans la suite, on fera souvent ce genre d'opérations, sans forcément expliciter tous les détails. ◇

Exemple 12.33. À l'aide d'une opération semblable à celle de l'exemple précédent,

$$\int \frac{\log(x)}{x}\,dx = \int \log(x)(\log(x))'\,dx = \frac{1}{2}(\log(x))^2 + C\,.$$

◇

Exemple 12.34. Simplement à l'aide du logarithme,

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \log|1+x| + C\,.$$

Ensuite,

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\int \frac{-1}{1-x}\,dx = -\log|1-x| + C\,.$$

Ceci permet alors de calculer par exemple une primitive de la *fonction rationnelle* (un quotient de polynômes) suivante,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\Big)dx\\ &= \frac{1}{2}\log\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big| + C\end{aligned}$$

(Nous avons fait ci-dessus une *décomposition en éléments simples*, méthode sur laquelle nous reviendrons plus loin.) ◇

Lorsqu'on cherche des primitives impliquant des fonctions trigonométriques, on aura souvent recours à certaines formules trigonométriques.

Exemple 12.35. Considérons

$$\int \sin^2(x)\,dx\,.$$

En se rappelant (voir **ici** (lien vers la section `m_elementaire_trigo`)) la formule

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}\,,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\,dx &= \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx\\ &= \int \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{4}\int \cos(2x)(2x)'\,dx\\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C\,.\end{aligned}$$

◇

Le calcul de primitives plus compliquées, lorsqu'il est possible, requiert l'utilisation de *techniques d'intégration*, que nous verrons dans les sections suivantes.

Informel 12.36. Internet abonde de vidéos dans lesquelles des gens calculent des primitives, pendant des heures... Ces vidéos peuvent être utiles si on cherche des sources de problèmes plus difficiles/faciles. Par exemple **ici** (lien web) (attention : ces vidéos supposent connues les principales techniques d'intégration).

Quiz 12.6.1. *(MAN 2021) Vrai ou faux ?*

$$\int x^x\,dx = \frac{x^{x+1}}{x+1} + C\,.$$

1) □ *VRAI*

2) □ *FAUX*

12.7 Intégration : par parties

(ici, Video: `v_integrale_primitives_parties.mp4`)

Puisque la dérivée d'un produit n'est *pas* le produit des dérivées, il est clair que la primitive d'un produit n'est pas non plus le produit des primitives...

$$\int f(x)g(x)\,dx \neq \Big(\int f(x)\,dx\Big)\Big(\int g(x)\,dx\Big)\,.$$

Pourtant, si f (ou g) est elle-même une dérivée, on peut transformer $\int f(x)g(x)\,dx$ en une autre primitive.

Lemme 28. *(Formule d'intégration par parties) Soient f, g deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle. Alors*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

En version "intégrale définie" :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Preuve: On part de la règle de dérivation

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

Comme les fonctions de part et d'autre du "=" sont continues, on peut intégrer par rapport à x,

$$\underbrace{\int (f(x)g(x))'\,dx}_{=f(x)g(x)+C} = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

□

Informel 12.37. Pour utiliser la formule d'intégration par parties dans l'intégration d'un produit, il faut choisir quelle partie joue le rôle de "$f'(x)$" (la partie que l'on doit savoir intégrer), et quelle partie joue le rôle de "$g(x)$" (la partie que l'on doit dériver). On utilisera le symbole "↑" pour indiquer la partie qui sera intégrée, et "↓" pour celle qui sera dérivée :

$$\int \underbrace{f'(x)}_{\uparrow}\underbrace{g(x)}_{\downarrow}\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Voyons quelques exemples.

Exemple 12.38.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{\uparrow}\underbrace{\log(x)}_{\downarrow}\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x}{2}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4} + C\end{aligned}$$

◇

Parfois, il peut être nécessaire d'utiliser l'intégration par parties plus d'une fois :
Exemple 12.39.

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \underbrace{e^x}_{\uparrow}\underbrace{\sin(x)}_{\downarrow}\,dx\\ &= e^x\sin(x) - \int \underbrace{e^x}_{\uparrow}\underbrace{\cos(x)}_{\downarrow}\,dx\\ &= e^x\sin(x) - \Big\{e^x\cos(x) - \int e^x(-\sin(x))\,dx\Big\}\\ &= e^x\big\{\sin(x)-\cos(x)\big\} - I(x)\,.\end{aligned}$$

Donc

$$I(x) = \frac{e^x}{2}(\sin(x)-\cos(x)) + C\,.$$

◇

L'intégration par parties peut aussi être utile dans les cas où on n'a même pas deux "parties", simplement en écrivant que $1 = (x)'$:

Exemple 12.40.

$$\int \log(x)\,dx = \int \underbrace{1}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\log(x)}_{\downarrow}\,dx = x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx$$
$$= x\log(x) - x + C\,.$$

◇

Quiz 12.7.1. *Vrai ou faux ?*

1) ☐ $\int x\sin(x)\,dx = -\frac{x^2}{2}\cos(x) - \int \cos(x)\,dx$
2) ☐ $\int x\sin(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\sin(x) + \int x\cos(x)\,dx$
3) ☐ $\int x\sin(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\int x^2\cos(x)\,dx$
4) ☐ $\int x\sin(x)\,dx = x\cos(x) - \int \cos(x)\,dx$
5) ☐ $\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$
6) ☐ $\int \arctan(x)\,dx = \tan(x) - \int \tan(x)\,dx$
7) ☐ $\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

12.8 Intégration : changement de variable

Nous allons présenter le changement de variable pour l'intégrale définie. Ensuite, nous nous inspirerons de l'idée pour développer une méthode d'intégration pour l'intégrale indéfinie.

12.8.1 Changement de variable dans une intégrale définie

(ici, Video: v_integrale_chgmtvariable.mp4)

Théorème 12.41. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Soit aussi I un intervalle ouvert, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $[\alpha,\beta] \subset I$ et si*

$$\varphi(t) \in [a,b] \qquad \forall t \in [\alpha,\beta]\,,$$

alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

Preuve: Comme f est continue, on peut considérer une de ses primitives ; notons la F. Définissons $G : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ par

$$G(t) := F(\varphi(t))\,.$$

Alors G est continue sur $[\alpha,\beta]$, dérivable sur $]\alpha,\beta[$, et $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. On a donc, en utilisant deux fois le Théorème Fondamental,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta G'(t)\,dt\\ &= G(\beta)-G(\alpha)\\ &= F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))\\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Remarquons que ce calcul *utilise* l'existence de la primitive F, mais uniquement comme une étape de calcul. □

Ce résultat sera utilisé le plus souvent dans le cas où

$$\varphi(\alpha)=a<\varphi(\beta)=b\,,$$

et dans ce cas la formule du changement de variable devient

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Exemple 12.42. Calculons

$$I=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

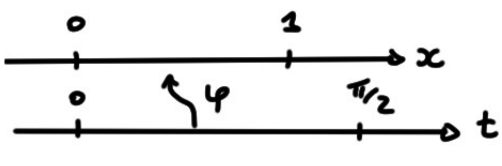
Géométriquement, cette intégrale représente l'aire d'un quart de disque de rayon 1 centré à l'origine. Donc on sait qu'elle doit valoir $\frac{\pi}{4}$; voyons comment l'obtenir par le calcul.

Idéalement, on aimerait un changement de variable qui fasse disparaître la racine.

1) On peut le faire à l'aide du changement de variable

$$x=\varphi(t):=\sin(t)\,,\qquad t\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$$

qui satisfait les hypothèses du théorème puisque $\varphi(t)\in[0,1]$ pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.



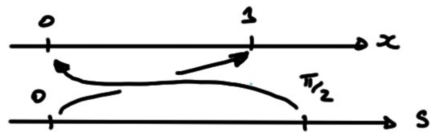
Comme φ est aussi croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, et $\varphi(0)=0$, $\varphi(\frac{\pi}{2})=1$, la formule du changement de variable donne

$$\begin{aligned}I=\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})}\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,dt\\ &= \left\{\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right\}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{\pi}{4}\end{aligned}$$

2) On aurait aussi pu poser

$$x = \varphi(t) := \cos(t)\,, \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]\,,$$

qui satisfait également $\varphi(t) \in [0,1]$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ici, φ est décroissante :



Mais comme $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$, la formule devient

$$\begin{aligned} I = \int_{\varphi(\frac{\pi}{2})}^{\varphi(0)} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} |\sin(t)|(-\sin(t))\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,dt = \tfrac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

◇

12.8.2 Changement de variable dans une intégrale indéfinie

Attention : La vidéo ci-dessous s'écarte sensiblement du texte.

(ici, Video: v_integrale_primitives_chgmtvariable.mp4)

Décrivons une méthode d'intégration, inspirée de la formule du changement de variable vue plus haut. Mentionnons avant de commencer que cette méthode permet de calculer efficacement de nombreuses primitives, même si la présentation qui suit n'est pas tout à fait rigoureuse.

Soit f une fonction continue, dont on cherche une primitive F. Introduisons une autre variable t en posant

$$x = \varphi(t)\,,$$

où φ est une fonction de classe C^1. La primitive cherchée peut donc s'exprimer en fonction de la nouvelle variable :

$$F(x) = F(\varphi(t)) =: G(t)$$

Or $G(t)$ est primitive de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, puisque

$$G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,.$$

Pour connaître $F(x)$, on pourrait donc

1) Calculer $G(t)$, c'est-à-dire

$$G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

2) Si φ est inversible, obtenir F par

$$F(x) = G(t) = G(\varphi^{-1}(x))\,.$$

On écrit la relation $F(x) = G(t)$, parfois, par abus de notation,

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Exemple 12.43. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \sin(2x)\,dx\,.$$

On aimerait que $2x = t$ donc on pose $x := \varphi(t) = \frac{t}{2}$. On commence par calculer

$$G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int \sin(t)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(t) + C$$

puis on inverse :

$$F(x) = G(\varphi^{-1}(x)) = G(2x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C\,.$$

◇

Exemple 12.44. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx\,.$$

Posons $x + 1 = t$, c'est-à-dire $x = \varphi(t) := t - 1$. On commence donc par calculer

$$\begin{aligned} G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \int \frac{t-1}{t}\,dt \\ &= \int \{1 - \tfrac{1}{t}\}\,dt \\ &= t - \log|t| + C\,, \end{aligned}$$

puis on inverse pour obtenir

$$F(x) = G(\varphi^{-1}(x)) = (x+1) - \log|x+1| + C\,.$$

Si on écrit les choses de façon plus compacte :

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{t-1}{t}\,dt &= \int \Big(1 - \frac{1}{t}\Big)\,dt \\ &= t - \log|t| + C \\ &= (x+1) - \log|x+1| + C \end{aligned}$$

◇

Sur la fin de ce dernier exemple, on voit que l'on peut aisément se passer de la mention explicite des fonctions φ, G et F ; ce qu'on fera dans le prochain exemple.

Exemple 12.45. Considérons la primitive (en supposant bien sûr que $x > 0$)

$$\int \frac{dx}{x + x\log(x)^2}\,.$$

On se souvient que $(\log(x))' = \frac{1}{x}$, on peut donc poser $t = \log(x)$, qui donne

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + x\log(x)^2} &= \int \frac{1}{1+\log(x)^2}\frac{dx}{x} \\ &= \int \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \arctan(t) + C \\ &= \arctan(\log(x)) + C\,. \end{aligned}$$

◇

12.8.3 Changements de variables de types trigonométrique ou hyperbolique

Dans cette section, on considère des changements de variable dont le but est d'intégrer des fonctions contenant des termes d'un des trois types suivants :

$$\sqrt{a^2-b^2x^2}\,,\quad \sqrt{a^2+b^2x^2}\,,\quad \sqrt{a^2x^2-b^2}\,.$$

(ici, Video: v_integrale_primitives_chmtvariable_trigo_hyper.mp4)

Informel 12.46. Puisque toutes les primitives considérées ici sont du type

$$\int \sqrt{f(x)}\,dx$$

l'idée sera de transformer ce qui est dans la racine en un **carré parfait**, de façon à faire disparaître cette racine :

$$\int \sqrt{f(x)}\,dx = \int \sqrt{g(x)^2}\,dx = \int |g(x)|\,dx\,.$$

Exemple 12.47. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Remarquons qu'ici, la fonction intégrée est définie pour $x \in [-1,1]$. Comme dans le cas du changement de variable pour l'intégrale définie, on aimerait ne plus avoir de racine, et donc pouvoir écrire "$1-x^2$" comme un carré. Une identité qui réalise ce qu'on veut est la suivante :

$$\boxed{1-(\cos(t))^2 = (\sin(t))^2\,.}$$

On peut donc essayer de poser

$$x = \varphi(t) := \cos(t)\,,\qquad \text{avec } t \in [0,\pi]\,.$$

Alors $\varphi : [0,\pi] \to [-1,1]$ est continûment dérivable sur $]0,\pi[$, inversible, avec $\varphi^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$ donnée par $\varphi^{-1}(x) = \arccos(x)$. On a donc

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt \\ &= -\int \sin^2(t)\,dt \\ &= -\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) + C\,, \end{aligned}$$

et en utilisant $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$,

$$\begin{aligned} F(x) &= G(\varphi^{-1}(x)) \\ &= -\frac{1}{2}\arccos(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arccos(x)) + C \\ &= -\frac{1}{2}\arccos(x) + \frac{1}{4}2\sin(\arccos(x))\underbrace{\cos(\arccos(x))}_{=x} + C \\ &= -\frac{1}{2}\arccos(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C\,. \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a utilisé le fait que $\sin(z) \geqslant 0$ si $z \in [0, \pi]$, et donc

$$\begin{aligned}\sin(\arccos(x)) &= \sqrt{\sin(\arccos(x))^2} \\ &= \sqrt{1-\cos(\arccos(x))^2} \\ &= \sqrt{1-x^2}\,.\end{aligned}$$

Si on avait posé $x = \sin(t)$? Les calculs changent un tout petit peu, mais le cheminement est exactement le même. Détails **ici** (lien web). ⋄

Ce qu'il faut garder du dernier exemple :

Informel 12.48. À retenir : si la fonction à intégrer contient un terme de la forme

$$\sqrt{a^2-b^2x^2}\,,$$

on pourra essayer un changement de variable du type

$$x = \frac{a}{b}\cos(t) \qquad (\text{ou } x = \frac{a}{b}\sin(t))\,.$$

Exemple 12.49. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Encore une fois, $x \in [-1, 1]$. Si on pose

$$x = \varphi(t) := \cos(t)\,, \qquad \text{avec } t \in [0, \pi],$$

on obtient

$$\begin{aligned}G(t) &= \int \varphi(t)^3\sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt \\ &= -\int \cos^3(t)\sin^2(t)\,dt \\ &= -\int \sin^2(t)(1-\sin^2(t))\cos(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

La présence du $\cos(t)$, qui est la dérivée du $\sin(t)$, suggère de faire un deuxième changement de variable, en posant

$$\sin(t) = u\,,$$

qui réduit le problème à l'intégration d'un polynôme en u :

$$\begin{aligned}\int \sin^2(t)(1-\sin^2(t))\cos(t)\,dt &= \int u^2(1-u^2)\,du \\ &= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C \\ &= \frac{(\sin(t))^3}{3} - \frac{(\sin(t))^5}{5} + C\,.\end{aligned}$$

Comme $\sin(t) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$,

$$F(x) = G(\arccos(x)) = -\frac{\sqrt{1-x^2}^3}{3} + \frac{\sqrt{1-x^2}^5}{5} + C\,.$$

⋄

Remarque 12.50. Dans ce dernier exemple, on voit comme l'allure de la fonction intégrée suggère d'elle-même un bon changement de variable.

Bien-sûr, on aurait évité de faire deux changements de variables si on avait tout de suite posé

$$x = \cos(\arcsin(u)) = \sqrt{1-u^2}\,.$$

Mais ce choix ne semble pas forcément le plus naturel à première vue... ◇

Exemple 12.51. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx\,.$$

Ici, on peut s'inspirer de la relation

$$\boxed{1 + (\sinh(t))^2 = (\cosh(t))^2\,,}$$

poser

$$x := \sinh(t)\,,$$

et obtenir

$$\boxed{\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{argsinh}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C}$$

Voir la vidéo ci-dessus pour les détails. (Il existe d'autres façons de traiter cette primitive : **Michael Penn** (lien web) ou **blackpenredpen** (lien web)). ◇

Informel 12.52. À retenir : si la fonction à intégrer contient un terme de la forme

$$\sqrt{a^2 + b^2x^2}\,,$$

on pourra essayer le changement de variable

$$x = \frac{a}{b}\sinh(t)\,.$$

Exemple 12.53. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx \qquad |x| \geqslant 1\,.$$

Si on utilise à nouveau la relation

$$\boxed{(\cosh(t))^2 - 1 = (\sinh(t))^2\,,}$$

on est mené à poser

$$x := \cosh(t)\,.$$

On trouve :

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\,\mathrm{argcosh}(x) + C & \textbf{si } x \geqslant +1\,, \\ \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\,\mathrm{argcosh}(x) + C & \textbf{si } x \leqslant -1\,. \end{cases}}$$

(Voir vidéo) ◇

Informel 12.54. À retenir : si la fonction à intégrer contient un terme de la forme

$$\sqrt{b^2x^2 - a^2}\,,$$

on pourra essayer le changement de variable

$$x = \frac{a}{b}\cosh(t)\,.$$

12.9 Intégration : fonctions rationnelles

(ici, Video: v_integrale_primitives_rationnelles.mp4)

Dans cette section nous étudierons des primitives de la forme

$$\int \frac{P(x)}{M(x)}\, dx\,,$$

où P et M sont des polynômes. Bien qu'il existe une théorie générale, comportant une composante algébrique qui n'a pas sa place dans ce cours, nous présenterons plutôt les idées principales, et verrons comment les implémenter sur les exemples les plus importants.

Informel 12.55. Comme on le verra, on pourra très souvent "casser" le quotient $\frac{P(x)}{M(x)}$ en une somme de plusieurs morceaux, dans le but de toujours se ramener à une des intégrales simples suivantes :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\, dx &= \log|x| + C\\ \int \frac{1}{x^n}\, dx &= \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C \qquad (n \neq 1)\\ \int \frac{1}{1+x^2}\, dx &= \arctan(x) + C\,,\\ \int \frac{x}{1+x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C\,.\end{aligned}$$

12.9.1 Structure générale

Considérons un quotient $\frac{P(x)}{M(x)}$, où $P(x)$ est de degré p et $M(x)$ est de degré m :

$$\deg(P) = p\,, \qquad \deg(M) = m\,.$$

Ceci signifie que

$$\begin{aligned}P(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p\,,\\ M(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m\,,\end{aligned}$$

où $a_p \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

Il est naturel de distinguer deux cas :

12.9.2 Le cas $p \geqslant m$

Lorsque $p \geqslant m$, on peut tout de suite faire la division polynomiale de $P(x)$ par $M(x)$. On obtient alors quelque chose comme

$$\frac{P(x)}{M(x)} = \underbrace{a(x)}_{\text{OK}} + \frac{r(x)}{M(x)}\,,$$

où $a(x)$ est un polynôme (donc facile à intégrer), et $r(x)$ est aussi un polynôme, appelé le **reste** de la division, qui ne se laisse pas diviser par $M(x)$ puisque son degré $\deg(r) < \deg(M)$.

Exemple 12.56. Considérons

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\,.$$

Ici, $\deg(P) = 3 > 2 = \deg(M)$, donc on peut faire la division polynomiale de $P(x)$ par $M(x)$, puis intégrer le résultat :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx &= \int \Big\{\underbrace{x}_{a(x)} + \underbrace{\frac{-x}{x^2+1}}_{\frac{r(x)}{M(x)}}\Big\}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(Dans la dernière ligne, on a utilisé $u = x^2+1$.) ◇

En général, la partie “difficile” est bien sûr dans l'intégration du deuxième terme $\frac{r(x)}{M(x)}$, c'est pourquoi on passera plus de temps sur le cas où le degré du numérateur est plus petit que celui du dénominateur.

12.9.3 Le cas $p < m$

Dans ce deuxième cas, plus difficile, nous devrons regarder de plus près le le polynôme $M(x)$.

Avant de passer à l'approche utilisée dans le cas général, considérons les cas très importants des valeurs petites de m. Plus précisément, les cas $m \leqslant 2$, que l'on sait déjà traiter par les méthodes élémentaires vues précédemment.

$\underline{m=1}$: Le cas le plus simples est celui où $m = 1$, qui force $p = 0$. On est donc dans le cas où P est une constante, $P(x) = K$, et M est un polynôme de degré 1. Ceci ne pose aucun problème du point de vue de l'intégration :

$$\int \frac{K}{ax+b}\,dx = \frac{K}{a}\log|ax+b| + C\,.$$

$\underline{m=2}$: Si $m = 2$, M est un polynôme de degré 2 :

$$M(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2\,,$$

où $b_2 \neq 0$. Dans ce cas, le procédé d'intégration dépendra alors du signe du discriminant,

$$\Delta = b_1^2 - 4b_0b_2\,,$$

ainsi que du polynôme P, qui peut être soit une constante (si $p = 0$), soit un polynôme de degré 1 (si $p = 1$).

Commençons par le cas où $\Delta \leqslant 0$, en considérant des exemples :

Exemple 12.57. ($\Delta < 0$, $p = 0$)

$$\int \frac{K}{\underbrace{x^2+2}_{\Delta<0!}}\,dx = \frac{K}{2}\int \frac{dx}{(x/\sqrt{2})^2+1} = \frac{K}{\sqrt{2}}\arctan(x/\sqrt{2}) + C$$

(Dans la dernière ligne : $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$.) ◇

Exemple 12.58. ($\Delta < 0$, $p = 0$) Lorsque $\Delta < 0$ et que $M(x)$ contient un terme en x, on pourra *compléter le carré* pour se ramener au cas traité dans l'exemple précédent :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\underbrace{x^2+2x+3}_{\Delta<0!}} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2+2}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}})+C\end{aligned}$$

(Dans la dernière ligne : $u = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$.) ◇

Exemple 12.59. ($\Delta < 0, p = 1$) Si $P(x) = \alpha x + \beta$, on peut simplement séparer le quotient en deux parties, que l'on intègre individuellement :

$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha x+\beta}{\underbrace{x^2+1}_{\Delta<0!}}\,dx &= \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \beta\int \frac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{\alpha}{2}\log(x^2+1)+\beta\arctan(x)+C\,.\end{aligned}$$

(Dans la dernière ligne : $u = x^2 + 1$.) ◇

Exemple 12.60. ($\Delta = 0$)

$$\int \frac{1}{\underbrace{x^2-4x+4}_{\Delta=0}}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \frac{-1}{x-2}+C\,.$$

◇

Tournons-nous maintenant vers le cas $\Delta > 0$; dans ce cas, la grande différence est bien sûr que $M(x)$ possède deux racines, et peut se *factoriser*. C'est alors qu'on peut *décomposer* le quotient $\frac{P(x)}{M(x)}$ en une somme de quotients plus simples; on appelle cette procédure *la décomposition en éléments simples*.

12.9.4 Décomposition en éléments simples : exemples

Commençons par un exemple élémentaire, toujours dans le cas $m = 2$. Comme il contient les idées principales que nous utiliserons par la suite, nous le traiterons assez en longueur...

Exemple 12.61. ($\Delta > 0, p = 0$) Considérons

$$\int \frac{dx}{\underbrace{1-x^2}_{\Delta>0!}}$$

Comme les racines de $M(x)$ sont $+1$ et -1, sa factorisation permet d'écrire

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,.$$

L'idée de la décomposition en éléments simples est d'essayer de trouver des constantes A et B telles que

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x} \qquad \forall x \notin \{\pm 1\}\,.$$

Attention : les constantes doivent être telles que cette dernière égalité soit vraie *pour tout x différent de* 1 *et* -1. Voyons comment rendre cette restriction plus explicite.

Si on met au même dénominateur du côté droit,

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A(1+x)+B(1-x)}{(1-x)(1+x)} \qquad \forall x \notin \{\pm 1\}\,,$$

et comme les dénominateurs sont les mêmes, il reste

$$1 = A(1+x)+B(1-x) \qquad \forall x \notin \{\pm 1\}\,,$$

qui est équivalent à

$$(A-B)x + (A+B-1) = 0 \qquad \forall x \notin \{\pm 1\}\,.$$

Mais encore, en définissant temporairement le polynôme

$$Q(x) := (A-B)x + (A+B-1)\,,$$

on peut récrire notre condition comme

$$Q(x) = 0 \qquad \forall x \notin \{\pm 1\}\,.$$

Puisque $Q(x)$ est continu, cette condition est équivalente à

$$Q(x) = 0 \qquad \forall x\,.$$

$Q(x)$ représente l'équation d'une droite. Donc si cette droite est nulle partout, il faut bien que sa pente et son ordonnée à l'origine soient toutes les deux nulles. Ainsi, les constantes A et B doivent nécessairement satisfaire simultanément aux conditions $A-B=0$, $A+B-1=0$, que l'on peut écrire sous forme d'un système en A et B :

$$\begin{cases} A-B &= 0 \\ A+B &= 1\,. \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution, donnée par $A = B = \frac{1}{2}$. On a donc montré que

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x} \quad \forall x \notin \{\pm 1\}\,,$$

qui est ce qu'on appelle une **décomposition en éléments simples**.

Du point de vue de l'intégration, le problème devient alors très simple :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\log|1-x| + \frac{1}{2}\log|1+x| + C \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \end{aligned}$$

◇

12.9.5 Lorsque $\deg(M) > 2$

Lorsque le degré de M est supérieur à 2, on commencera par le factoriser autant que possible. Grâce au résultat suivant, démontré dans le chapitre sur les nombres complexes, cette factorisation contiendra toujours des morceaux de degré 2 au plus.

Corollaire 9. *(Factorisation de polynômes à coefficients réels) Tout polynôme réel peut se factoriser en un produit de polynômes de degré 1 ou 2, à coefficients réels eux aussi.*

Une fois la factorisation de M connue, on devra sélectionner un bon choix de décomposition en éléments simples, puis identifier les coefficients d'un polynôme qui doit s'annuler en tout $x \in \mathbb{R}$. On aura souvent recours au théorème suivant :

Théorème 12.62. *Si un polynôme*

$$Q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n$$

s'annule en tout $x \in \mathbb{R}$, c'est que ses coefficients sont tous nuls :

$$q_0 = q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0\,.$$

Preuve: Clairement, si Q s'annule partout il s'annule en particulier en $x = 0$, ce qui implique $q_0 = 0$. Mais aussi, si Q s'annulle partout alors sa dérivée s'annulle partout. Puisque cette dérivée

$$Q'(x) = q_1 + 2q_2 x + \cdots + nq_n x^{n-1}$$

s'annulle partout, elle s'annule en particulier en $x = 0$, ce qui donne $q_1 = 0$. Par récurrence, on démontre donc que tous les coefficients sont nuls :

$$q_0 = q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0\,.$$

□

Voyons des exemples.

Exemple 12.63. Considérons

$$\int \frac{1}{x^3 + x}\,dx$$

La factorisation de $M(x)$ est donnée par

$$M(x) = x(x^2 + 1)\,.$$

Ici, une bonne décomposition est

$$\boxed{\frac{1}{x\underbrace{(x^2+1)}_{\Delta<0}} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \qquad x \neq 0}$$

En mettant au même dénominateur et en égalant les numérateurs, on arrive à

$$Q(x) := (A + B)x^2 + Cx + (A - 1) = 0 \qquad \forall x \neq 0$$

Par le théorème, tous les coefficients doivent être nuls, ce qui donne le système

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ C &= 0 \\ A &= 1\,. \end{cases}$$

On trouve donc $A=1$, $B=-1$, $C=0$, ce qui permet d'intégrer :

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x(x^2+1)}&=\int\Big\{\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}\Big\}\,dx\\&=\log|x|-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C\end{aligned}$$

$\diamond$

Exemple 12.64. Considérons

$$\int\frac{1}{x^3+2x^2+x}\,dx$$

Factorisons le dénominateur :

$$\frac{1}{x^3+2x^2+x}=\frac{1}{x(x^2+2x+1)}=\frac{1}{x(x+1)^2}$$

Puisqu'ici la factorisation de M contient une *puissance* "2", dans le terme $(x+1)^2$, la bonne décomposition inclut des répétitions :

$$\boxed{\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}\qquad\forall x\notin\{0,-1\}}$$

On trouve $A=1$, $B_1=-1$, $B_2=-1$, et donc

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^3+2x^2+x}&=\int\Big\{\frac{1}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{-1}{(x+1)^2}\Big\}\,dx\\&=\log|x|-\log|x+1|+\frac{1}{x+1}+C\end{aligned}$$

$\diamond$

Remarque 12.65. Si il y a quelque chose au numérateur, on le laisse (tant que son degré est inférieur à ce qu'il y a au dénominateur), et il participe juste au polynôme dont on égale tous les coefficients à zéro ! Par exmple :

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2}=\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{Cx+D}{(1+x^2)^2}$$

$\diamond$

Dans la pratique, on peut tomber sur une décomposition en éléments simple dans des situations qui n'ont apparemment rien à voir avec des quotients de polynômes, typiquement après un changement de variable :

Exemple 12.66. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int\sqrt{\tan(x)}\,dx\,.$$

En posant $u=\sqrt{\tan(x)}$, qui donne $dx=\frac{2u}{u^4+1}\,du$, on est amené à

$$2\int\frac{u^2}{u^4+1}\,du\,.$$

On peut alors factoriser u^4+1 (voir la section sur la factorisation des polynômes, dans le chapitre sur les nombres complexes), puis effectuer une décomposition en éléments simples. (Pour les détails, voir **ici** (lien web), ou alors une autre façon de faire **ici** (lien web)). $\diamond$

Si on veut d'autres exemples de comment utiliser (ou comment de *pas* utiliser) des décomposition en éléments simples, cliquer **ici (blackpenredpen)** (lien web).

Quiz 12.9.1. *(MAN 2021) Parmi les décompositions en éléments simples ci-dessous, lesquelles sont correctes (c'est-à-dire que l'on peut trouver des constantes* $A, B, C, \ldots$ *telles que la relation soit vraie pour tout* x*)?*

1) ☐ $\dfrac{1}{x^2+3x+5} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x+5}$

2) ☐ $\dfrac{1}{x^3} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3}$

3) ☐ $\dfrac{1}{x^3(x^2+1)} = \dfrac{A}{x^3} + \dfrac{B}{x^2+1}$

4) ☐ $\dfrac{1}{x^3(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D}{x+1}$

5) ☐ $\dfrac{x^6+x+2}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

Chapitre 13

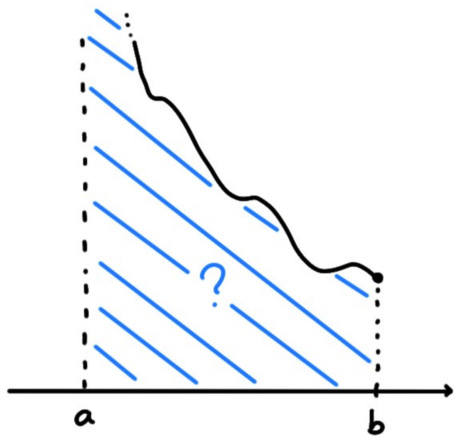
Intégrales généralisées

13.1 Introduction

Rappelons que l'intégrale a été définie pour des fonctions *bornées*, définies sur un intervalle $[a,b]$, fermé et borné. Dans ce cadre, la *continuité* s'est avérée une condition suffisante pour garantir l'intégrabilité.

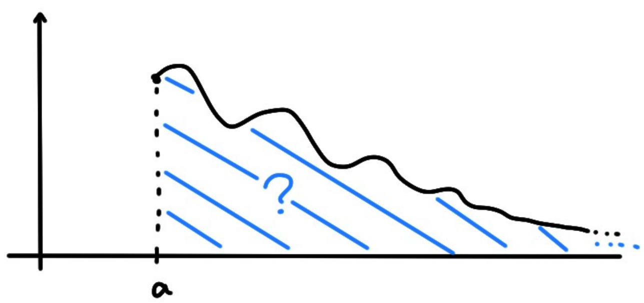
Dans cette section, nous allons étendre l'intégration à des fonctions définies sur des intervalles où elle n'est plus forcément bornée, par exemple sur un intervalle $]a,b]$, possédant une asymptote verticale,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty\,,$$



ou alors sur des intervalles non-bornés, du type $[a,+\infty[$, tendant vers zéro,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,.$$



Des intégrales de ce type sont *généralisées*, puisqu'elles n'entrent pas dans le cadre de l'intégrale de Riemann/Darboux présentée jusqu'ici.

Informel 13.1. Une autre appelation, pour les intégrales généralisées, est celle d'*intégrales impropres*.

13.2 Type I

En guise d'introduction, considérons le problème suivant : comment intégrer une fonction continue, mais définie sur un intervalle qui n'est *pas* fermé, par exemple de la forme $]a,b]$?

Supposons donc que $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ est continue en tout point $x_0 \in]a,b[$, et que f est continue à gauche en b. Lorsque f possède une limite à droite en a, on peut la prolonger par continuité, et ensuite définir son intégrale au sens classique d'une fonction continue sur $[a,b]$.

Exemple 13.2. Considérons $f(x) = x\log(x)$ sur $]0,1]$, qui est bien continue. Puisque

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,,$$

On peut définir

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} x\log(x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1\,,\\ 0 & \text{si } x = 0\,,\end{cases}$$

et définir l'intégrale de f sur $]0,1]$ comme l'intégrale de $\widetilde{f}$ sur $[0,1]$. Puisque $\widetilde{f}$ est continue, cette intégrale est bien définie. Puisque

$$\int x\log(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4} + C$$

on peut considérer

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4} & \text{si } 0 < x \leqslant 1\,,\\ 0 & \text{si } x = 0\,,\end{cases}$$

qui est une primitive de $\widetilde{f}$ continue sur $[0,1]$. Ainsi, par le Théorème Fondamental,

$$\int_0^1 \widetilde{f}(x)\,dx = \widetilde{F}(1) - \widetilde{F}(0) = -\frac{1}{4}\,.$$

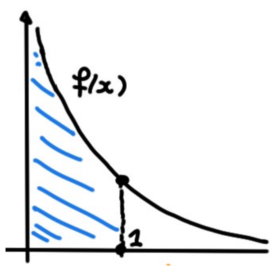
◇

Lorsque f n'a pas de limite lorsque $x \to a^+$, f ne peut pas être prolongée par continuité.

Exemple 13.3. Considérons $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,,$$

et essayons de calculer l'aire sous son graphe :



Le problème avec cette fonction est qu'elle n'est pas bornée, puisque

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,.$$

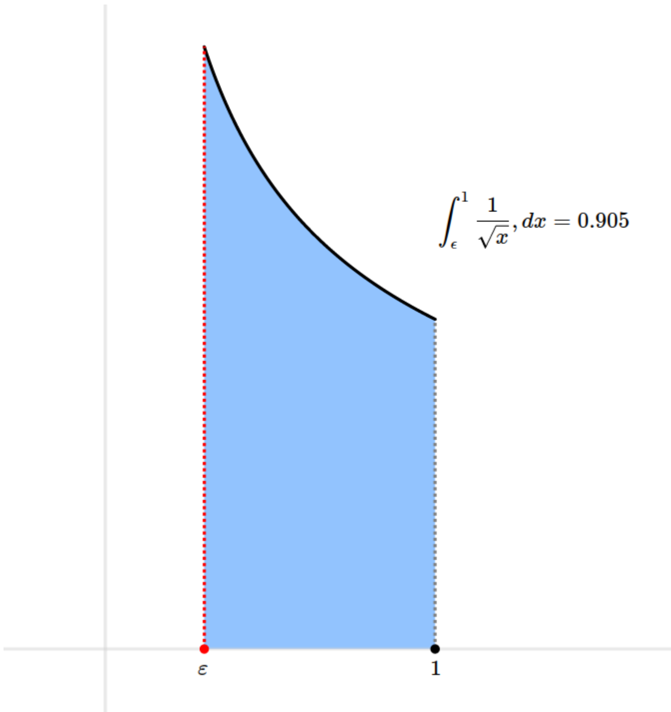
Par conséquent, il n'est même pas clair que l'aire sous son graphe soit bien définie. On ne peut pas mettre en place la méthode classique d'intégration au sens de Riemann/Darboux : la somme de Darboux supérieure a son premier rectangle qui est *toujours* de hauteur infinie ! Donc cette fonction ne peut pas s'intégrer de manière naïve, en sommant simplement des aires de rectangles, et on ne peut pas donner le sens classique au symbole "$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$".

L'idée, pour intégrer cette fonction, va être de traiter le problème en $x = 0$ en utilisant un processus de limite.

En effet, si on fixe un nombre quelconque $0 < \varepsilon < 1$, petit, on peut restreindre f à l'intervalle $[\varepsilon, 1]$. Comme $f : [\varepsilon, 1] \to \mathbb{R}$ est continue (et par conséquent bornée), on peut l'intégrer de façon standard, et même utiliser le théorème fondamental :

$$\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2(1-\sqrt{\varepsilon})\,.$$

Cette intégrale dépend de ε, mais elle se comporte bien lorsque ε s'approche de zéro (par la droite).



On peut en fait prendre la limite $\varepsilon \to 0^+$, pour donner un sens à l'intégrale de f sur $]0, 1]$, au sens d'une *limite* :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,.$$

◇

Informel 13.4. Ça peut paraître contre-intuitif : la région délimitée par le graphe de la fonction de ce dernier exemple n'est pas "limitée" : elle s'étend infiniment loin le long de l'axe des $y > 0$. Pourtant, *son aire est finie* : on pourrait la recouvrir entièrement à l'aide d'une quantité finie de peinture ! Ceci est dû au fait que lorsque $x \to 0^+$, $f(x)$ tend vers l'infini mais "pas trop vite".

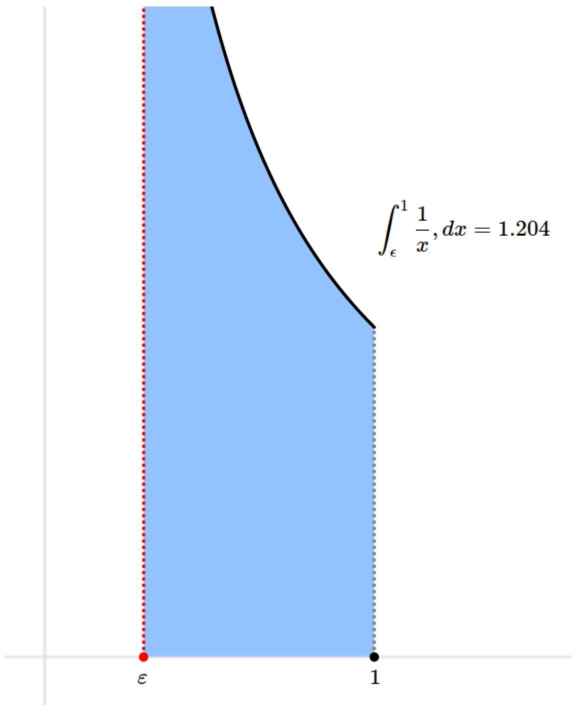
Ce phénomène est semblable à celui rencontré dans l'étude des séries convergentes, où il est possible de sommer une infinité de nombres strictement positifs, et obtenir une somme totale finie.

L'idée utilisée dans ce dernier exemple peut se généraliser :

Définition 13.5. 1) Soit $f\colon\ ]a,b] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $a < \alpha < b$, f soit continue sur $[\alpha, b]$. Si la limite
$$\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx := \lim_{\alpha\to a^+} \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$
existe et est finie, on l'appelle **l'intégrale généralisée de type I**, et on dit qu'elle **converge**. Si la limite est $\pm\infty$, ou si elle n'existe pas, on dit que **l'intégrale généralisée diverge**.

2) Soit $f\colon [a,b[\ \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $a < \beta < b$, f soit continue sur $[a, \beta]$. Si la limite
$$\int_{a}^{b^-} f(x)\,dx := \lim_{\beta\to b^-} \int_{a}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$
existe et est finie, on l'appelle **l'intégrale généralisée de type I**, et on dit qu'elle **converge**. Si la limite est $\pm\infty$, ou si elle n'existe pas, on dit que **l'intégrale généralisée diverge**.

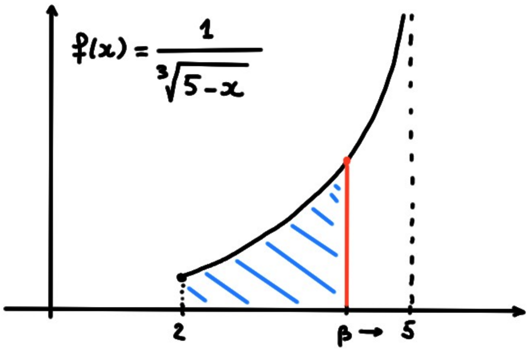
Exemple 13.6. Considérons l'intégrale généralisée de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, 1]$:
$$\begin{aligned}\int_{0^+}^{1} \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \log(x)\Big|_{\varepsilon}^{1} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} (-\log(\varepsilon)) \\ &= +\infty\,,\end{aligned}$$
donc l'intégrale diverge. ◇



Informel 13.7. Dans ce dernier exemple, $f(x) = \frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to 0^+$, "trop vite" pour que son intégrale généralisée soit finie.

Exemple 13.8. L'intégrale généralisée de $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{5-x}}$ sur $[2, 5[$ converge, car

$$\begin{aligned}\int_2^{5^-} \frac{1}{\sqrt[3]{5-x}} &= \lim_{\beta\to 5^-} \int_2^{\beta} \frac{1}{\sqrt[3]{5-x}} \\ &= \lim_{\beta\to 5^-} -\frac{3}{2}(5-x)^{2/3}\Big|_2^{\beta} \\ &= \lim_{\beta\to 5^-} \frac{3}{2}\Big\{3^{2/3} - (5-\beta)^{2/3}\Big\} \\ &= \frac{3^{5/3}}{2}\,.\end{aligned}$$



Remarquons que $\lim_{x\to 5^-} f(x) = +\infty$. ◇

13.2.1 Un critère de comparaison

Dans beaucoup de situations pratiques, on doit déterminer si une intégrale généralisée de type I converge ou diverge, sans se préoccuper de connaître sa valeur (au cas où elle converge). Pour ça, on aimerait éviter de passer par la connaissance de la primitive de f, en utilisant une *comparaison*. On peut le faire si la fonction est de signe constant :

Proposition 15. *Soient $f, g\colon\ ]a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur tout intervalle $[\alpha, b]$, $a < \alpha < b$, et telles que*

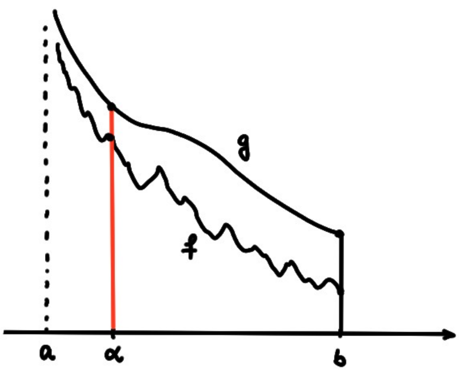
$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \qquad \forall x \in\ ]a, b]\ .$$

Alors :

1) *Si $\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx$ converge, alors $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ converge aussi.*

2) *Si $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx = +\infty$ (diverge), alors $\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx = +\infty$ (diverge aussi).*

Preuve:



Si on fixe $a < \alpha < b$, alors par la propriété de l'intégrale classique,

$$\int_\alpha^b f(x)\, dx \leqslant \int_\alpha^b g(x)\, dx\,.$$

Remarquons que les deux côtés de cette inégalité sont des fonctions positives, monotones décroissantes en α. Puisque $\int_\alpha^b g(x)\, dx$ est majorée par sa limite lorsque $\alpha \to a^+$, qui est finie et vaut $\int_{a^+}^b g(x)\, dx$, ceci implique aussi que

$$\int_\alpha^b f(x)\, dx \leqslant \int_{a^+}^b g(x)\, dx\,.$$

On obtient la première affirmation en prenant la limite $\alpha \to a^+$ dans cette inégalité.

La deuxième se démontre de la même façon, en prenant d'abord la limite $\alpha \to a^+$ dans $\int_\alpha^b f(x)\, dx$. □

Remarque 13.9. Remarquons que ce résultat est l'analogue continu direct du critère de comparaison pour les séries. ◇

Exemple 13.10. Étudions la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_{1^+}^2 \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\, dx\,.$$

Le calcul de la primitive de $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$ étant hardu, on cherche plutôt à faire une comparaison avec l'intégrale d'une autre fonction, plus simple.

En effet, pour tout $x \in]1,2]$, on peut factoriser x^3-1,

$$0 \leqslant f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(\underbrace{x^2+x}_{\geqslant 0}+1)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}} = g(x)\,.$$

Mais maintenant,

$$\int_{1^+}^2 g(x)\, dx = \lim_{\alpha \to 1^+} \int_\alpha^2 g(x)\, dx = \lim_{\alpha \to 1^+} 2\sqrt{x-1}\Big|_\alpha^2 = 2 \quad \text{(converge)}\,.$$

Donc l'intégrale de f converge aussi.

On a donc montré que $\int_{1^+}^2 \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\, dx$ converge, sans avoir eu besoin de calculer une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$. ◇

13.2.2 Intégrales du type $\int_{0^+}^b \frac{dx}{x^q}$

On a vu dans les exemples que si

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty\,,$$

alors la convergence/divergence de intégrale généralisée $\int_{0^+}^b f(x)\, dx$ va dépendre de la "vitesse" à laquelle $f(x)$ tend vers l'infini à l'approche de 0^+. Dans le cas des fonctions du type $f(x) = \frac{1}{x^q}$, on peut distinguer exactement les cas en fonction de la valeur de l'exposant q :

Théorème 13.11. *Pour tout $b > 0$,*

$$\int_{0^+}^b \frac{dx}{x^q} = \begin{cases} \frac{b^{1-q}}{1-q} \text{ (converge)} & \text{si } q < 1\,, \\ +\infty \text{ (diverge)} & \text{si } q \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Preuve: On a déjà vu le cas $q = 1$ dans un exemple, donc on considère $q \neq 1$. Fixons $0 < \alpha < b$. Par un calcul explicite de la primitive,

$$\int_{\alpha}^{b} \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{1-q}\Big\{\frac{1}{b^{q-1}} - \frac{1}{\alpha^{q-1}}\Big\}$$

Puis il suffit de remarquer que

- ⋆ si $q > 1$, alors $\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\alpha^{q-1}} = +\infty$, et
- ⋆ si $q < 1$, alors $1 - q > 0$, et donc $\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\alpha^{q-1}} = \lim_{\alpha\to 0^+} \alpha^{1-q} = 0$,

ce qui conclut la preuve. □

Exemple 13.12. Considérons

$$\int_{0^+}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x^2\cos(x)}\,dx\,,$$

qui est généralisée puisque $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2\cos(x)} = +\infty$. Comme $0 < \cos(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{4}]$, on peut utiliser la comparaison

$$\int_{0^+}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x^2\cos(x)}\,dx \geqslant \int_{0^+}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty\,,$$

puisque dans cette dernière, $q = 2 > 1$. ◇

13.2.3 Un critère via une limite de quotient

Une conséquence de la proposition énoncée plus haut :

Proposition 16. *Soient $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}_+$, continues, telles que*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0\,.$$

Alors $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ converge si et seulement si $\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx$ converge.

(Il existe bien sûr une affirmation analogue pour $\int_{a}^{b^-} f(x)\,dx$.)

Preuve: Par l'existence et positivité de la limite, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\frac{L}{2} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{3L}{2}\,, \qquad \forall x \in]a, a+\delta[\,.$$

On a donc

$$0 < \frac{L}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3L}{2}g(x)\,, \qquad \forall x \in]a, a+\delta[\,,$$

d'où on peut obtenir les comparaisons voulues, à l'aide du critère de comparaison énoncé plus haut. □

Exemple 13.13. Étudions la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_{-1^+}^{1} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x^2)}{\sqrt{x+1}}\,dx\,.$$

Cette intégrale est bien généralisée puisque $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$. Pourtant, on remarque que ce qui fait tendre f vers l'infini, c'est la présence de $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$: le sinus ne pose pas de problème (à part pour le calcul de la primitive). Si on pose

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,,$$

alors

$$\begin{aligned}\int_{-1^+}^{1} g(x) &= \lim_{\alpha\to-1^+}\int_{\alpha}^{1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx\\ &= 2\lim_{\alpha\to-1^+}\big(\sqrt{2}-\sqrt{\alpha+1}\big)\\ &= 2\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

Et comme

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-1^+}\sin(\tfrac{\pi}{2}x^2) = 1 > 0\,,$$

l'intégrale généralisée de f converge aussi. ◇

Exemple 13.14. L'exemple vu précédemment, $\int_{1^+}^{2}\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$, peut aussi se traiter en utilisant la proposition. Posons

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,,$$

qui comme on sait a une intégrale généralisée sur $]1,2]$ convergente (puisque $q=\frac{1}{2}<1$). On remarque alors que

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to1^+}\sqrt{\frac{x-1}{x^3-1}} = \lim_{x\to1^+}\sqrt{\frac{1}{x^2+x+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0\,,$$

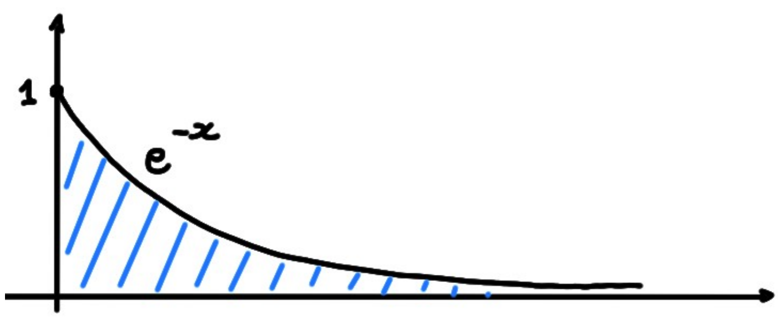
on en déduit, par la proposition, que $\int_{1^+}^{2}\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$ converge. ◇

13.3 Type II

Un autre type d'intégrale important, qui n'entre pas dans le cadre de l'intégrale de Riemann/Darboux, est celui où on intègre une fonction sur un domaine non-borné. Ici, on considérera principalement des intervalles de la forme

$$[a,\infty[\,,\qquad]-\infty,b]\,,\qquad \text{ou}\ ]-\infty,+\infty[\,.$$

Exemple 13.15. Considérons $f(x)=e^{-x}$, sur $[a,\infty[$. Par exemple, si $a=0$:



On sait que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,,$$

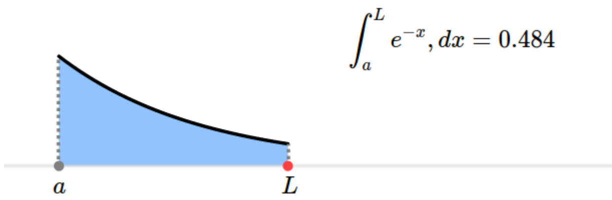
mais peut-on quand-même calculer l'aire sous son graphe ?

Ici aussi, l'approche classique ne fonctionne pas puisqu'on n'a pas de façon naturelle d'approximer l'aire sous la courbe avec une somme *finie* de rectangles : le dernier rectangle de la somme de Darboux supérieure aura toujours une aire infinie !

Par contre, on peut toujours intégrer la fonction sur un intervalle borné et fermé, $[a, L]$, où $L > a$ est grand, fixé :

$$\int_a^L e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_a^L = e^{-a} - e^{-L}\,.$$

Cette dernière expression dépend de L, mais on voit qu'elle se comporte bien lorsque L grandit. En fait, on peut prendre la limite $L \to \infty$ (sur l'animation, changer L et observer comme la valeur de l'intégrale tend vers une valeur à mesure que L augmente) :



Ce que l'on peut donc faire, c'est donner un sens à l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$, à l'aide d'une limite :

$$\int_a^{+\infty} e^{-x}\, dx := \lim_{L\to\infty} \int_a^L e^{-x}\, dx = \lim_{L\to\infty} \left(e^{-a} - e^{-L}\right) = e^{-a}\,.$$

Comme dans la section précédente, ce résultat peut paraître peu intuitif, puisque la région sous le graphe n'est pas limitée dans le plan. Elle s'étend infiniment loin le long de l'axe des $x > 0$ et pourtant, on pourrait la peindre avec une quantité *finie* de peinture. ◇

13.3.1 Intégrer sur un intervalle non-borné

Généralisons l'idée présentée dans le dernier exemple :

Définition 13.16. 1) Soit $f\colon\ [a, \infty[\to \mathbb{R}$ continue. Si la limite

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx := \lim_{L\to\infty} \int_a^L f(x)\, dx\,,$$

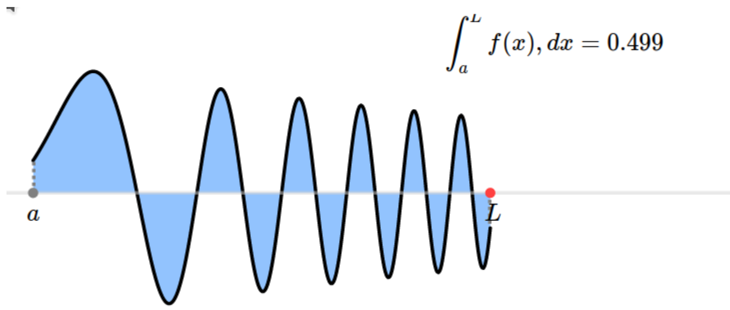
existe et est finie, on l'appelle **l'intégrale généralisée de Type II (de f sur $[a, \infty[$)**, et on dit qu'elle **converge**. Si la limite n'existe pas, on dit que **l'intégrale généralisée diverge**.

2) Soit $f\colon\ ]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ continue. Si la limite

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx := \lim_{L\to-\infty} \int_L^b f(x)\, dx\,,$$

existe et est finie, on l'appelle **l'intégrale généralisée de Type II (de f sur $]-\infty, b]$)**, et on dit qu'elle **converge**. Si la limite n'existe pas, on dit que **l'intégrale généralisée diverge**.

Si f est positive sur tout l'intervalle, l'intégrale généralisée peut être interprétée comme l'aire sous son graphe. Mais l'intégrale généralisée est définie pour des fonctions de signe a priori quelconque, et dans ce cas, la valeur de l'intégrale ne peut plus être interprétée comme une aire géométrique.



On se souvient que dans le chapitre sur les séries, la série harmonique a un terme général qui tend vers zéro, mais trop lentement pour faire converger la série.

Le même phénomène s'observe dans les intégrales de Type II : il ne suffit pas que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ pour que son intégrale généralisée converge.

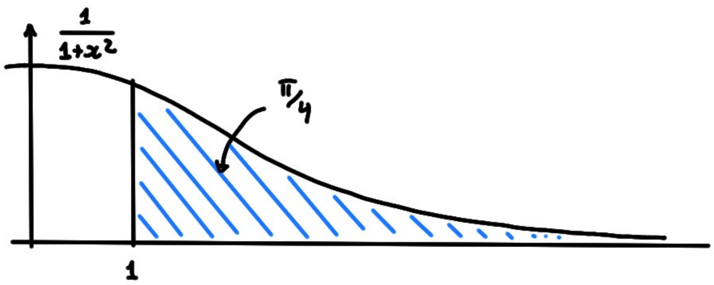
Exemple 13.17. Considérons $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, \infty[$. On a

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{L\to\infty} \int_1^L \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{L\to\infty} \log(x)\Big|_1^L \\ &= \lim_{L\to\infty} \log(L) \\ &= \infty\,.\end{aligned}$$

◇

Informel 13.18. Dans l'exemple ci-dessus : la fonction $\frac{1}{x}$ tend vers zéro lorsque $x \to \infty$, elle ne tend "pas vers zéro assez vite pour être intégrable à l'infini".

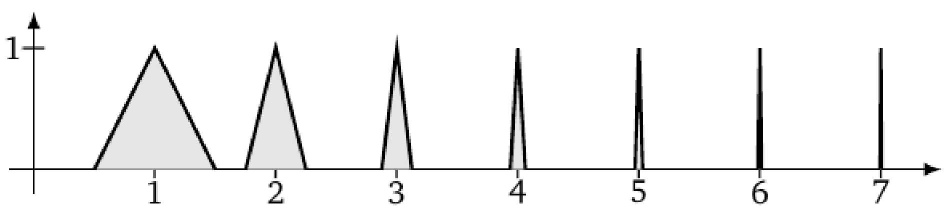
Exemple 13.19. Considérons $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $[1, +\infty[$:



$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{L\to\infty} \int_1^L \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{L\to\infty} \left\{\arctan(L) - \arctan(1)\right\} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

◇

Remarque 13.20. Remarquons qu'à la différence des séries, une fonction peut ne **pas** tendre vers zéro et avoir une intégrale convergente! Considérons une fonction dont le graphe est du type suivant :



La fonction est celle définie par les contours des triangles, et vaut zéro entre les triangles. Le $k$ème triangle a une base de largeur $b_k > 0$; tous les triangles sont de hauteur égale à 1. Comme $f(x) \geqslant 0$, l'intégrale généralisée représente l'aire sous le graphe de f, qui vaut la somme des aires de tous les triangles :

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{k\geqslant 1} A_k = \sum_{k\geqslant 1} b_k\,,$$

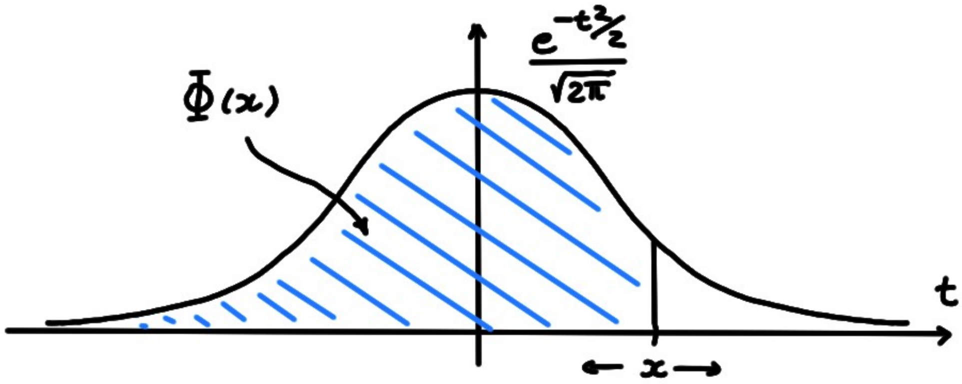
où $A_k = b_k \cdot 1 = b_k$ est l'aire du $k$ème triangle. Si les bases décroissent suffisamment vite, alors la somme des aires de tous les triangles est finie. On peut le garantir en prenant par exemple $b_k = \frac{1}{2^k}$. Dans ce cas,

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{k\geqslant 1} A_k = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2^k} = 1\,,$$

donc l'intégrale converge. Pourtant, comme les triangles ont tous une hauteur égale à 1, la fonction ne tend pas vers zéro. ◇

Exemple 13.21. Une intégrale de Type II très importante en théorie des probabilités (et en statistiques), est celle utilisée pour définir la **fonction d'erreur** (de Gauss) :

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}\,dt$$



On peut montrer (exercice) que l'intégrale converge toujours, et définit donc bien une fonction de $x \in \mathbb{R}$. ◇

13.3.2 Un critère de comparaison

Comme pour celles de Type I, les intégrales de Type II ont un critère de comparaison, valabe pour des fonctions de signe constant.

Proposition 17. *Soient $f, g\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$ continues, telles que*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \qquad \forall x \in [a,\infty[\ .$$

Alors :

1) *Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, alors $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge aussi.*
2) *Si $\int_a^\infty f(x)\,dx = +\infty$, alors $\int_a^\infty g(x)\,dx = +\infty$.*

Preuve: Par la propriété de l'intégrale de Riemann/Darboux on peut écrire, pour tout $L > a$,

$$0 \leqslant \int_a^L f(x)\,dx \leqslant \int_a^L g(x)\,dx\,,$$

et par la propriété de Chasles, ces deux intégrales sont monotones croissantes en L. Puisque la limite de la deuxième existe et est finie, celle de la première l'est aussi. □

Exemple 13.22. Étudions la convergence de l'intégrale généralisée donnée par

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\,.$$

On ne connaît pas de primitive pour e^{-x^2}, mais on peut quand-même montrer que l'intégrale converge, en utilisant une comparaison. Le choix de la comparaison va être guidé par le fait que si on ne sait pas intégrer e^{-x^2}, on sait quand-même intégrer e^{-cx}, quel que soit $c > 0$.

Décomposons d'abord l'intégrale en deux,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^2 e^{-x^2}\,dx + \int_2^\infty e^{-x^2}\,dx\,,$$

La première partie ne pose pas de problème : c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé et borné, $[0,2]$. Pour la deuxième partie, on a toujours que $x \geqslant 2$, et donc $x^2 = x\cdot x \geqslant 2x$, ce qui entraîne $0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-2x}$. Or comme

$$\int_2^\infty e^{-2x}\,dx = \lim_{L\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}e^{-2x}\right\}\Big|_2^L = \frac{1}{2}e^{-4}\,,$$

on conclut que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge aussi. (On a pris $c = 2$, mais on aurait pu prendre n'importe quel $c > 0$.) ◇

Exemple 13.23. Considérons

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[5]{x^5+1}}\,dx\,.$$

On pourrait essayer d'utiliser le fait que pour tout $x \geqslant 1$,

$$\sqrt[5]{x^5+1} \geqslant \sqrt[5]{x^5} = x\,,$$

ce qui donne

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[5]{x^5+1}}\,dx \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx\,.$$

Malheureusement, comme l'intégrale du membre de droite est infinie, cette inégalité ne nous dit rien sur l'intégrale de départ !

Remarquons que si $x \geqslant 1$, alors $x^5 \geqslant 1^5 = 1$, et donc

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^5+1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt[5]{x^5+x^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2x^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}x}\,.$$

Mais comme $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ diverge, notre intégrale diverge aussi. ◇

13.3.3 Intégrales du type $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$

Théorème 13.24. *Pour tout $a > 0$,*

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{(p-1)a^{p-1}} \text{ (converge)} & \text{si } p > 1\,,\\ +\infty \text{ (diverge)} & \text{si } p \leqslant 1\,.\end{cases}$$

Preuve: On a déjà traité le cas $p = 1$ dans un exemple précédent :

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{L\to\infty} \log(x)\Big|_a^L = +\infty$$

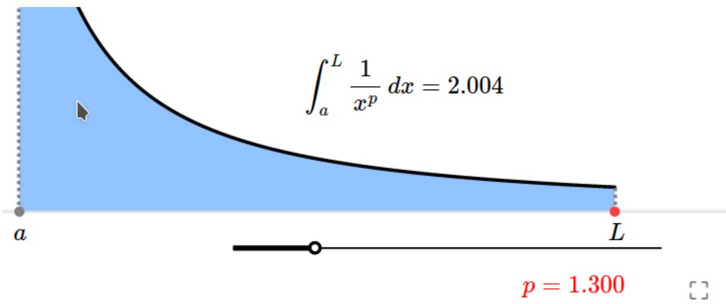
Ensuite, pour $p \neq 1$, on peut faire

$$\int_a^L \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^L = \frac{1}{1-p}\begin{cases}(\frac{1}{L^{p-1}} - \frac{1}{a^{p-1}}) & \text{si } p > 1\\ (L^{1-p} - \frac{1}{a^{p-1}}) & \text{si } p < 1\end{cases}$$

Donc

$$\lim_{L\to\infty}\int_a^L \frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\frac{1}{(p-1)a^{p-1}} & \text{si } p > 1\,,\\ +\infty & \text{si } p < 1\,,\end{cases}$$

ce qui conclut la preuve pour tous les cas. □



Informel 13.25. Donc l'intégrale de $\frac{1}{x^p}$ "à l'infini" est très sensible à la valeur de p lorsque p est proche de 1 ! Par exemple,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.0000000001}} < +\infty\,,$$

alors que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{0.9999999999}} = +\infty\,,$$

Exemple 13.26. Considérons

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^7+1}\,.$$

On peut en principe, avec les méthodes du chapitre sur l'**intégration des fonctions rationnelles** (lien vers la section m_integrale_fonctions_rationnelles), calculer la primitive de $\frac{1}{x^7+1}$. Mais si on désire juste savoir si cette intégrale converge ou diverge, sans passer par la primitive, on peut utiliser une comparaison et le théorème ci-dessus. En effet, comme $\frac{1}{x^7+1} \leqslant \frac{1}{x^7}$ pour tout $x > 0$ (donc en particulier pour tout $x \geqslant 1$), on a

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^7+1} \leqslant \int_1^\infty \frac{dx}{x^7} < \infty$$

En effet, dans cette dernière, $a = 1 > 0$, et $p = 7 > 1$. ◇

Informel 13.27. Majorer une fonction positive $f(x)$ par une autre fonction plus simple est un bon moyen d'étudier la convergence de son intégrale, en évitant de passer par sa primitive. Mais il faut prendre garde à ne pas introduire de nouveau problème en faisant cette majoration.

Considérons

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+\sqrt{x}+1}\,.$$

Cette intégrale est de Type II, puisqu'elle est continue sur $[0,\infty[$ (en particulier, elle est continue et bornée au voisinage de 0 et donc n'est *pas* de Type I). Pour l'étudier, on observe que son comportement pour x grand, est régi essentiellement par le terme "x^3", ce qui mène à remarquer que $\sqrt{x}+1 \geqslant 0$, et à écrire la comparaison

$$0 \leqslant \frac{1}{x^3+\sqrt{x}+1} \leqslant \frac{1}{x^3}\,.$$

Malheureusement, la fonction $\frac{1}{x^3}$ a un problème en zéro, que la fonction de départ n'avait pas.

Pour pouvoir profiter de cette comparaison, on peut d'abord séparer l'intégrale en deux, en écrivant par exemple

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+\sqrt{x}+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^3+\sqrt{x}+1} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^3+\sqrt{x}+1}\,.$$

La première intégrale est une intégrale de Riemann/Darboux, et est donc bien définie. C'est pour la deuxième que l'on peut utiliser la comparaison et le fait que l'intégrale de $\frac{1}{x^3}$ est convergente, puisque maintenant sur l'intervalle $[1,\infty[$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3+\sqrt{x}+1} \leqslant \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} < \infty\,.$$

On en déduit que l'intégrale est convergente.

13.3.4 Un critère via une limite de quotient

Proposition 18. *Soient $f,g:[a,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ continues, telles que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0\,.$$

Alors $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge si et seulement si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge.

Il existe bien sûr une affirmation analogue pour $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Exemple 13.28. Considérons l'intégrale généralisée

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+\sin(x)e^{\sin(x)}}\,.$$

Remarquons que la fonction que l'intègre est bien définie, puisque

$$x^2+\sin(x)e^{\sin(x)} \geqslant x^2-e \geqslant 4-e > 0 \qquad \forall x \geqslant 2\,.$$

Lorsque x est grand, ce qui est responsable de la petitesse de $f(x) = \frac{1}{x^2+\sin(x)e^{\sin(x)}} \geqslant 0$ est le “x^2” au dénominateur. Ceci suggère de considérer

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\,.$$

On a bien $f(x), g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 2$, et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+\sin(x)e^{\sin(x)}}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\sin(x)e^{\sin(x)}}{x^2}} = 1 > 0\end{aligned}$$

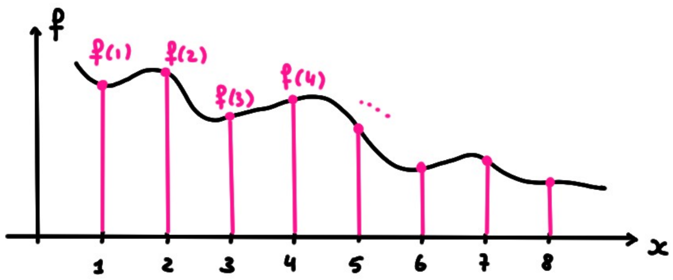
Or l'intégrale de g converge ($p = 2 > 1$), donc celle de f converge aussi. $\diamond$

13.3.5 Utilisation dans l'étude des séries

Nous allons voir maintenant que parfois, une série peut être *comparée* à une intégrale généralisée de Type II, ce qui peut grandement faciliter l'étude de sa convergence. Ceci vient du fait que l'intégrale étant par définition construite à l'aide d'une variable *continue* x, son étude peut se faire à l'aide du Théorème Fondamental de l'Analyse (un outil qui n'existe pas pour l'étude des séries, dont la variable n est *discrète*).

Considérons une série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ dont le terme général a_n est en fait une fonction réelle $f(x)$ évaluée en $x = n$:

$$a_n = f(n)$$



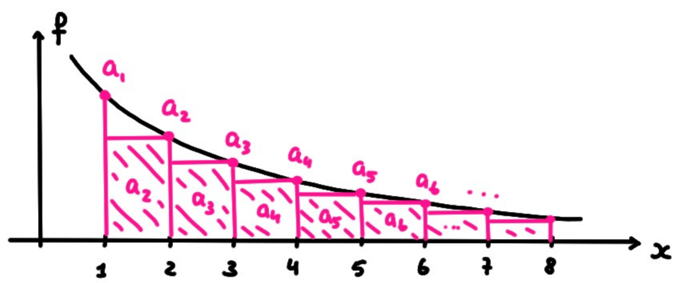
Il est alors possible, sous certaines conditions, de relier la convergence de la série à l'intégrabilité de la fonction à l'infini :

Théorème 13.29. *Soit $a > 0$ et $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}_+$, continue et décroissante. Soit n_0 un entier tel que $n_0 \geqslant a$. Considérons la série de terme général $a_n = f(n)$. Alors*

$$\sum_{n\geqslant n_0} a_n \quad \textit{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \textit{converge}\,.$$

Preuve: Pour simplifier, supposons que $a = n_0 = 1$.

D'une part, pour chaque entier $n \geqslant 2$, on peut interpréter a_n comme l'aire d'un rectangle de largeur égale à 1 situé à gauche de $x = n$, dont la base est l'intervalle $[n-1, n]$, de hauteur $a_n = f(n)$. Comme f est décroissante, ce rectangle est *au-dessous* du graphe de f sur tout l'intervalle $[n-1, n]$:

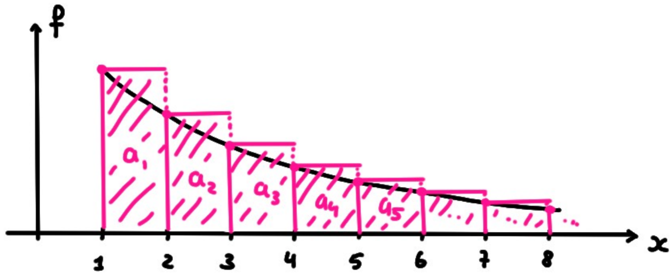


On peut donc écrire

$$\sum_{n\geqslant 2} a_n \leqslant \int_1^\infty f(x)\,dx$$

Cette inégalité implique que si l'intégrale est finie, alors la série converge, et si la série diverge, alors l'intégrale diverge aussi.

D'autre part on peut, pour chaque entier $n \geqslant 1$, interpréter a_n comme l'aire d'un rectangle de largeur égale à 1 situé à droite de $x = n$, dont la base est l'intervalle $[n, n+1]$, de hauteur $a_n = f(n)$. Comme f est décroissante, ce rectangle est *au-dessus* du graphe de f sur tout l'intervalle $[n, n+1]$:



On peut donc écrire

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n \geqslant \int_1^\infty f(x)\,dx$$

Cette inégalité implique que si l'intégrale est infinie, alors la série diverge, et si la série converge, alors l'intégrale converge. □

Exemple 13.30. Comme $f(x) = \frac{1}{x^p}$ est décroissante pour tout $p \geqslant 0$, on déduit du théorème précédent que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{converge}\,.$$

Par le théorème de la section précédente, ceci fournit donc le résultat déjà prouvé dans le chapitre sur les séries :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{converge} & \text{si } p > 1\,, \\ \text{diverge} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant 1\,. \end{cases}$$

◇

Passons maintenant au cas d'un type de série qu'aucun de nos critères de convergence permet d'étudier :

Exemple 13.31. Considérons

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\log(n))^\mu}\,,$$

où $\mu > 0$.

Si $\mu = 0$, cette série est la série harmonique, donc elle diverge. Mais si $\mu > 0$, son terme général décroît *strictement plus vite* que $\frac{1}{n}$. On peut alors se poser la question de savoir si le terme $\frac{1}{\log(n)^\mu}$ est suffisant pour permettre à la série de converger.

Voyons le terme général comme $a_n = f(n)$, où

$$f(x) = \frac{1}{x(\log(x))^\mu}\,.$$

Remarquons que f est positive et strictement décroissante, puisque

$$f'(x) = -\frac{(\log x)^\mu + \mu(\log x)^{\mu-1}}{(x(\log x)^\mu)^2} < 0 \qquad \forall x \geqslant 2\,.$$

Donc, par le théorème précédent, la série converge si et seulement si l'intégrale généralisée

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^\gamma}\,dx$$

converge. Mais, par le changement de variable $z = \log(x)$,

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^\mu}\,dx &= \lim_{L\to\infty}\int_2^L \frac{1}{x(\log x)^\mu}\,dx\\ &= \lim_{L\to\infty}\int_{\log 2}^{\log L}\frac{1}{z^\mu}\,dz\\ &= \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{z^\mu}\,dz\,,\end{aligned}$$

qui comme on sait converge si et seulement si $\mu > 1$. On en conclut que

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\log(n))^\mu}\begin{cases}\text{converge} & \text{si } \mu > 1\,,\\ \text{diverge} & \text{si } \mu \leqslant 1\,.\end{cases}$$

◇

Remarque 13.32. Ce dernier résultat permet de donner des exemples de séries dont le terme général décroît plus vite que celui de la série harmonique, mais qui sont aussi divergentes. Par exemple : $\sum_n \frac{1}{n\log(n)}$ diverge. ◇

Quiz 13.3.1. *(MAN 2021) Soit $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Vrai ou faux ?*

1) □ *Si $f(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 1$, alors $\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverge.*
2) □ $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^2}\,dx$ *converge.*
3) □ *Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge, alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.*

13.4 Type III

Les intégrales généralisées de Type III représentent des combinaisons d'intégrales de Types I et II.

13.4.1 Mélange de Type I et I

Définition 13.33. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue, et soit $a < c < b$. Si

$$\int_{a^+}^c f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_c^{b^-} f(x)dx$$

convergent, on pose

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx := \int_{a^+}^c f(x)dx + \int_c^{b^-} f(x)dx\,.$$

et on dit que l'intégrale généralisée **converge** ; si au moins une des intégrales diverge, on dit qu'elle **diverge**.

Exemple 13.34. Considérons l'intégrale de Type III

$$\int_{0^+}^{2^-} \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx.$$

On peut la décomposer en

$$\int_{0^+}^{2^-} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx = \int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx + \int_{1}^{2^-} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx\,.$$

Le changement de variable $x = \varphi(u) = 2u^2$ permet d'écrire

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2}u\sqrt{2-2u^2}} 4u\,du = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du\,.$$

Ce changement de variable montre que la première intégrale converge,

$$\begin{aligned}
\int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx \\
&= 2\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\sqrt{\varepsilon/2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\
&= 2\lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big(\arcsin(1/\sqrt{2}) - \arcsin(\sqrt{\varepsilon/2})\Big) \\
&= 2\Big(\arcsin(1/\sqrt{2}) - \arcsin(0)\Big) \\
&= 2\arcsin(1/\sqrt{2})\,.
\end{aligned}$$

de même pour la deuxième :

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{2^-} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx &= \lim_{\beta\to 2^-} \int_{1}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx \\
&= 2\lim_{\beta\to 2^-} \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\beta/2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\
&= 2\lim_{\beta\to 2^-} \Big(\arcsin(\sqrt{\beta/2}) - \arcsin(1/\sqrt{2})\Big) \\
&= 2\Big(\arcsin(1) - \arcsin(1/\sqrt{2})\Big) \\
&= \pi - 2\arcsin(1/\sqrt{2})\,.
\end{aligned}$$

donc l'intégrale converge, et sa valeur est

$$\begin{aligned}
\int_{0^+}^{2^-} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}\,dx &= 2\arcsin(1/\sqrt{2}) + (\pi - 2\arcsin(1/\sqrt{2})) \\
&= \pi\,.
\end{aligned}$$

◇

Exemple 13.35. Considérons l'intégrale de Type III

$$\int_{0^+}^{1-} \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx\,,$$

que l'on décompose naturellement en

$$\int_{0^+}^{1-} \frac{1}{x\sqrt[3]{1-x}}\,dx = \int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt[3]{1-x}}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{1}{x\sqrt[3]{1-x}}\,dx\,.$$

La deuxième intégrale converge puisque

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{1}{x\sqrt[3]{1-x}}\,dx &\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt[3]{1-x}}\,dx \\ &= 2\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx \\ &= 2\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\,du < \infty\,.\end{aligned}$$

qui converge ($p = \frac{1}{3} < 1$). Par contre la première diverge puisque

$$\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt[3]{1-x}}\,dx \geqslant \int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}\,dx = \sqrt[3]{2}\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\,dx = \infty\,.$$

Donc l'intégrale diverge. $\diamond$

13.4.2 Mélange de Types I et II

Définition 13.36. Soit $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, et soit $a < c < \infty$. Si

$$\int_{a^+}^{c} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)dx \qquad \text{convergent,}$$

on pose

$$\int_{a^+}^{\infty} f(x)dx := \int_{a^+}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx\,,$$

et on dit que l'intégrale généralisée **converge** ; si au moins une des intégrales diverge, on dit qu'elle **diverge**.

Exemple 13.37. Considérons

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx\,.$$

On sépare :

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx = \int_{0^+}^{2} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,.$$

Comme ici, $p = \frac{3}{2} > 1$, la première diverge et la deuxième converge. Donc toute l'intégrale diverge. $\diamond$

Exemple 13.38. Considérons l'intégrale de Type III donnée par

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

En décomposant

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{0^+}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx\,,$$

on remarque que la première (de Type I) converge puisque $e^{-x} \leqslant 1$ pour tout $x \geqslant 0$, et donc

$$\int_{0^+}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx \leqslant \int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx\,,$$

qui converge puisque $p = \frac{1}{2} < 1$. La deuxième converge aussi puisque

$$\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx \leqslant \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1}}\, dx = e^{-1}\,.$$

Donc l'intégrale de Type III converge. ◇

13.4.3 Mélange de Type II et II

Définition 13.39. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et soit $c \in \mathbb{R}$. Si

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

convergent, on pose

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx\,.$$

et on dit que l'intégrale généralisée **converge**; si au moins une des intégrales diverge, on dit qu'elle **diverge**.

Remarque 13.40. Remarquons que comme dans le cas précédent, le choix du nombre c n'influe pas sur la convergence/divergence de l'intégrale, ni sur la valeur de l'intégrale (dans le cas où elle est convergente). ◇

Exemple 13.41. Considérons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx\,,$$

que l'on décompose en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx\,.$$

Comme

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx = \lim_{L\to\infty} \int_{0}^{L} \frac{x}{x^2+1}\, dx = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2}\log(L^2+1) = +\infty\,,$$

l'intégrale est divergente. ◇

Informel 13.42. Remarquons que dans ce dernier exemple, le fait que la fonction est impaire implique que pour tout $L > 0$,

$$\int_{-L}^{L} \frac{x}{x^2+1}\, dx = 0\,,$$

et donc évidemment

$$\lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} \frac{x}{x^2+1}\, dx = 0\,,$$

Mais cette limite *n'est pas* la définition de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx$.

Chapitre 14

Compléments

14.1 $\exp$ et $\log$

Il existe plusieurs manières de définir rigoureusement les fonctions exponentielles et logarithme, mais toutes commencent par en construire une pour ensuite obtenir l'autre.

Dans cette section, on construit d'abord la fonction exponentielle à l'aide d'une série de puissances, on étudie ses propriétés, et on l'utilise ensuite pour construire la fonction logarithme. (Dans la section suivante on fera le contraire.)

Considérons la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n(x)$ avec paramètre x, pour laquelle

$$a_n(x) := \frac{x^n}{n!}\,.$$

Puisqu'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0\,,$$

le critère de d'Alembert implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n(x)$ converge absolument, et définit ainsi une fonction sur tout $\mathbb{R}$.

Définition 14.1. On appelle **exponentielle** la fonction

$$\begin{aligned}\exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \exp(x) := \sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}\,.\end{aligned}$$

Remarquons que par définition,

$$\exp(0) = 1\,.$$

Toute l'importance de cette fonction réside dans sa propriété fondamentale : *elle transforme les sommes en produits*. Plus précisément :

Théorème 14.2. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)\,.$$

Preuve: Par définition,

$$\exp(x+y) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(x+y)^n}{n!}\,.$$

Par la formule du binôme, pour tout $n \geqslant 0$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,,$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{(x+y)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \sum_{n=k}^{N} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!}
\end{aligned}$$

Définissons $N' = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, et décomposons la somme sur k en deux :

$$\sum_{k=0}^{N} = \sum_{k=0}^{N'} + \sum_{k=N'+1}^{N}$$

La deuxième s'estime comme suit : puisque $\sum_{l=0}^{N-k} \frac{|y|^l}{l!} \leqslant \exp(|y|)$,

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{k=N'+1}^{N} \frac{x^k}{k!} \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!} \Big| &\leqslant \sum_{k=N'+1}^{N} \frac{|x|^k}{k!} \sum_{l=0}^{N-k} \frac{|y|^l}{l!} \\
&\leqslant \exp(|y|) \sum_{k=N'+1}^{N} \frac{|x|^k}{k!}\,,
\end{aligned}$$

qui tend vers zéro lorsque $N \to \infty$. On peut ensuite écrire la première somme ainsi :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!} \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!} \\
&\quad = \exp(y) \sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!} \Big(\exp(y) - \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!} \Big) \\
&\quad = \exp(x)\exp(y) + \\
&\qquad\qquad \exp(y) \Big(\sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!} - \exp(x) \Big) - \sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!} \Big(\exp(y) - \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!} \Big)\,,
\end{aligned}$$

D'une part,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)\,,$$

et d'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ on a que, pour tout N suffisamment grand, et pour tout $k \leqslant N'$,

$$\Big| \exp(y) - \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!} \Big| \leqslant \varepsilon\,,$$

qui permet de majorer

$$\Big|\sum_{k=0}^{N'} \frac{x^k}{k!}\Big(\exp(y) - \sum_{l=0}^{N-k} \frac{y^l}{l!}\Big)\Big| \leqslant \varepsilon|\exp(y)|$$

On a donc bien démontré que

$$\exp(x+y) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x)\exp(y)\,.$$

□

Cette propriété rappelle celle de la fonction “puissance” en arithmétique, $n \mapsto a^n$, qui transforme aussi les sommes en produits : pour toute base $a > 0$,

$$a^{m+n} = a^m a^n \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}\,.$$

La base se retrouve en prenant $n = 1$: $a^1 = a$.

Pour cette raison, on utilise souvent la notation

$$\exp(x) \equiv e^x\,,$$

où le nombre

$$e := \exp(1) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} = 2.718\cdots$$

Voyons des conséquences de la propriété fondamentale :

Corollaire 10. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Preuve: En utilisant le théorème,

$$1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x)\exp(-x)\,.$$

□

Puisque $\exp(x) > 1 > 0$ pour tout $x > 0$, le corollaire implique que $0 < \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} < 1$ pour tout $x > 0$. En particulier, $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on peut écrire plus précisément l'ensemble d'arrivée de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp(x)\,. \end{aligned}$$

Théorème 14.3. *L'exponentielle est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et*

$$\big(\exp(x)\big)' = \exp(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Preuve: Il s'agit de calculer

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h} \\ &= \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}\,. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{\exp(h)-1}{h} &= \frac{1}{h}\sum_{k\geqslant 1}\frac{h^k}{k!}\\ &= \sum_{k\geqslant 1}\frac{h^{k-1}}{k!}\\ &= \sum_{j\geqslant 0}\frac{h^j}{(j+1)!}\\ &= 1+\sum_{j\geqslant 1}\frac{h^j}{(j+1)!}\,,\end{aligned}$$

ce qui entraîne, lorsque $|h|<1$, et puisque $(j+1)!\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\exp(h)-1}{h}-1\Big| &\leqslant \sum_{j\geqslant 1}\frac{|h|^j}{(j+1)!}\\ &\leqslant \sum_{j\geqslant 1}|h|^j\\ &= \frac{|h|}{1-|h|}\,.\end{aligned}$$

(On a sommé la série géométrique.) On a donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h}=1\,,$$

ce qui démontre l'affirmation. □

Une conséquence immédiate de ce dernier résultat : étant dérivable partout, $x\mapsto\exp(x)$ est continue. On utilise ce fait pour démontrer :

Proposition 19. $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ *est une bijection.*

Preuve: Remarquons que si $x>0$, alors $\frac{x^k}{k!}>0$ pour tout $k\geqslant 2$, et donc

$$\exp(x)>1+x\qquad\forall x>0\,,$$

qui entraîne

$$\lim_{x\to+\infty}\exp(x)=+\infty\,,$$

ainsi que

$$\lim_{x\to-\infty}\exp(x)=\lim_{y\to+\infty}\exp(-y)=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\exp(y)}=0\,.$$

Fixons maintenant $y>0$. Les deux limites ci-dessus impliquent qu'il existe a et b tels que $\exp(a)<y<\exp(b)$. Par le Théorème de la valeur intermédiaire appliqué à $\exp:[a,b]\to\mathbb{R}$, on en déduit qu'il existe $x\in]a,b[$ tel que $\exp(x)=y$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(\exp)=\mathbb{R}_+^*$, et donc que la fonction est surjective.

Montrons qu'elle aussi injective. Pour ce faire, remarquons que si $x<x'$, le Théorème des accroissements finis implique qu'il existe $c\in]x,x'[$ tel que

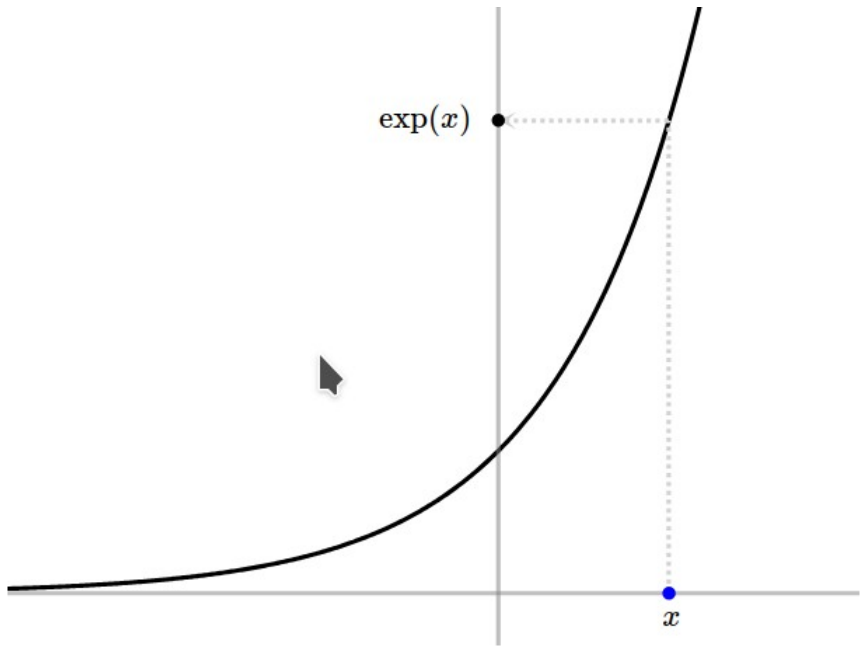
$$\frac{\exp(x')-\exp(x)}{x'-x}=\exp'(c)=\exp(c)\,.$$

Puisque $\exp(c)>0$, on en déduit que $\exp(x)<\exp(x')$.

Ainsi, $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ est bijective. □

On a démontré, en passant, que

$$\lim_{x\to-\infty}\exp(x)=0\,,\qquad\lim_{x\to+\infty}\exp(x)=+\infty\,.$$



14.1.1 Logarithme

Puisque l'exponentielle est bijective, on peut considérer sa réciproque :

Définition 14.4. La réciproque de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est appelée **logarithme** :

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log(x) \end{aligned}$$

Par définition, on a donc

$$\begin{aligned} \log(\exp(x)) &= x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,, \\ \exp(\log(y)) &= y \qquad \forall y \in \mathbb{R}_+^*\,. \end{aligned}$$

Si l'exponentielle transforme des sommes en produits, sa réciproque doit forcément transformer des produits en sommes :

Théorème 14.5. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)\,.$$

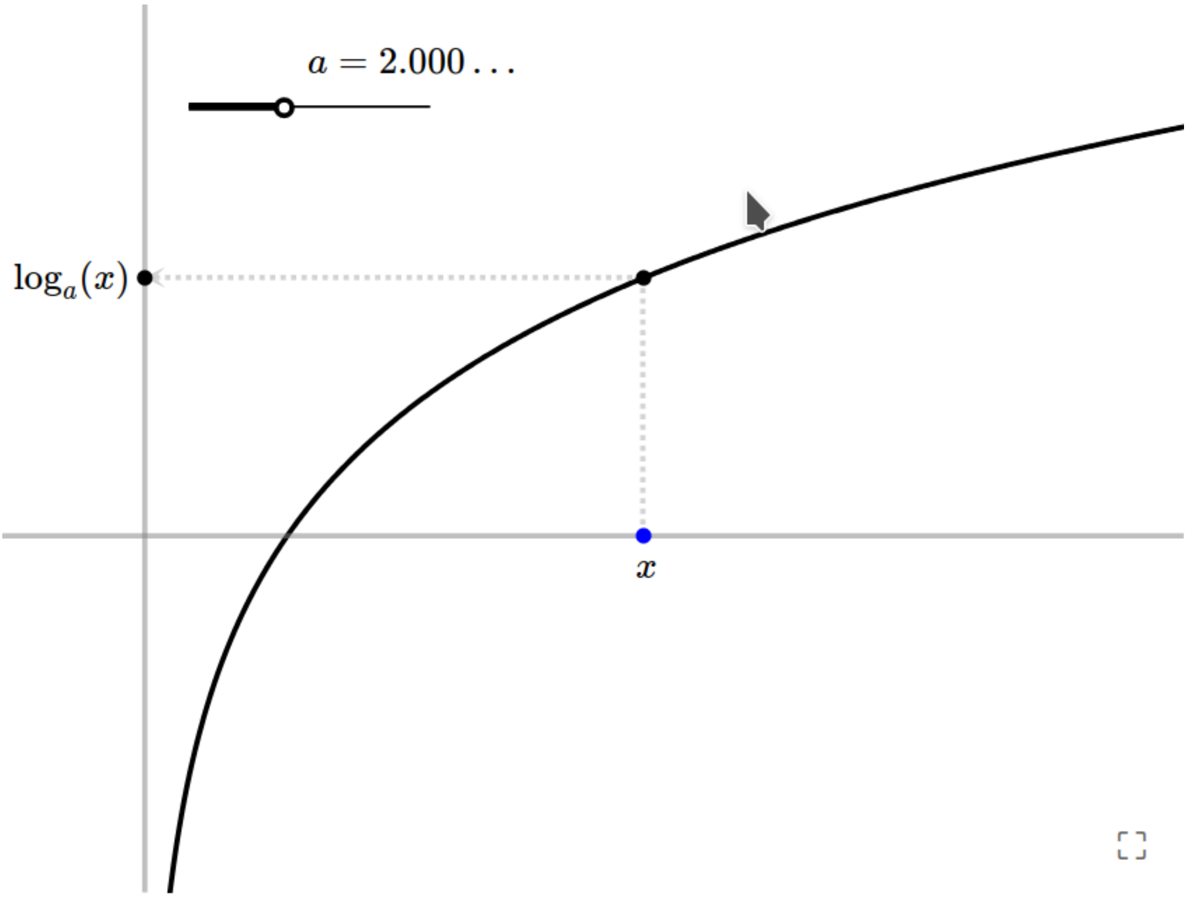
Preuve: Par définition, $t = \log(xy)$ si et seulement si $\exp(t) = xy$. Mais $x = \exp(\log(x))$ et $y = \exp(\log(y))$, et donc

$$\exp(t) = \exp(\log(x))\exp(\log(y)) = \exp\big(\log(x) + \log(y)\big)\,.$$

Ceci implique que $\log(xy) = t = \log(x) + \log(y)$. □

D'autres propriétés qui découlent directement du fait que le logarithme est la réciproque de l'exponentielle : $\log(1) = 0$,

$$\log(x) \begin{cases} < 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ > 0 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$



De plus, par le théorème sur la dérivée de la fonction réciproque, pour tout $x > 0$, en dérivant les deux côtés de l'identité

$$\exp(\log(x)) = x\,,$$

on obtient

$$\exp'(\log(x))(\log(x))' = 1\,,$$

qui donne

$$(\log(x))' = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}\,.$$

Notons encore que

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} \log(x) = +\infty\,.$$

14.1.2 Changements de base

On peut utiliser exp et log pour définir d'autres fonctions, dont les propriétés sont semblables mais que l'on interprète comme exponentielles et logarithmes dans des *bases* différentes.

Soit $a > 0$, appelé **base**.

Définition 14.6. L'**exponentielle de base** a est la fonction

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp_a(x) := \exp(x\log(a))\,. \end{aligned}$$

On a bien sûr que

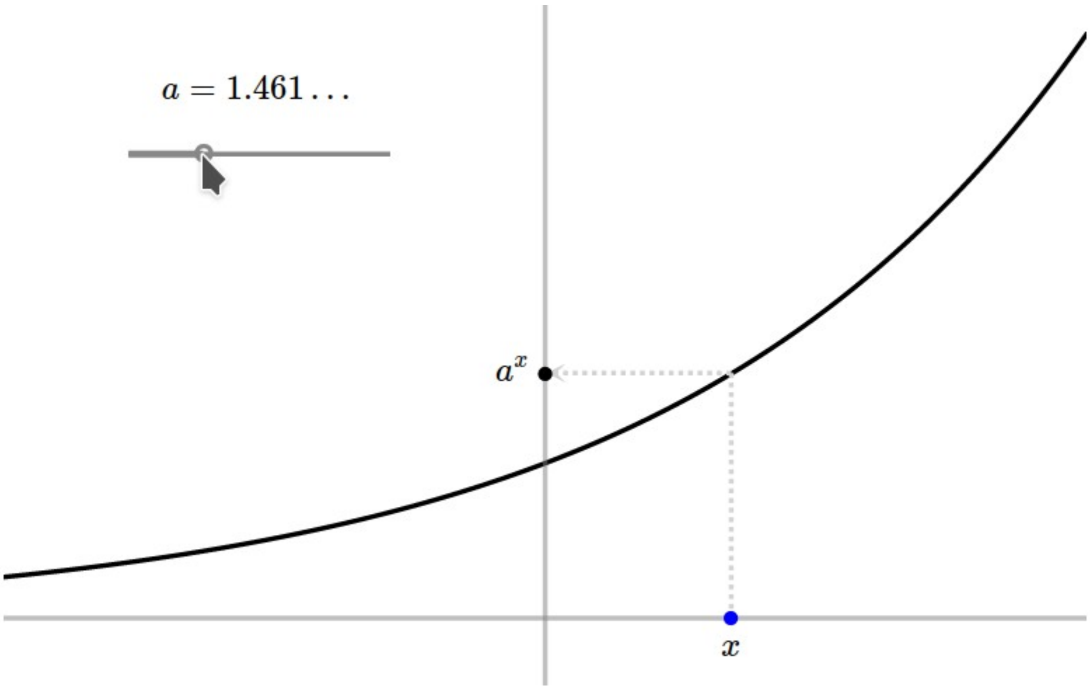
$$\begin{aligned}\exp_a(x+y) &= \exp((x+y)\log(a)) \\ &= \exp(x\log(a) + y\log(a)) \\ &= \exp(x\log(a))\exp(y\log(a)) \\ &= \exp_a(x)\exp_a(y)\,,\end{aligned}$$

et on utilise aussi la notation $\exp_a(x) \equiv a^x$.

On peut ensuite calculer

$$(\exp_a(x))' = \big(\exp(x\log(a))\big)' = \log(a)\underbrace{\exp_a(x)}_{>0}\,,$$

et puisque le signe de $\log(a)$ change, on en déduit que $\exp_a(x)$ est strictement croissante si $a > 1$, strictement décroissante si $0 < a < 1$.



Remarquons que l'on peut maintenant considérer une exponentielle évaluée en un point $x > 0$, mais dont la base est elle-même une fonction $a(y) > 0$:

$$\exp_{a(y)}(x) = a(y)^x := \exp(x\log(a(y)))\,.$$

En particulier, on a la formule classique : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(a^y)^x := \exp(x\log(a^y)) = \exp((xy)\log(a)) = a^{xy}\,.$$

Aussi, si la base dépend de x et que l'exposant est une fonction de x, on doit admettre implicitement la définition suivante :

Définition 14.7. Si $f(x) > 0$, alors

$$f(x)^{g(x)} := \exp\big(g(x)\log(f(x))\big)\,.$$

14.2 log et exp

Dans cette section, on construit la fonction logarithme, on étudie ses propriétés, et on l'utilise pour en déduire la fonction exponentielle.

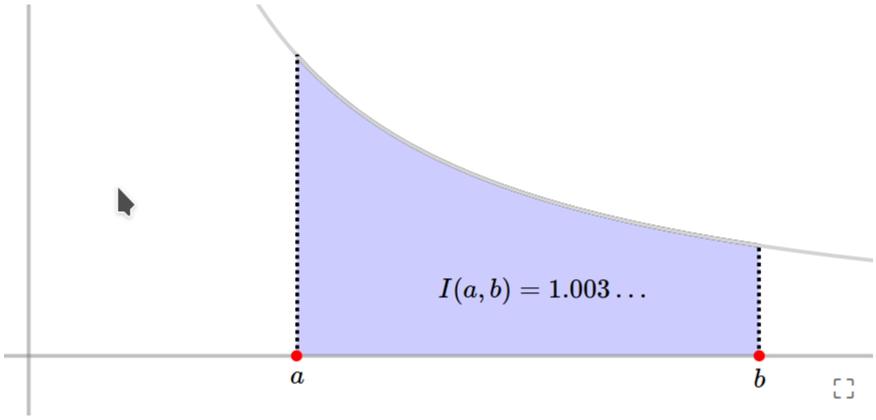
14.2.1 Aire sous la courbe $y = \frac{1}{x}$

Pour commencer définissons, pour tous $a, b > 0$, le nombre

$$I(a, b) := \int_a^b \frac{dt}{t}.$$

Si $a < b$, $I(a, b)$ le nombre s'interprète comme l'aire de la région délimitée par l'axe Ox, le graphe de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, et les deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$: Si $a > b$, la convention faite sur l'intégrale implique que

$$I(a, b) = -I(b, a).$$



Cette fonction de deux variables satisfait aux propriétés suivantes :

Proposition 20. ⋆ *Relation de Chasles : pour tous réels strictement positifs* a, b, c,

$$I(a, b) + I(b, c) = I(a, c).$$

⋆ *Pour tous* $0 < a < b < c$, *et pour tout* $\lambda > 0$,

$$I(\lambda a, \lambda b) = I(a, b).$$

Preuve: La première propriété suit de $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$. Pour la deuxième, par le changement de variable $s := t/\lambda$ (qui donne $dt = \lambda ds$) dans l'intégrale définie,

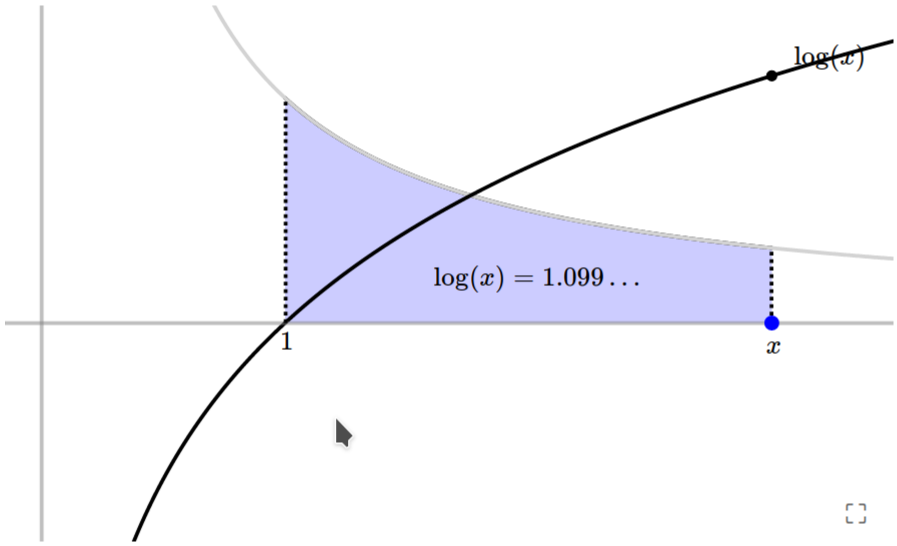
$$I(\lambda a, \lambda b) = \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{dt}{t} = \int_a^b \frac{\lambda dt}{\lambda s} = \int_a^b \frac{dt}{s} = I(a, b).$$

□

14.2.2 Définition du logarithme

Définition 14.8. Le **logarithme** est la fonction

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log(x) := I(1,x) = \int_1^x \frac{dt}{t}\,. \end{aligned}$$



On a en particulier :

$$\log(1) = 0\,.$$

La propriété remarquable de cette fonction est qu'elle transforme des produits en sommes :

Théorème 14.9. *Pour tous* $x, y > 0$,

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)\,.$$

Preuve: Par la proposition, $I(x, xy) = I(y)$, et donc, en utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \log(xy) &= I(1, xy) \\ &= I(1,x) + I(x,xy) \\ &= I(1,x) + I(1,y) \\ &= \log(x) + \log(y)\,. \end{aligned}$$

□

Par conséquent, pour tout $x > 0$,

$$0 = \log(1) = \log(x\tfrac{1}{x}) = \log(x) + \log(\tfrac{1}{x})\,,$$

qui donne

$$\log(\tfrac{1}{x}) = -\log(x)\,.$$

Théorème 14.10. *Le logarithme est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$, *et*

$$(\log(x))' = \frac{1}{x}\,.$$

En particulier, $x \mapsto \log(x)$ *est strictement croissante.*

Preuve: Par le Théorème Fondamental de l'Analyse, étant défini comme l'intégrale d'une fonction continue, $\log$ est dérivable et

$$(\log(x))' = \Big(\int_1^x \frac{dt}{t}\Big)' = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* .$$

□

Puisque le logarithme est dérivable, il est continu sur $\mathbb{R}_+^*$.

Lemme 29.

$$\lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty , \qquad \lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty .$$

Preuve: Puisque c'est une fonction strictement croissante, il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \log(n) = \lim_{n\to\infty} I(1,n) = +\infty .$$

En comparant l'aire sous la courbe avec les rectangles de bases $[k, k+1]$ sous la courbe, $k = 1, \dots, n-1$,

$$I(1,n) \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} .$$

On reconnaît dans cette somme la somme partielle de la série harmonique, qui tend vers l'infini lorsque $n \to \infty$.

L'autre limite est une conséquence de la première, puisque par le changement de variable $x = \frac{1}{y}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \log(x) &= \lim_{y\to+\infty} \log(\tfrac{1}{y}) \\ &= -\lim_{y\to+\infty} \log(y) \\ &= -\infty . \end{aligned}$$

□

Puisque $\log$ est continue, les deux limites ci-dessus impliquent que $\mathrm{Im}(\log) = \mathbb{R}$. Puisqu'elle est strictement croissante, elle est aussi injective. On a donc montré que $\log$ est une bijection.

Définition 14.11. La réciproque de $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est la fonction **exponentielle**,

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp(x) , \end{aligned}$$

Par définition,

$$\begin{aligned} \log(\exp(x)) &= x \qquad \forall x \in \mathbb{R} , \\ \exp(\log(y)) &= y \qquad \forall y \in \mathbb{R}_+^* . \end{aligned}$$

On a la propriété fondamentale :

$$\begin{aligned} \exp(x+y) &= \exp\big(\log(\exp(x)) + \log(\exp(y))\big) \\ &= \exp\big(\log(\exp(x)\exp(y))\big) \\ &= \exp(x)\exp(y)) . \end{aligned}$$

De plus, en dérivant la relation

$$x = \log(\exp(x)) ,$$

par rapport à x,

$$1 = \log'(\exp(x)) = \frac{1}{\exp(x)} (\exp(x))' ,$$

qui entraîne

$$\exp(x)' = \exp(x) .$$

14.2.3 Changements de base

(On peut procéder comme dans la section précédente.)

14.3 Fonctions hyperboliques

On définit ici les *fonctions trigonométriques hyperboliques*. Même si ces fonctions seront définies uniquement à partir de l'exponentielle, leurs propriétés rappelleront clairement celles des fonctions trigonométriques de base. En fin de section, on fera quelques commentaires sur l'origine du terme "hyperbolique".

Définition 14.12. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- ⋆ Le **sinus hyperbolique** de x est défini par

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,.$$

- ⋆ Le **cosinus hyperbolique** de x est défini par

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.$$

- ⋆ La **tangente hyperbolique** de x est définie par

$$\tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,.$$

Remarquons que

- ⋆ $\cosh(x)$ est paire, que $\cosh(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ⋆ $\sinh(x)$ et $\tanh(x)$ sont impaires, et positives si $x > 0$, négatives si $x < 0$.
- ⋆ On a vu **ici** (lien vers la section m_fonctions_paires_impaires) que toute fonction peut se décomposer en une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. En appliquant ce résultat à la fonction $f(x) = e^x$, on obtient précisément

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x)\,.$$

On peut voir la tangente hyperbolique comme étant définie par

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,.$$

Un simple calcul mène à

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1\,,$$

qui entraîne

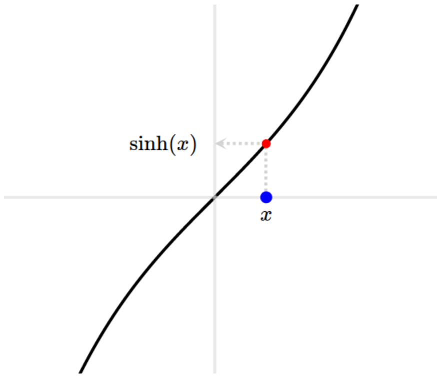
$$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}\,.$$

14.3.1 Dérivées

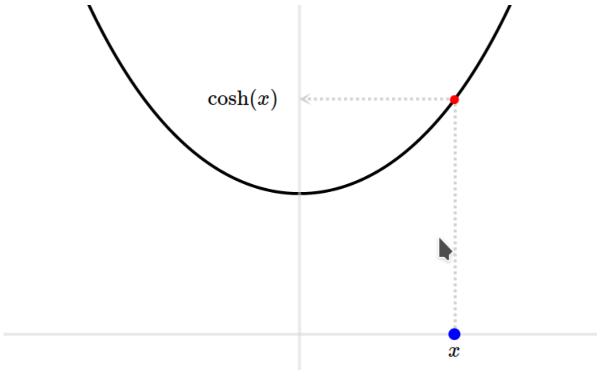
Puisque e^x est dérivable, les fonctions hyperboliques sont dérivables (et continues) sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned}(\sinh(x))' &= \cosh(x)\\ (\cosh(x))' &= \sinh(x)\\ (\tanh(x))' &= 1-\tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}\end{aligned}$$

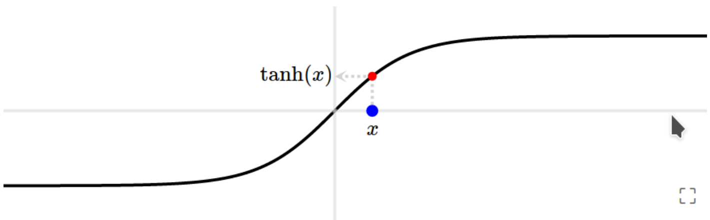
Par conséquent, $\sinh(x)$ est strictement croissante,



$\cosh(x)$ est décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$,



et $\tanh(x)$ est strictement croissante :



14.3.2 Propriétés

Théorème 14.13. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y)\\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)\\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}\end{aligned}$$

Preuve: (exercice) □

En prenant $y = x$, on a les formules

$$\begin{aligned}\sinh(2x) &= 2\sinh(x)\cosh(x),\\ \cosh(2x) &= 2\cosh^2(x) - 1 = 1 + 2\sinh^2(x)\\ \tanh(2x) &= \frac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}\end{aligned}$$

14.3.3 Réciproques

Comme $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, continue, et puisque

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = +\infty\,,$$

on en déduit qu'elle est bijective.
Sa réciproque se note

$$\begin{aligned}\operatorname{argsinh} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \operatorname{argsinh}(x)\end{aligned}$$

À l'aide de la formule pour la dérivée d'une fonction réciproque,

$$\begin{aligned}\operatorname{argsinh}'(x) &= \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsinh}(x))}\\ &= \frac{1}{\sinh'(\operatorname{argsinh}(x))}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{argsinh}(x))}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.\end{aligned}$$

On peut en fait exprimer cette réciproque explicitement :

Lemme 30. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\operatorname{argsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})\,.$$

Preuve: Puisque $\sinh$ est impaire, il suffit de fixer $y \geqslant 0$, et de chercher l'unique x tel que $\sinh(x) = y$. En posant $t = e^x$, cette condition devient

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{t - 1/t}{2} = y\,,$$

qui est équivalente à

$$t^2 - 2yt - 1 = 0\,.$$

Puisque le discriminant de cette équation est $\Delta = 4(y^2+1) > 0$, elle possède une unique solution $t \geqslant 1$, donnée par

$$t = \frac{2y + \sqrt{\Delta}}{2} = y + \sqrt{1+y^2}\,.$$

On obtient $x = \log(t) = \log(y + \sqrt{1+y^2}) \geqslant 0$. □

Ensuite, puisque $\cosh$ est paire, on doit restreindre son domaine si on veut la rendre injective. Comme elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\cosh : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est injective. De plus, comme $\cosh(0) = 1$ et

$$\lim_{x \to +\infty} \cosh(x) = +\infty\,,$$

on conclut que $\cosh : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty]$ est bijective.

Sa réciproque se note

$$\begin{aligned} \operatorname{argcosh} : [1, +\infty[&\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \operatorname{argcosh}(x) \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x > 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{argcosh}'(x) &= \frac{1}{\sinh(\operatorname{argcosh}(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh(\operatorname{argcosh}(x))^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,. \end{aligned}$$

On peut aussi exprimer explicitement la réciproque : pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\operatorname{argcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})\,.$$

Finalement, $\tanh$ étant strictement croissante, continue, et puisque

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = +1\,,$$

on en conclut que $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est bijective.

Sa réciproque se note

$$\begin{aligned} \operatorname{argtanh} :]-1, 1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{argtanh}(x)\,, \end{aligned}$$

avec

$$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2} \log\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)\,.$$

14.3.4 Origine du terme “hyperbolique”

(en construction)