

Ex-14-01: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $L > 0$. Montrer :

- 1) Si f est paire, alors $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$.
- 2) Si f est impaire, alors $\int_{-L}^L f(x) dx = 0$.

Ex-14-02: Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

- 1) $\int x^2 \cos(x) dx$
- 2) $\int e^{ax} \cos(bx) dx, (a \neq 0)$
- 3) $\int \arcsin(x) dx (-1 < x < 1)$
- 4) $\int \arctan(\sqrt{x}) dx$
- 5) $\int e^{\arccos(x)} dx$
- 6) $\int \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

Ex-14-03: Calculer les primitives des fonctions suivantes, en utilisant le changement de variable indiqué.

- 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, poser $x = \sin(u)$ ($x \in]-1, 1[$)
- 2) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, poser $x = \tan(u)$ ($x \in \mathbb{R}$)

Ex-14-04: Calculer les primitives suivantes :

- 1) $\int \frac{x+2}{\sqrt{3x+4}} dx (x > -\frac{4}{3})$
- 2) $\int \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} dx (x > 1)$
- 3) $\int |x| dx$
- 4) $\int \frac{\sqrt{x-4}}{x} dx (x > 4)$
- 5) $\int 2^{\log(x)} dx (x > 0)$

Ex-14-05: Calculer les primitives de fonctions rationnelles ci-dessous :

- 1) $\int \frac{x-2}{x^2+2x+2} dx$
- 2) $\int \frac{x-2}{x(x+1)^2} dx$
- 3) $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx$
- 4) $\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2} dx$
- 5) $\int \frac{2x^4+7x^3-4x^2-2x+1}{x^3+4x^2-1} dx$
- 6) $\int \frac{4x}{x^4-1} dx$
- 7) $\int \frac{1}{x^4+x^3+x^2+x} dx$
- 8) $\int \frac{1}{x^4+1} dx$

Ex-14-06: Calculer les sommes des séries convergentes suivantes.

- 1) $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(a+k)(a+1+k)}$, où $a > 0$.
- 2) $\sum_{n \geq 2} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$
- 4) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n+3)}$

Ex-14-07: Calculer, dans le cas $b > a^2$, l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + 2ax + b)}.$$

Ex-14-08: Étudier les intégrales généralisées ci-dessous.

- 1) $I = \int_{-\infty}^{\infty} x dx$
- 2) $I = \int_1^{\infty} \frac{\log(x)}{x^2} dx$
- 3) $I = \int_{1+}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$
- 4) $I = \int_0^{\infty} \sin(x) e^{-x} dx$
- 5) $I = \int_{0+}^{\infty} e^{-x}(1-x) \log(x) dx$
- 6) $I = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

Ex-14-09: Utiliser des comparaisons pour étudier la convergence/divergence des intégrales généralisées ci-dessous.

- 1) $\int_1^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$
- 2) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x^8} + 2} dx$
- 3) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^7+1}} dx$
- 4) $\int_{0+}^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$
- 5) $\int_{2+}^{5-} \frac{1}{\sqrt{7x-10-x^2}} dx$
- 6) $\int_0^{\infty} \frac{1}{2 + \cosh(x)} dx$

Ex-14-10: Calculer la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log(1 + \varepsilon) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} dx.$$

Ex-14-11: La **fonction Gamma**, $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, est définie par

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx.$$

- 1) Montrer que $\Gamma(z)$ est bien défini pour tout $z > 0$.
- 2) Calculer $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$.
- 3) Montrer que pour tout $z > 0$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
- 4) Conclure que sur les entiers, $\Gamma(n) = (n-1)!$ (factorielle de $n-1$).

Ex-14-12: Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre $\Phi(x)$ ci-dessous est bien défini :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Remarque -1.2. En théorie des probabilités (et statistiques), $\Phi(x)$ est appelée la **fonction de répartition** (lien web) de la variable aléatoire Gaussienne de distribution $\mathcal{N}(0, 1)$. \diamond

Ex-14-13: Étudier la convergence de la série en fonction du paramètre $\beta > 0$.

$$\sum_{n \geq 27} \frac{1}{n \log(n) (\log(\log(n)))^\beta},$$

Ex-14-14:

1) Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\log(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \log(n) + 1$$

2) Calculer la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log(n)}$$

3) Estimer l'entier N à partir duquel la somme partielle de la série harmonique, s_n , dépasse le seuil $M = 50$.

Ex-14-15: Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}$$