Ex-13-01: Trouver les trois premiers termes de la série de Mac-Laurin des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
2) $f(x) = \tan(x)$
3) $f(x) = \arctan(x)$
4) $f(x) = \sqrt{1+\tan(x)}$

Ex-13-02: Donner les 5 premiers termes (non nuls) du développement de Taylor de $f(x) = \sin(x)$ autour de $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Ex-13-03: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

1) Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
2) Calculer la série de MacLaurin de f (en $x_0 = 0$), ainsi que son rayon de convergence.
3) Que concluez vous ?

Ex-13-04: En s'aidant de séries de MacLaurin connues, donner la valeur de la somme de chacune des séries ci-dessous.

1) $\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} \cdots$
2) $1 - \dfrac{\pi^2}{2!} + \dfrac{\pi^4}{4!} - \dfrac{\pi^6}{6!} + \dfrac{\pi^8}{8!} \cdots$
3) $\dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} + \dfrac{1}{7!} + \dfrac{1}{9!} \cdots$
4) $\dfrac{1}{2^3} - \dfrac{1}{3\cdot 2^3} + \dfrac{1}{4\cdot 2^4} - \dfrac{1}{5\cdot 2^5} \cdots$

Ex-13-05:

1) Montrer que $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

n'est pas intégrable.

2) Montrer que la fonction $f\colon\ : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0\,, \\ C & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est intégrable, et calculer $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Ex-13-06: Calculer les primitives ci-dessous, à l'aide de primitives déjà connues.

1) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx$
2) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\,dx$
3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{\sinh(x)}{e^x+1}\,dx$

Ex-13-07: Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables. Montrer que si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Ex-13-08: Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue, telle que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Montrer que f est la fonction identiquement nulle : $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

Ex-13-09: Soient $a < c < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} H_1 & \text{si } a \leqslant x \leqslant c\,, \\ H_2 & \text{si } c < x \leqslant b\,, \end{cases}$$

où H_1, H_2 sont deux constantes.

1) Calculer $\overline{f}$ (valeur moyenne de f sur $[a,b]$).
2) Existe-t-il un $c_* \in [a,b]$ tel que $f(c_*) = \overline{f}$?

Ex-13-10: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et borné et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Vrai ou faux ?

1) f admet une primitive sur I.

Pour la suite, on restreint le domaine de f à un intervalle $[a,b] \subset I$.

1) Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, alors f admet un zéro en $[a,b]$.
2) Si $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$, alors $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a,b]$.
3) Si $f(x) < 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx < 0$.

Soit F une primitive de f sur $[a,b]$.

1) Si $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $F(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [a,b]$.
2) Pour tout $x \in [a,b]$, on a $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Ex-13-11: Calculer les intégrales définies suivantes à l'aide de changements de variables.

1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$

2) $\displaystyle\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x})\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{1+\sin(x)}dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)^5\,dx$