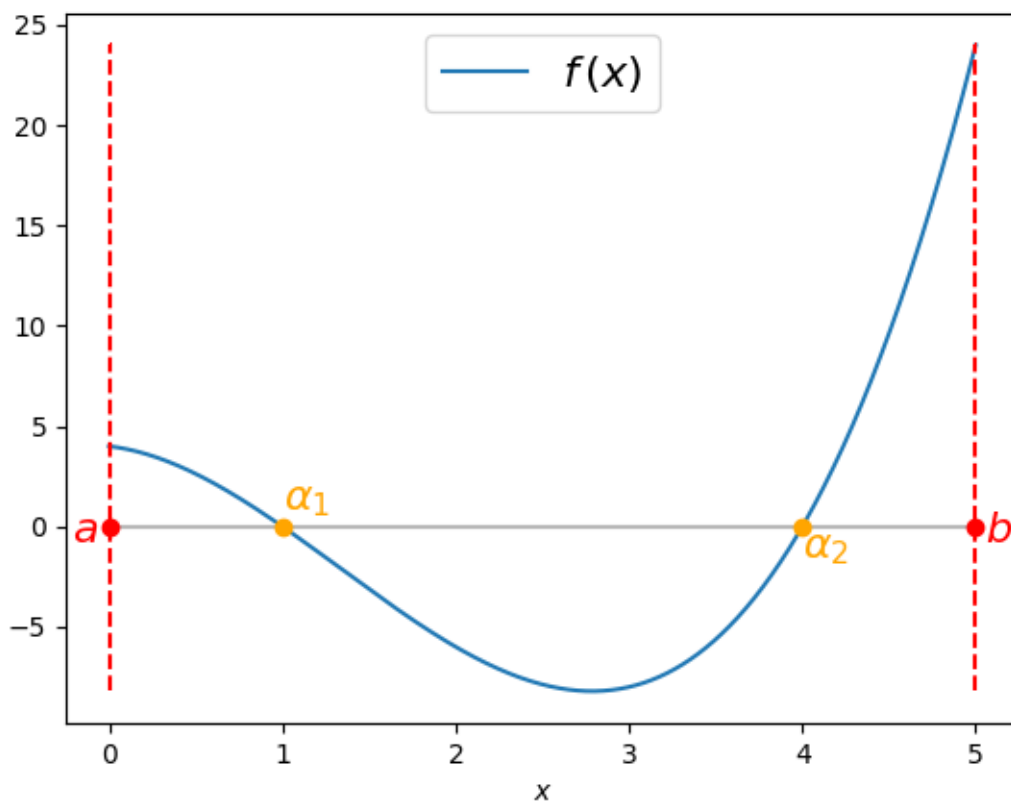

Chapitre 3

Résolution des équations non linéaires

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose de déterminer, **de manière approchée**, la ou les **racine(s)** (**zéro(s)**) d'une fonction continue. Autrement dit, soit une fonction continue $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on cherche à déterminer la (ou les) valeur(s) $\alpha \in I$ telle(s) que

$$f(\alpha) = 0.$$



Définition 3.1. Un nombre α tel que $f(\alpha) = 0$ est un **zéro** (ou une **racine**) de la fonction f .

3.2. Exemple : l'équation de Kepler

L'idée consiste à envisager une **méthode itérative** permettant de construire une **suite** $\{x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$. Le premier élément de la suite, x_0 , peut par exemple être une approximation obtenue visuellement en représentant la fonction f .

En pratique, numériquement, il est impossible d'effectuer une infinité d'itérations. La méthode fournira donc une **solution approchée obtenue** après un nombre **fini** d'itérations.

Définition 3.2. On dit qu'une telle suite $\{x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, **converge avec un ordre** $p \geq 1$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^p, \forall k \geq k_0, \text{ où } k_0 \geq 0 \text{ est un entier.}$$

Remarquons que si $p = 1$, il faut que $C < 1$ pour que x_k converge vers α .

La différence entre la **solution approchée** x_k **obtenue** après un nombre **fini** k d'itérations et la racine α représente l'**erreur numérique** e_k . Cette erreur numérique est la somme des erreurs de **troncature** et d'**arrondi**.

Définition 3.3. L'**erreur numérique (absolue)**, notée e_k ou $e_{k,\text{abs}}$, est définie par

$$e_k = |x_k - \alpha|.$$

Définition 3.4. L'**erreur numérique relative** est définie par

$$e_{k,\text{rel}} = \frac{|x_k - \alpha|}{|\alpha|}, \text{ si } \alpha \neq 0.$$

3.2 Exemple : l'équation de Kepler



La position angulaire d'une planète (ou d'une comète) se déplaçant autour du Soleil sur une orbite elliptique et le temps sont reliés par une équation appelée **équation de Kepler** :

$$M = E - e \sin E,$$

où M est l'anomalie moyenne (liée au temps), E est l'anomalie excentrique (liée à la position angulaire), et e est l'excentricité de la trajectoire. Une animation permettant de comprendre ce que sont les anomalies moyenne et excentrique peut être trouvée [ici](#).

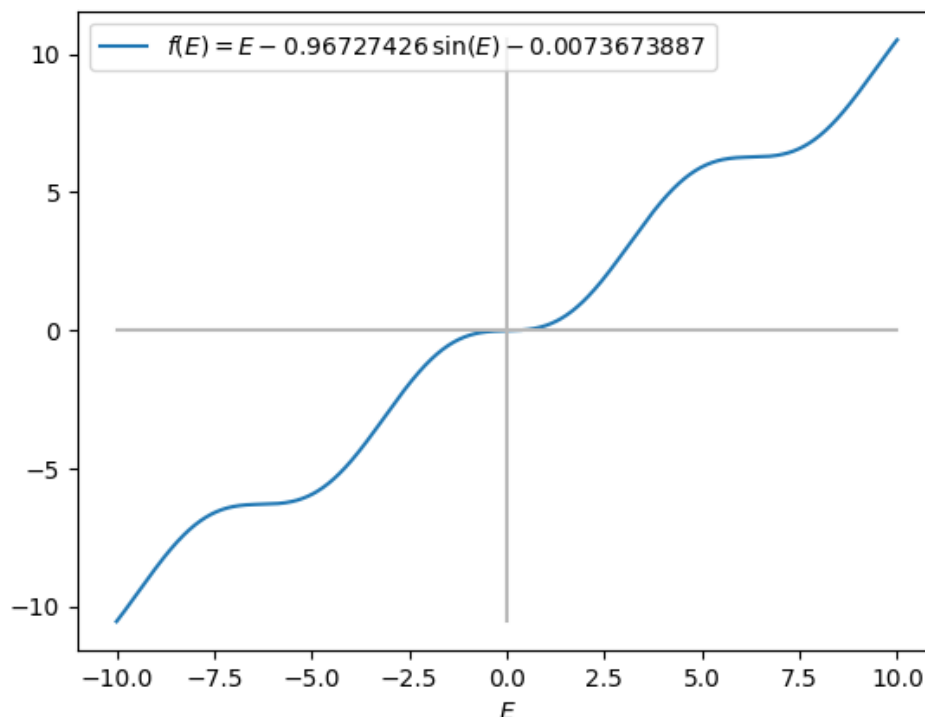
Connaissant la valeur de M et de e , l'équation permet de déterminer E , c'est-à-dire la position angulaire du corps autour du Soleil. Ainsi, la position de la comète de Halley lors de sa rencontre avec la sonde Giotto en 1986 a pu être déterminée en résolvant l'équation

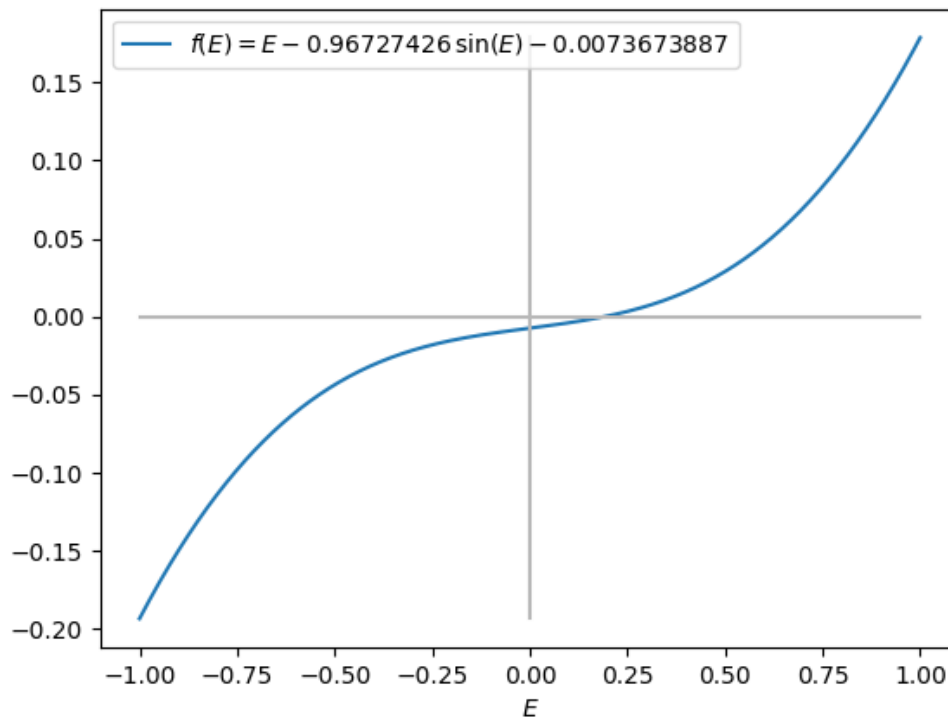
$$0.0073673887 = E - 0.96727426 \sin E ,$$

que l'on peut évidemment également mettre sous la forme

$$f(E) = E - 0.96727426 \sin E - 0.0073673887 = 0 .$$

Cette équation est **non linéaire** et ne possède **pas de solution analytique**. Pour l'étudier, on peut commencer par représenter graphiquement la fonction $f(E)$. Comme le montrent les deux représentations suivantes, on constate ainsi visuellement que l'équation possède une seule solution et, en choisissant au mieux l'intervalle représenté, il est possible d'obtenir une première approximation "visuelle" de cette racine.





Les méthodes numériques décrites ci-dessous vont nous permettre d'affiner notre approche et de déterminer précisément la valeur de la racine cherchée.

3.3 Méthode de dichotomie (ou méthode de la bisection)

Le mot **dichotomie** vient du grec *dikhotomia* qui signifie “division en deux parties”. Une **méthode de dichotomie** est une méthode dans laquelle **on met en “opposition” deux sous-intervalles**.

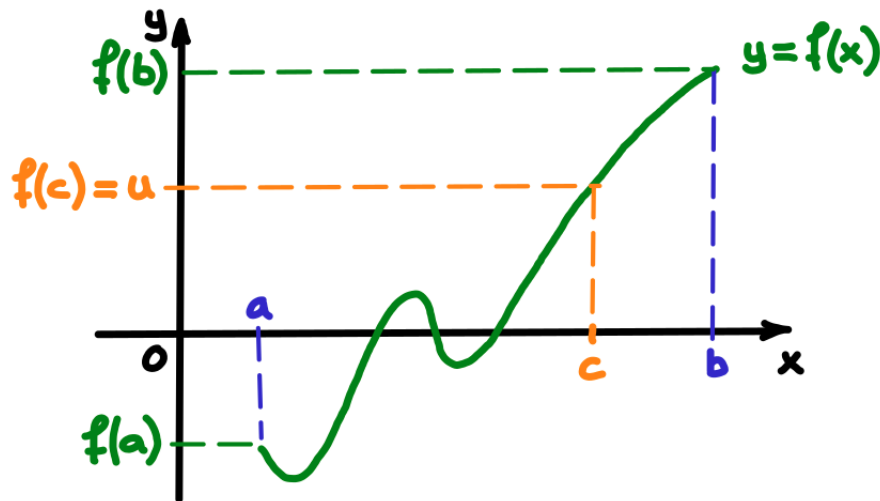
Dans la méthode de la bisection, à chaque itération, on est amené à choisir entre deux sous-intervalles. Ce choix se base sur le **théorème de Bolzano** qui est un cas particulier du **théorème des valeurs intermédiaires**.

3.3.1 Théorèmes des valeurs intermédiaires et de Bolzano

Théorème 3.5. (Théorème des valeurs intermédiaires).

Soit une fonction **continue** $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, soit $u \in \mathbb{R}$, u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors

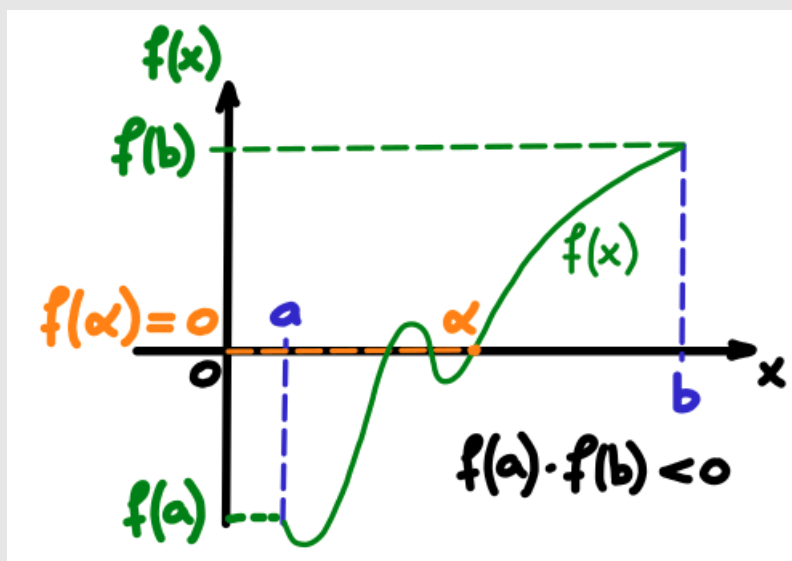
$$\exists c \in \mathbb{R}, c \in]a, b[\text{ tel que } f(c) = u.$$



Théorème 3.6. (Théorème de Bolzano).

Soit une fonction **continue** $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si $f(a)f(b) < 0$, alors

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in]a, b[\text{ tel que } f(\alpha) = 0.$$



Le théorème de Bolzano a été appelé **théorème de la valeur intermédiaire** en Analyse I au semestre d'automne.

3.3.2 Méthode de la bisection

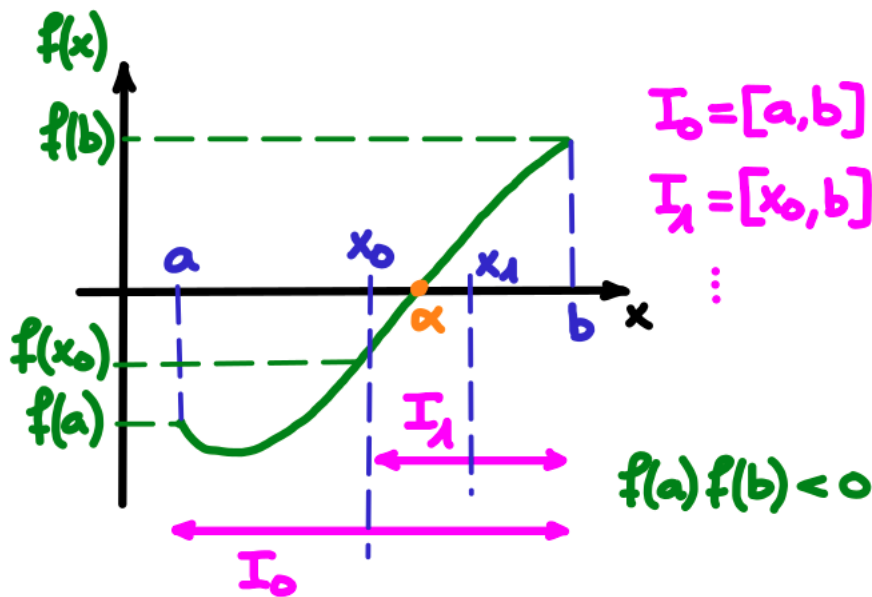
Dans la **méthode de la bisection**, on commence par s'assurer que l'hypothèse $f(a)f(b) < 0$ du théorème de Bolzano est bien vérifiée pour l'intervalle de départ $I_0 = [a, b]$ considéré. On sait alors que I_0 contient une racine α . On choisit de prendre comme première approximation de cette racine le **point milieu** de I_0 , c'est-à-dire le point

$$x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Si $f(x_0) = 0$, on a trouvé une racine de f . Sinon, on choisit parmi les **deux sous-intervalles (identiques)** définis par a, x_0 et b , celui qui contient nécessairement une racine :

- Si $f(a)f(x_0) < 0$, on considère comme nouvel intervalle **le sous-intervalle** $I_1 = [a, x_0]$. Ce dernier contient en effet nécessairement un zéro de f par le théorème de Bolzano.
- Sinon, c'est-à-dire si $f(a)f(x_0) > 0$, on considère comme nouvel intervalle **le sous-intervalle** $I_1 = [x_0, b]$. Ce dernier contient en effet nécessairement un zéro de f par le théorème de Bolzano car on doit avoir $f(x_0)f(b) < 0$.

On itère alors en prenant comme nouvelle approximation de α le milieu de I_1 . Et ainsi de suite. La figure suivante permet de visualiser concrètement les premières itérations de la méthode de la bisection :



3.3.3 Algorithme de la méthode de la bisection

- Choix d'un "bon" intervalle de départ $I_0 = [a, b]$ tel que $f(a)f(b) < 0$
 $\Rightarrow \exists$ (au moins) un zéro $\alpha \in]a, b[$.
- Construction d'une suite de sous-intervalles $I_k = [a_k, b_k]$, avec $I_k \subset I_{k-1}$, $k \geq 1$ et tels que $f(a_k)f(b_k) < 0$:
 - Initialisation : on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.
 - Pour $k \geq 0$:
 - si $f(x_k) = 0$, alors $\alpha = x_k$ et on s'arrête ;

- si $f(a_k)f(x_k) < 0$, on pose : $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$ et $x_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$, et on passe à l'itération suivante ;
- si $f(x_k)f(b_k) < 0$, on pose : $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$ et $x_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$, et on passe à l'itération suivante.
- On s'arrête ...
 - ... soit quand α est trouvé ;
 - ... soit quand **une condition d'arrêt** est remplie.

3.3.4 Condition d'arrêt et erreur commise

Dans la méthode de la bisection, la longueur des intervalles devient de plus en plus petite, $\lim_{k \rightarrow \infty} |b_k - a_k| = 0$, et les valeurs x_k fournissent des approximations de plus en plus précises de la racine α . Souvent, on termine la méthode quand l'intervalle considéré à une étape m est plus petit qu'une certaine **tolérance (précision)** ε que l'on aimerait atteindre :

$$|x_m - \alpha| \leq |I_m| \leq \varepsilon ,$$

où $|I_m| \equiv |b_m - a_m|$ représente la longueur de l'intervalle I_m .

Intéressons-nous à **l'erreur absolue** commise à l'étape k en se souvenant qu'à chaque étape la longueur de l'intervalle est divisée par deux :

$$e_k = |x_k - \alpha| < \frac{1}{2} |b_k - a_k| = \frac{1}{2} \frac{1}{2^k} |b_0 - a_0| = \frac{1}{2^{k+1}} |b - a| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 .$$

Pour s'assurer que $e_k < \varepsilon$, avec ε **la tolérance souhaitée**, le nombre minimal d'itérations à effectuer est donc :

$$k_{\min} > \log_2 \left(\frac{|b - a|}{\varepsilon} \right) - 1 .$$

Dans cette expression, la fonction \log_2 est la fonction réciproque de la fonction puissance de 2.

Remarques :

- La méthode de la bisection **converge toujours**. En effet, on note que $\lim_{k \rightarrow \infty} |I_k| = 0$ et $\forall k \geq 0$, $x_k \in I_k$ et $\alpha \in I_k$. Par conséquent, on a bien $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$.
- La convergence est **lente** : il faut $\log_2(10) \cong 3.32$ itérations pour améliorer d'une décimale la précision. ($2^{3.32} \cong 10$)
- **On ne peut pas définir d'ordre de convergence** (l'erreur n'est pas réduite de façon monotone d'une itération à l'autre).
- Si la fonction f est **monotone** dans l'intervalle considéré, on n'a qu'un zéro dans cet intervalle.

Si la fonction f possède **plusieurs zéros** sur l'intervalle $[a, b]$, on commence souvent par découper $[a, b]$ en un certain nombre (suffisant) de sous-intervalles pour appliquer ensuite sélectivement la méthode de la bisection sur chacun des sous-intervalles intéressants, c'est-à-dire sur chaque sous-intervalles contenant un zéro par la condition de Bolzano. On appelle cette technique **méthode de la bisection par intervalles**. Nous allons l'utiliser dans l'exercice 1 de la série 15.

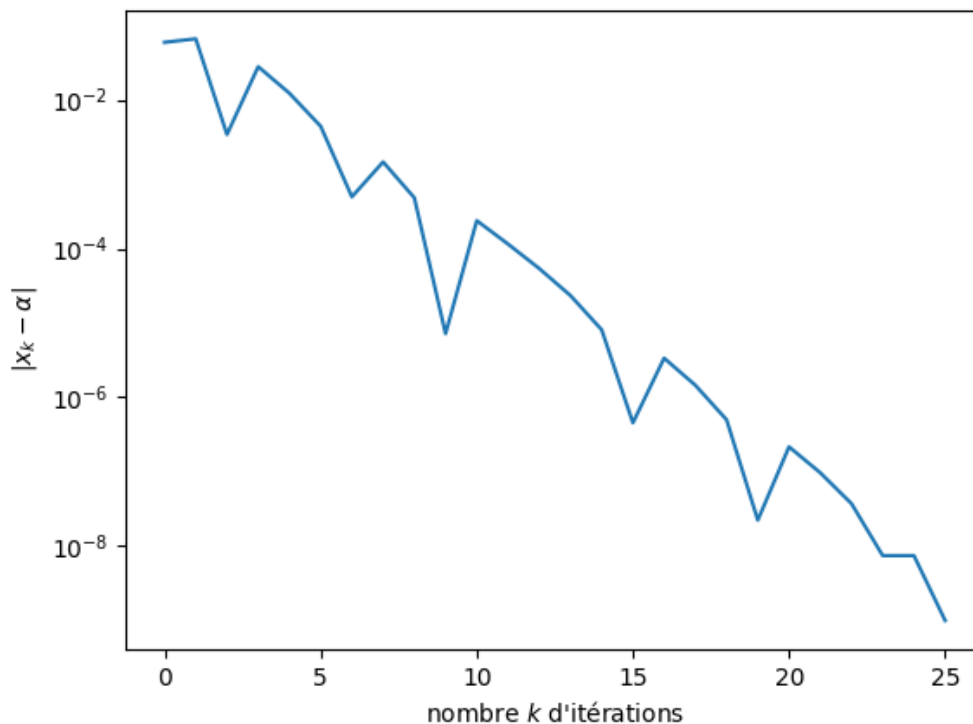
3.3.5 Exemple : résolution de l'équation de Kepler

Le code Python suivant permet de résoudre l'équation de Kepler avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-8}$ à l'aide de la méthode de la bisection :

```
1  import numpy as np
2
3  def f(E):
4      return E - 0.96727426*np.sin(E) - 0.0073673887
5
6  a = 0
7  b = 0.5
8  eps = 1e-8
9
10  compteur_iterations = 0
11
12  point_milieu = (a + b)/2
13
14  if f(a)*f(b) >= 0:
15      print("L'intervalle [a,b] n'est pas approprié !")
16  else:
17      while (b - a)/2 > eps:
18          if f(a)*f(point_milieu) < 0:
19              a = a
20              b = point_milieu
21              point_milieu = (a + b)/2
22              compteur_iterations += 1
23          elif f(point_milieu)*f(b) < 0:
24              a = point_milieu
25              b = b
26              point_milieu = (a + b)/2
27              compteur_iterations += 1
28          elif f(point_milieu) == 0:
29              print('La solution obtenue est exacte !')
30              break
31          else:
32              print("Le zéro n'a pas pu être approché.")
33              break
34
35  print(f"L'approximation de la racine cherchée est alpha =
36  ↪ {point_milieu}.")
37  print(f"Elle a été obtenue après {compteur_iterations}
38  ↪ itérations.")
```


- 1 L'approximation de la racine cherchée est $\alpha =$
 $\rightarrow 0.19091079384088516$.
- 2 Elle a été obtenue après 25 itérations.

En représentant l'écart $|x_k - \alpha|$ entre solution approchée et solution exacte en fonction du nombre k d'itérations, on constate, sans surprise, que l'erreur n'est pas réduite de façon monotone d'une itération à l'autre. On ne peut donc effectivement pas définir d'ordre de convergence pour la méthode de la bisection.



Remarquons que, comme la solution exacte n'est pas connue, cette représentation a été obtenue en posant $\alpha = x_{25}$.

3.4 Méthodes de la sécante, de la corde, et de Newton

La méthode de la bisection est simple, mais ne garantit pas une réduction **monotone** de l'erreur d'une itération à l'autre. Pour obtenir des méthodes plus performantes, il est nécessaire de prendre davantage en compte les valeurs de la fonction f , voire de considérer leur évolution par l'intermédiaire de la dérivée f' (si f est différentiable) ou par une approximation de cette dernière.

3.4.1 Développements limités et formule de Taylor

Il peut être utile de savoir approximer une fonction telle que \sin ou \cos par des polynômes. C'est ce qui a été fait en Analyse I au semestre d'automne en remplaçant par exemple $\sin(x)$

par sa fonction infiniment petite équivalente (IPE) x au voisinage de $x = 0$: $\sin(x) \sim x$ au voisinage de $x = 0$. Durant le semestre de printemps, en Analyse II, vous allez poursuivre cette approche et obtenir le résultat important suivant (voir polycopié d'Analyse II, en page 66 et suivantes) :

Théorème 3.7. (Théorème de Taylor ou Formule de Taylor).

Soient un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, un élément $a \in I$, ainsi qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathcal{R}$ continuellement dérivable en a jusqu'à un certain ordre $(n + 1)$.

Alors pour tout nombre réel $x \in I$, on peut écrire le **développement limité de f à l'ordre n autour de a** :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \end{aligned}$$

où ξ est un nombre réel strictement compris entre a et x .

Dans le développement ci-dessus, chaque terme fait intervenir la dérivée, à un certain ordre k , évaluée en a , de la fonction f :

$$f^{(k)}(a) \equiv \frac{d^k}{dx^k} f(a).$$

La somme

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

est appelée **polynôme de Taylor** de la fonction f à l'ordre n autour de a . On retrouve l'IPE de f en ne prenant que les premiers termes non nuls et non constants de cette somme.

Exemple 3.8. Développement de Taylor de $f(x) = \sin(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de $a = 0$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cos(\xi),$$

où ξ est compris entre 0 et x . Le dernier terme correspond au reste (c'est-à-dire à l'erreur commise si on s'arrête à l'ordre 3). Par conséquent, en écrivant

$$\sin(x) \cong x - \frac{x^3}{3!},$$

l'erreur commise est d'au plus

$$\frac{x^5}{5!} \cdot 1 = \frac{x^5}{120}.$$

On note que le développement polynomial de $f(x) = \sin(x)$ ne fait intervenir que des puissances impaires de x , ce qui est cohérent avec le fait que le sinus est une fonction impaire. \diamond

3.4.2 Développement au premier ordre

Les méthodes de la sécante, de la corde et de Newton que nous allons discuter ci-dessous exploitent le développement limité **au premier ordre** de la fonction f . Ecrivons le polynôme de Taylor au premier ordre au voisinage d'un point x_k (qui peut être la k ème approximation de la racine cherchée) :

$$y(x) = f(x_k) + \frac{f'(x_k)}{1!}(x - x_k).$$

Cette fonction y est la tangente à la fonction f au point x_k . En considérant cette fonction y comme une approximation de f , il est naturel de chercher la racine de y et de la voir comme une approximation de la racine de f . En appelant x_{k+1} cette racine de y , il vient

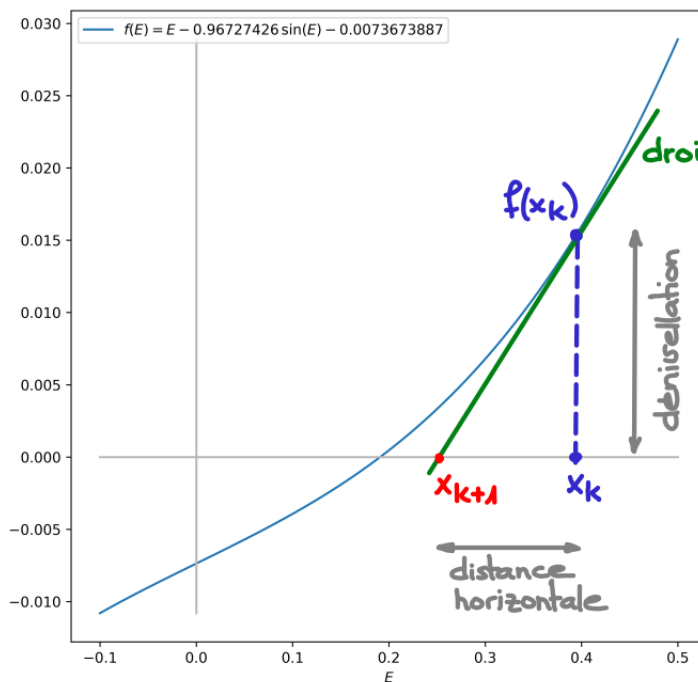
$$\begin{aligned} y(x_{k+1}) &= f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cette approche suggère la **méthode itérative** suivante :

$\forall k \geq 0$, étant donné x_k , déterminer x_{k+1} en résolvant l'équation

$$f(x_k) + q_k(x_{k+1} - x_k) = 0 \Leftrightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k},$$

où q_k est la dérivée $f'(x_k)$ de f évaluée en x_k ou une approximation de cette dernière. On est donc amené à chercher l'intersection x_{k+1} entre l'axe des x et la droite de pente q_k passant par le point $(x_k, f(x_k))$:



droite de pente q_k
 $y(x) = f(x_k) + q_k(x - x_k)$

$$\begin{aligned} y(x_{k+1}) &= f(x_k) + q_k(x_{k+1} - x_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}$$

$$q_k = \text{"pente"} = \frac{\text{"dénivellation"}}{\text{"distance horizontale"}} = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}.$$

Dans ce qui suit, nous allons considérer **trois choix particuliers** pour la pente q_k .

3.4.3 Méthode de la sécante

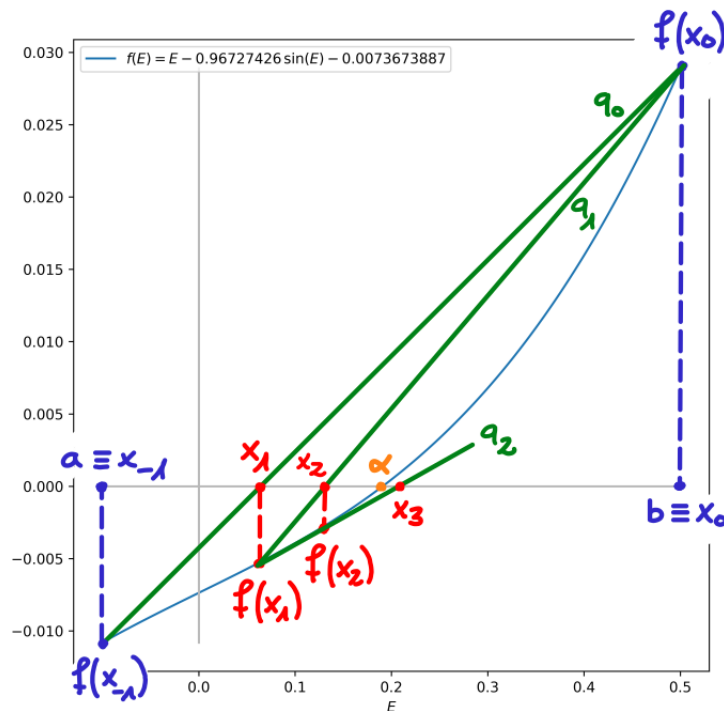
Dans la méthode de la sécante, on se donne **deux valeurs initiales** x_{-1} et x_0 qui peuvent, par exemple, être les bornes a et b de l'intervalle $[a, b]$ dans lequel on cherche une racine de f . On pose alors

$$q_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \quad \forall k \geq 0.$$

On a ainsi

$$x_{k+1} = x_k - \underbrace{\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}_{=q_k^{-1}} f(x_k), \quad \forall k \geq 0.$$

Premières étapes de la méthode de la sécante :



Les éléments de la suite $\{x_k\}$ produite par la méthode de la sécante peuvent sortir de l'intervalle $[a, b]$ et même **diverger**. Toutefois, on peut montrer le résultat de convergence local suivant :

Théorème 3.9. Si $f \in C^2(J)$, où J est un voisinage de α , et si $f'(\alpha) \neq 0$, et si $x_{-1}, x_0 \in J$ sont "assez proches" de α , l'ordre de convergence vers α pour la méthode de la sécante est

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1.618 \text{ (nombre d'or).}$$

Définition 3.10. Un **voisinage d'un point** est ici une partie de \mathbb{R} qui contient un intervalle ouvert qui comprend ce point.

Définition 3.11. La notation $f \in \mathcal{C}^n(J)$ signifie que la fonction f est n fois **continûment dérivable** dans le voisinage J , c'est-à-dire que les dérivées $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ existent et sont continues sur J .

Remarque 3.12. Le zéro α est ici supposé être une **racine simple** de la fonction $f : f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$. \diamond

3.4.4 Méthode de la corde

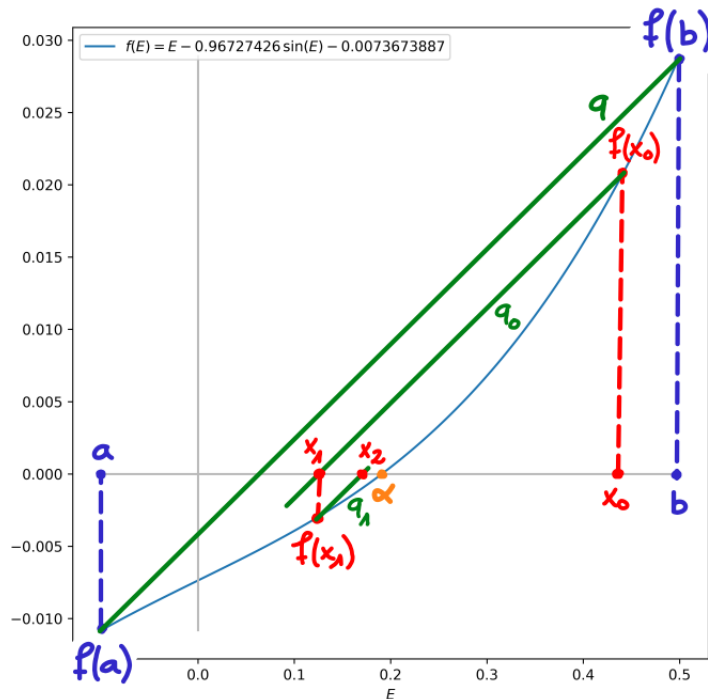
Dans la méthode de la corde, on se donne **une valeur initiale** x_0 et on utilise **la même pente** pendant tout le processus itératif en posant

$$q_k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \equiv q, \forall k \geq 0.$$

On a ainsi

$$x_{k+1} = x_k - \underbrace{\frac{b - a}{f(b) - f(a)}}_{=q_k^{-1} \equiv q^{-1}} f(x_k), \forall k \geq 0.$$

Premières étapes de la méthode de la corde :



pentés:

$$q_0 = q_1 = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On peut montrer que la suite $\{x_k\}$ converge avec un ordre de convergence $p = 1$.

3.4.5 Méthode de Newton

La méthode de Newton nécessite que $f \in \mathcal{C}^1(J)$. La fonction f doit donc être **une fois continûment dérivable** dans J , J étant un voisinage "suffisamment grand" contenant α . De plus,

3.5. Méthode de point fixe

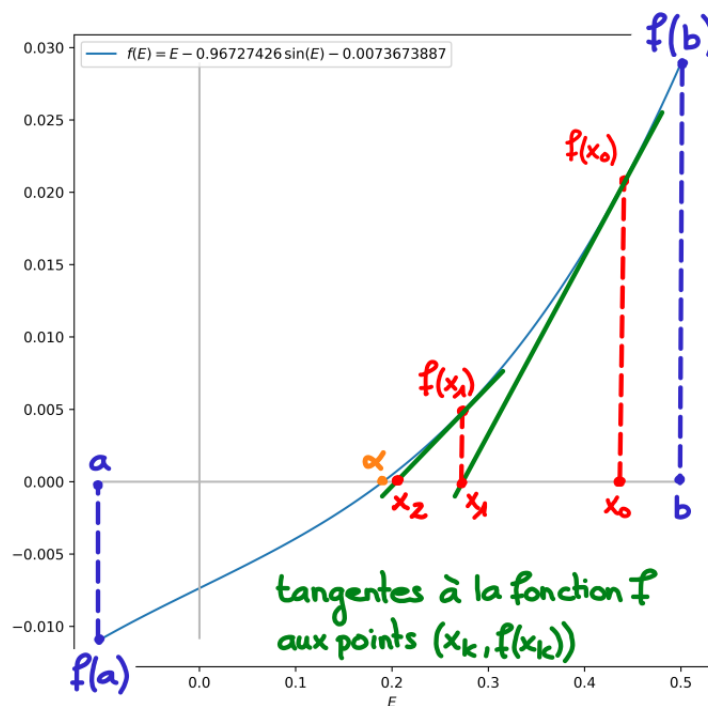
on suppose que $f'(\alpha) \neq 0$ (pour que la convergence soit optimale). Ces hypothèses étant vérifiées, on choisit une **“bonne” première approximation** x_0 de α et on pose

$$q_k = f'(x_k), \forall k \geq 0.$$

On a ainsi

$$x_{k+1} = x_k - \underbrace{\frac{1}{f'(x_k)}}_{=q_k^{-1}} f(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \forall k \geq 0.$$

Premières étapes de la méthode de Newton :



Géométriquement, x_{k+1} est l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des abscisses de la **tangente** au graphe de f passant par le point $(x_k, f(x_k))$. La méthode de Newton est d'ailleurs également appelée **méthode des tangentes** (ou encore **méthode de Newton-Raphson**).

On montrera plus bas que la suite $\{x_k\}$ converge avec un ordre de convergence $p = 2$. Remarquons que l'ordre de convergence de la méthode de Newton est $p = 1$ si $f'(\alpha) = 0$.

3.5 Méthode de point fixe

3.5.1 Transformation de l'équation non linéaire

Pour une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, il est toujours possible de transformer l'équation non linéaire à résoudre,

$$f(x) = 0,$$

en une **équation équivalente** ayant les mêmes solutions :

$$x - \Phi(x) = 0 ,$$

où $\Phi(x)$ est une **fonction auxiliaire** $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ choisie telle que

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \Phi(\alpha) .$$

La recherche des zéros de f se ramène donc à la recherche des **points fixes** de Φ .

Définition 3.13. Si $\beta \in \mathbb{R}$ est tel que $\Phi(\beta) = \beta$, on dit que β est un **point fixe** de Φ . Autrement dit, l'image de β par Φ est β lui-même.

Remarque 3.14. Pour une fonction f donnée, le choix de la fonction auxiliaire Φ n'est **pas unique**. Par exemple, on peut choisir

$$\Phi(x) = x + \lambda f(x) , \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} .$$

Démonstration. En effet, pour cet ensemble de fonctions auxiliaires, on a

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \Phi(\alpha) = \alpha + \lambda \underbrace{f(\alpha)}_{=0} = \alpha .$$

◇

En fait, toute fonction auxiliaire Φ de la forme

$$\Phi(x) = x + F(f(x)) ,$$

où F est une fonction continue telle que $F(0) = 0$, est une fonction auxiliaire possible.

Démonstration. En effet, pour cet ensemble de fonctions auxiliaires, on a

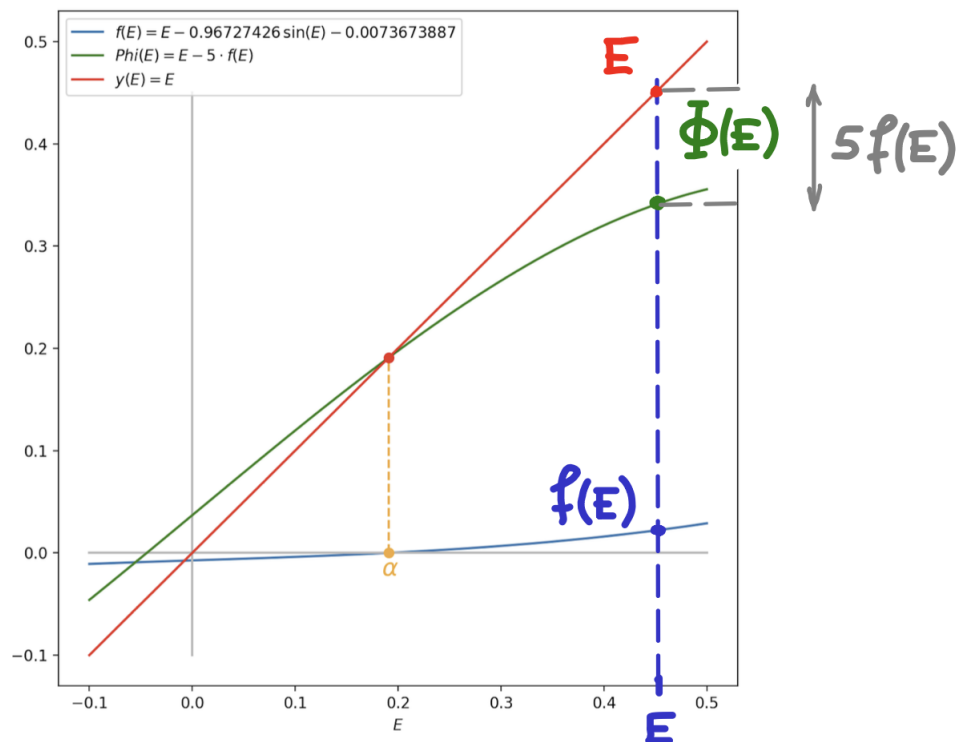
$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \Phi(\alpha) = \alpha + F(\underbrace{f(\alpha)}_{=0}) = \alpha + \underbrace{F(0)}_{=0} = \alpha .$$

◇

◇

En guise d'exemple, nous allons transformer le problème de Kepler. Il est par exemple possible de choisir

$$\Phi(E) = E - 5f(E) .$$



La racine de f et le point fixe de Φ sont bien identiques.

3.5.2 Méthode de point fixe

Graphiquement, la recherche des points fixes de Φ consiste à trouver la (ou les) intersection(s) entre la droite $y(x) = x$ et la fonction $y(x) = \Phi(x)$.

Dans la méthode de point fixe, le processus itératif revient à poser, étant donné un “bon” x_0 ,

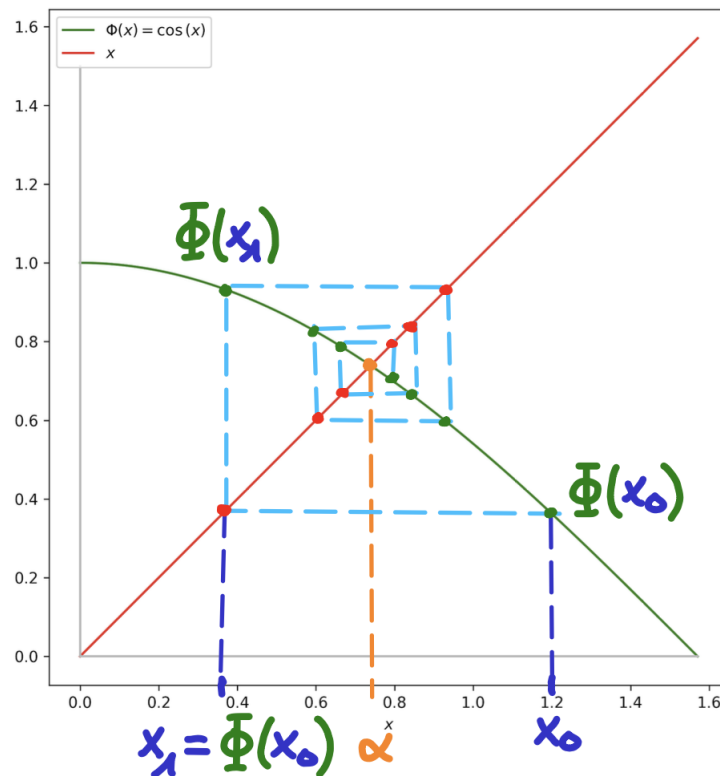
$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \forall k \geq 0.$$

Cette relation est une **itération de point fixe** appelée parfois **itération de Picard**, et Φ est connue sous le nom de **fonction d’itération**.

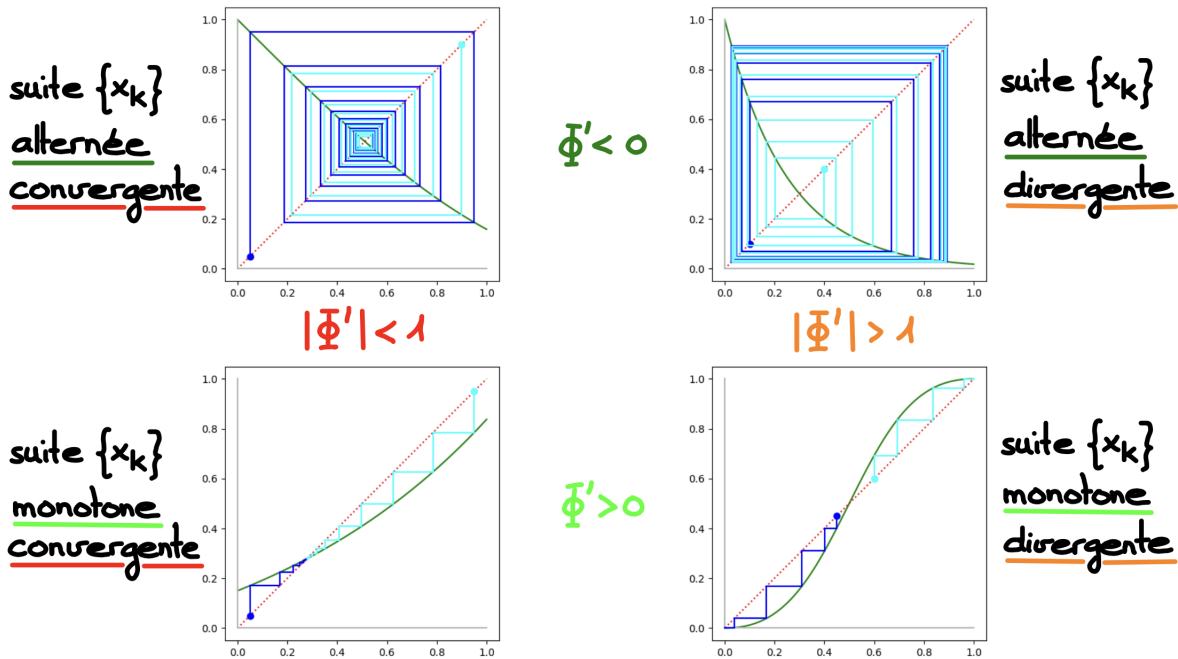
Premières étapes de la méthode pour la fonction d’itération $\Phi(x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1.2 \quad (\text{choix du point de départ de la méthode}) \\
x_1 &= \cos(x_0) = \cos(1.2) \cong 0.3624 \\
x_2 &= \cos(x_1) \cong \cos(0.3624) \cong 0.9351 \\
x_3 &= \cos(x_2) \cong \cos(0.9351) \cong 0.5938 \\
x_4 &= \cos(x_3) \cong \cos(0.5938) \cong 0.8288 \\
x_5 &= \cos(x_4) \cong \cos(0.8288) \cong 0.6757 \\
&\vdots \\
x_{20} &= \cos(x_{19}) \cong \cos(0.7388) \cong 0.7393 \\
&\vdots \\
x_{40} &= \cos(x_{39}) \cong \cos(0.7391) \cong 0.7391
\end{aligned}$$

Les toutes premières étapes sont représentées graphiquement ci-dessous :



Remarque 3.15. Comme le montrent certains des quatre exemples ci-dessous, la convergence de la méthode de point fixe n'est pas assurée. Elle dépend du choix de Φ et de x_0 . Application de la méthode de point fixe sur les fonctions $f(x) = 1 - \sin(x)$, $g(x) = \exp(-4x)$, $h(x) = 0.4 \exp(x) - 0.25$ et $i(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^2}$, dans l'intervalle $]0, 1[$:



◇

3.5.3 Existence d'un point fixe

Théorème 3.16. (existence d'un point fixe) Soit $\Phi \in \mathcal{C}^0([a, b])$, si $\forall x \in [a, b], \Phi(x) \in [a, b]$, Alors, Φ admet au moins un point fixe $\alpha \in [a, b]$.

Démonstration. Nous allons considérer la fonction auxiliaire continue $d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d(x) = \Phi(x) - x$, et nous intéresser au produit $d(a) \cdot d(b)$:

$$d(a) \cdot d(b) = \underbrace{(\Phi(a) - a)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(\Phi(b) - b)}_{\leq 0} \leq 0.$$

Par le théorème de Bolzano, il existe au moins un $\alpha \in [a, b]$ tel que $d(\alpha) = 0$ et $\Phi(\alpha) = \alpha$. □

3.5.4 Fonction contractante

Définition 3.17. Une fonction Φ est dite **contractante** (ou **K-contractante**) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ s'il existe un nombre réel K , $0 < K < 1$, tel que $\forall x, y \in I$

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq K|x - y|.$$

Remarquons qu'en exploitant le théorème des accroissements finis (formule de Taylor au premier ordre), il vient, en supposant $\Phi \in \mathcal{C}^1(I)$,

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)||x - y|,$$

avec ξ entre x et y . Par conséquent, on en déduit que si $|\Phi'(x)| < 1, \forall x \in I$, la fonction est K -contractante sur I .

3.5.5 Convergence des itérations de point fixe

Les résultats suivants précisent les conditions qui doivent être satisfaites pour que la méthode de point fixe converge.

Théorème 3.18. *Si la suite $\{x_k\}$ définie par la méthode de point fixe converge vers x et si Φ est continue, alors x est un point fixe de Φ .*

Démonstration.

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_k) = \Phi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \Phi(x).$$

On utilise successivement le fait que la suite converge, que x_{k+1} résulte d'une itération de point fixe, que Φ est continue, et (encore une fois) que la suite converge. \square

Théorème 3.19. (théorème d'Ostrowski) *Soit α un point fixe d'une fonction $\Phi \in \mathcal{C}^1(J)$, où J est un voisinage de α . Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel la suite $\{x_k\}$ converge vers α , pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| < \delta$.*

Théorème 3.20. *Soient x_0 et la suite $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $\forall k \geq 0$.*

Si

i) $\forall x \in [a, b]$, $\Phi(x) \in [a, b]$,

ii) $\Phi \in \mathcal{C}^1([a, b])$,

iii) $\exists K < 1$ tel que $|\Phi'(x)| < K \forall x \in [a, b]$,

Alors Φ a un unique point fixe α dans $[a, b]$ et la suite $\{x_k\}$ converge vers α pour tout choix de $x_0 \in [a, b]$.

De plus, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha).$$

*C'est un résultat de **convergence globale** : la suite converge vers α avec un ordre 1 pour tout $x_0 \in [a, b]$.*

Démonstration. Comme la fonction d'itération est continue et vérifie l'hypothèse i), cette dernière admet au moins un point fixe dans $[a, b]$ (voir la sous-section précédente).

Pour montrer l'unicité du point fixe, on va supposer qu'il existe deux valeurs α_1 et α_2 dans $[a, b]$ qui vérifient $\Phi(\alpha_1) = \alpha_1$ et $\Phi(\alpha_2) = \alpha_2$. La formule de Taylor à l'ordre 0 (c'est-à-dire le théorème des accroissements finis) et l'hypothèse de contraction iii) permettent alors d'écrire

$$|\alpha_2 - \alpha_1| = |\Phi(\alpha_2) - \Phi(\alpha_1)| = |\Phi'(\xi)(\alpha_2 - \alpha_1)| \leq K|\alpha_2 - \alpha_1| < |\alpha_2 - \alpha_1|,$$

où $\xi \in]\alpha_1, \alpha_2[$. On conclut que $\alpha_1 = \alpha_2$.

L'étude de la convergence de la suite $\{x_k\}$ peut également se faire à partir de la formule de Taylor. En effet, $\forall k \geq 0$, on peut écrire

$$x_{k+1} - \alpha = \Phi(x_k) - \Phi(\alpha) = \Phi'(\xi_k)(x_k - \alpha),$$

avec ξ_k compris entre x_k et α . Il vient ainsi,

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\Phi'(\xi_k)| |x_k - \alpha| \leq K |x_k - \alpha| \leq K^{k+1} |x_0 - \alpha|.$$

Or, $\lim_{k \rightarrow \infty} K^{k+1} |x_0 - \alpha| = 0$ et on conclut que x_k converge vers α .

En reprenant l'égalité $x_{k+1} - \alpha = \Phi'(\xi_k)(x_k - \alpha)$ à la lumière de cette convergence, on termine la preuve :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi'(\xi_k) = \Phi'(\alpha).$$

□

3.5.6 Convergence de la méthode de Newton

La **méthode de Newton**,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \equiv \Phi_N(x_k),$$

est une **méthode de point fixe** ayant pour **fonction d'itération** la fonction

$$\Phi_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On note que la dérivée de cette fonction d'itération s'annule au point correspondant à la racine α de f : $\Phi'_N(\alpha) = 0$. En effet,

$$\Phi'_N(x) = 1 - (f(x)f'(x)^{-1})' = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

et on a donc $\Phi'_N(\alpha) = 0$ car $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$. Ainsi, $|\Phi'_N(\alpha)| < 1$, et la méthode **converge**. De plus, en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de α , il vient

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \alpha &= \Phi_N(x_k) - \Phi_N(\alpha) \\ &= \left[\Phi_N(\alpha) + \Phi'_N(\alpha)(x_k - \alpha) + \frac{\Phi''_N(\xi)(x_k - \alpha)^2}{2!} \right] \\ &\quad - \Phi_N(\alpha). \end{aligned}$$

Comme $\Phi'_N(\alpha) = 0$, on obtient finalement

$$x_{k+1} - \alpha = \Phi_N(x_k) - \Phi_N(\alpha) = \frac{\Phi''_N(\xi)(x_k - \alpha)^2}{2!}.$$

Ainsi,

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C |x_k - \alpha|^2,$$

où

$$C = \max_{\text{voisinage de } \alpha} \left| \frac{\Phi''_N(x)}{2} \right|.$$

La convergence de la méthode de Newton est donc bien **quadratique** ($p = 2$).

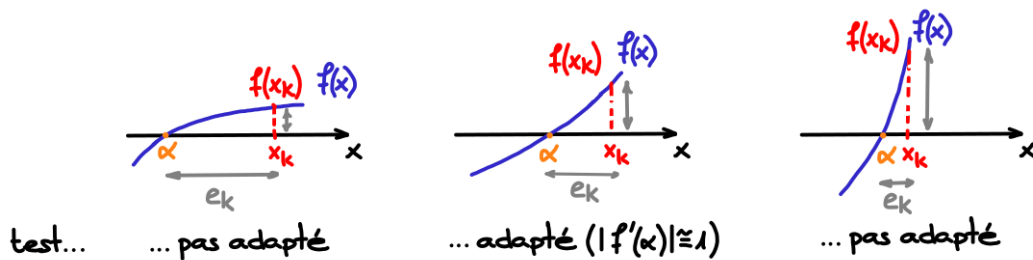
3.6 Critères d'arrêt

Supposons que $\{x_k\}$ soit une suite qui converge vers un zéro α d'une fonction f . On a le choix entre deux types de critères d'arrêt pour interrompre le processus itératif :

1. **Contrôle du résidu** On parle ici de résidu car $f(\alpha) = 0$.

Le processus itératif est arrêté dès que $|f(x_k)| < \varepsilon$, où ε est la tolérance fixée.

Ce test donne une bonne indication de l'erreur commise lorsque $|f'(\alpha)| \cong 1$, c'est-à-dire lorsque la fonction varie de manière plus ou moins identique en abscisse et en ordonnée dans un voisinage de α : on a alors $|x_k - \alpha| \cong \varepsilon$.



2. **Contrôle de l'incrément** Le processus itératif est arrêté dès que $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

Remarquons que dans le cas d'une méthode de point fixe avec une fonction d'itération $\Phi(x)$ ce test n'est pas satisfaisant si $\Phi'(\alpha)$ est proche de 1.

Démonstration. En effet, en exploitant le théorème des accroissements finis, c'est-à-dire la formule de Taylor à l'ordre zéro, il vient

$$x_{k+1} - \alpha = \Phi(x_k) - \Phi(\alpha) = \Phi'(\xi)(x_k - \alpha),$$

avec ξ entre x_k et α . Or,

$$\begin{aligned} x_k - \alpha &= (x_{k+1} - \alpha) + (x_k - x_{k+1}) \\ &= \Phi'(\xi)(x_k - \alpha) + (x_k - x_{k+1}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$x_k - \alpha = \frac{1}{1 - \Phi'(\xi)}(x_k - x_{k+1}).$$

Dans le cas où $\Phi'(\alpha)$ est proche de 1, un incrément petit ne permet pas d'assurer que les valeurs de la suite sont proches de la racine cherchée. \square

