Série 10: Dérivée et accroissements finis

Ex-10-01: Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vrai ou faux ?

1) Si $f(x_0) = 2$, et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
2) Si f est dérivable à gauche et à droite en $a \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a.
3) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $g(x) = \sqrt{f(x)^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4) Si $f(x) = x^2 - 2x$, alors $(f \circ f)'(1) = 0$.
5) La fonction $f(x) := |\cos(x)|$ est dérivable en $x_0 = 0$.
6) ⚠ Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que f est continue sur $]a - \delta, a + \delta[$.

Ex-10-02: Utiliser les règles de dérivation pour calculer les dérivées des fonctions suivantes. Ensuite, donner le domaine de la fonction ainsi que celui de sa dérivée.

1) $f(x) = \dfrac{5x+2}{3x^2-1}$
2) $f(x) = \tan(x)$
3) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$
4) $f(x) = \sqrt{\sin(\sqrt{\sin(x)})}$
5) $f(x) = \sin(x)^2 \cdot \cos(x^2)$
6) $f(x) = x^{(x^x)}$
7) $f(x) = \sin(x)^{\sin(x^2)}$

Ex-10-03: Calculer f' puis donner les domaines de f et f'.

1) $f(x) = \sqrt[5]{\left(2x^4 + e^{-(4x+3)}\right)^3}$
2) $f(x) = \log_3(\cosh(x))$
3) $f(x) = \left(\log(4^{\sin(x)})\right)e^{\cos(4x)}$

Ex-10-04: Considérer

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3\,, & x \leqslant 1 \\ \alpha x + \beta\,, & x > 1\,, \end{cases}$$

et déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit dérivable partout.

Ex-10-05: Calculer $(g \circ f)'(0)$ pour les fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

1) $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)\sin(x)^7\cos(x)^4$, $g(x) = \log(x)^3$.
2) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$, $g(x) = (x-1)^4$.

Ex-10-06: Montrer que la fonction $f(x) = e^{-x/2}\sin(\sqrt{11}x/2)$ satisfait

$$f''(x) + f'(x) + 3f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ex-10-07: Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\,, \qquad x \neq 1\,.$$

Montrer, par récurrence sur $n \geqslant 1$, que

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\,.$$

Ex-10-08: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la $n$ème dérivée de f, notée $f^{(n)}$.

1) $f(x) = x^m \quad (m \in \mathbb{Z})$

2) $f(x) = \sin(2x) + 2\cos(x)$

3) $f(x) = \log(x)$

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Ex-10-09: Soit, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(Notation : $\frac{d^n}{dx^n} f = f^{(n)}$.) Montrer, par récurrence sur n, que $f_n(x)$ est un polynôme en x.

Ex-10-10: Une fonction dérivable F est une **primitive** de f si $F' = f$. Trouver des primitives pour les fonctions suivantes.

1) $f(x) = x^n \ (n \neq -1)$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$

3) $f(x) = \sin(x)$

4) $f(x) = \cos(x)$

5) $f(x) = \tan^2(x)$

6) $f(x) = \tan(x)$

7) $f(x) = e^x$

8) $f(x) = e^{cx} \ (c \neq 0)$

9) $f(x) = \sinh(x)$

10) $f(x) = \cosh(x)$

11) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

12) $f(x) = x\exp(x^2)$

Ex-10-11: Soient $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

1) Soit x_0 un point tel que $f(x_0) = h(x_0)$, et tel que f et h soient dérivables en x_0, avec
$$f'(x_0) = h'(x_0) = m\,.$$
Montrer que g est dérivable en x_0, et que $g'(x_0) = m$.

2) Utiliser le point précédent pour montrer que la fonction
$$g(x) = \begin{cases} x^2 \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
est dérivable en $x_0 = 0$, et donner la valeur de $g'(0)$.

Ex-10-12: Parmi les fonctions ci-dessous, déterminer celles qui sont dérivables, ou continûment dérivables sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0\,, & x = 1 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x\arctan(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} x^2\arctan(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

Ex-10-13: On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possède **la propriété de l'accroissement fini** si il existe un point $c \in]a, b[$ où f est dérivable et où

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Déterminer, parmi les fonctions suivantes, celles qui possèdent la propriété de l'accroissement fini. Lorsque c'est le cas, on donnera si possible la valeur de c.

1) $f(x) = xe^x$ sur $[-\pi, \pi]$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 \leqslant x < 0\,, \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1\,. \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 \leqslant x < 0\,, \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1\,. \end{cases}$

4) $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$

Ex-10-14: Soit $f\colon\ ]-1,1[\ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}\,.$$

1) Montrer qu'il est possible de prolonger f par continuité, donner sa prolongée $\widetilde{f} :]-1,1[\to \mathbb{R}$.
2) Montrer que $\widetilde{f}$ est dérivable en $x_0 = 0$.