

Ex-09-01: Soient f et g définies dans un voisinage à droite de x_0 , telles que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell > 0, \\ -\infty & \text{si } \ell < 0. \end{cases}$$

2) Expliquer pourquoi lorsque $\ell = 0$, la limite du produit $f(x)g(x)$ est indéterminée.

Ex-09-02: Donner, s'il y en a, un exemple explicite de fonction

- 1) continue sur un intervalle fermé et borné, qui n'est pas majorée.
- 2) définie sur un intervalle fermé et borné, qui est majorée mais pas minorée.
- 3) continue sur un intervalle fermé, qui a un maximum mais pas de minimum.
- 4) continue sur un intervalle borné, qui a un minimum mais pas de maximum.
- 5) définie sur un intervalle fermé et borné, qui a un maximum mais pas de minimum.
- 6) discontinue en tout point d'un intervalle fermé et borné, qui a un maximum et un minimum.
- 7) définie sur un intervalle fermé et borné, dont l'ensemble image est un intervalle ouvert et borné.

Ex-09-03: Étudier la continuité des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous, au point $x_0 = 0$:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{1/x}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} & 3) f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \\ 2) f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases} & 4) f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Ex-09-04: Les fonctions ci-dessous sont-elle continues sur \mathbb{R} ?

$$\begin{array}{l} 1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{si } x > 1, \\ 3 & \text{si } x = 1, \\ \frac{\sin(x - 1)}{2x - 2}, & \text{si } x < 1, \end{cases} \\ 2) g(x) = [x] \\ 3) \triangle h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{array}$$

Ex-09-05: Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3} & \text{si } x > 3, \\ \alpha & \text{si } x = 3, \\ \beta x - 4 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 3$ pour les paires de paramètres (α, β) données ci-dessous.

$$(1, \frac{1}{2}) \quad (1, \frac{5}{3}) \quad (2, \frac{5}{3}) \quad (1, 2) \quad (2, 2).$$

Ex-09-06: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en x_0 .

- 1) Montrer que si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe un voisinage épointé de x_0 dans lequel $f(x)$ est partout non-nul et de signe constant.
- 2) Ensuite, donner un exemple explicite d'une fonction f qui est continue, mais qui change infiniment souvent de signe dans tout intervalle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $\delta > 0$.

Ex-09-07: Soient I un intervalle non-vide, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue non-constante. Vrai ou faux ?

- 1) $\text{Im}(f)$ est un intervalle.
- 2) Si I est borné et fermé, alors $\text{Im}(f)$ est borné et fermé.
- 3) Si I est borné, alors $\text{Im}(f)$ est borné.
- 4) Si I est ouvert, alors $\text{Im}(f)$ est ouvert.
- 5) Si $I = [a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, alors f atteint son minimum ou son maximum (ou les deux) sur I .
- 6) Si $I = [a, \infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f atteint son minimum ou son maximum (ou les deux) sur I .
- 7) Si f est strictement croissante et I est ouvert, alors $\text{Im}(f)$ est ouvert.

Ex-09-08: Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité de la fonction f au point x_0 , ou alors montrer que f ne peut *pas* être prolongée par continuité en $x_0 = 1$.

- 1) $f: [0, 1[\cup]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}}.$$

- 2) $f:]1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3 - 3x + 2}.$$

Ex-09-09: Donner un exemple de deux fonctions $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ en lequel g est continue, telles que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$$

existe, mais n'est pas égal à $f(g(x_0))$.

Ex-09-10: Montrer que les équations (non linéaires) ci-dessous admettent des solutions :

1) $e^{x-1} = x + 1,$

2) $x^2 - \frac{1}{x} = 1.$

Ex-09-11: En utilisant uniquement la définition de la dérivée, étudier la dérivabilité des fonctions au point x_0 . Lorsque la fonction est dérivable, donner $f'(x_0)$.

1) $f(x) = \frac{1}{1-x^3}, x_0 = -1$

2) $f(x) = \sqrt{1+x^2}, x_0 = 1$

3) $f(x) = |x| \sin(x), x_0 = 0$

4) $f(x) = \sqrt{x+|x-1|}, x_0 = 1$

5) $f(x) = (2^x - 1)(2^x - 2) \cdots (2^x - 100), x_0 = 0$

Ex-09-12: Soit f une fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$. Calculer, en fonction de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h}.$$

Ex-09-13: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que

1) si f est paire, alors f' est impaire,

2) si f est impaire, alors f' est paire,

On démontrera ces propriétés *uniquement* à l'aide de la définition de dérivée.