

Ex-07-01: Étudier la convergence des séries suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n} & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n^2}\right) & 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right)n} \\
 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n} & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3 + n + 2} & 10) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{0.99999\dots}} \\
 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} & 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}{n} & \\
 4) \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) & 8) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{100}}{e^{3(\log(n))^2}} &
 \end{array}$$

Ex-07-02: Étudier la convergence des séries suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+5}\right)^n & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} & 7) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\
 2) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+7} - n) & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{4}\right)^n & \\
 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right) & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^{2n}} &
 \end{array}$$

Ex-07-03: Discuter la convergence de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ en fonction de $q \in \mathbb{R}$, en utilisant

- 1) le critère de d'Alembert,
- 2) le critère de Cauchy.

Ex-07-04: Utiliser le critère de la limite du quotient pour étudier les séries ci-dessous.

$$\begin{array}{ll}
 1) \sum_{n \geq 0} \frac{n^3 - n^2 + n + 3}{n^4 + n^3 - n^2 + 1} & 3) \sum_{n \geq 1} \sqrt[4]{n+1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^5+1}}\right) \\
 2) \sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt[3]{n^2-2n}}{n^2-1} & 4) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} - \log(n) + \frac{n}{2}}
 \end{array}$$

Ex-07-05: Parmi les séries ci-dessous, lesquelles convergent absolument ?

$$\begin{array}{ll}
 1) \sum_{n \geq 1} \frac{(-5)^n}{(2n)!} & 3) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin\left(\frac{9\pi}{7}n\right)}{\sqrt[3]{3n^5+1}} \\
 2) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n - |n^2-1|}{3n^2-n+4} & 4) \sum_{n \geq 0} e^{-n} \sin(7n)
 \end{array}$$

Ex-07-06: Déterminer, parmi les séries ci-dessous, celles qui convergent ou divergent.

$$1) \sum_{n \geq 0} \{ \sqrt{n^3 + 5} - \sqrt{n^3 + 2} \}$$

$$3) \sum_{n \geq 1} e^{-(\log(n))^2}$$

$$2) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$4) \sum_{n \geq 5} \frac{1}{(\log(n))^{\log(n)}}$$

Ex-07-07: Considérer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{\log_3(n)}}$. Vrai ou faux ?

- 1) Le critère de Cauchy permet de montrer que la série converge.
- 2) Le critère de d'Alembert permet de montrer que la série diverge.
- 3) La série converge, car c'est une série géométrique de raison $r = \frac{1}{2} < 1$.
- 4) La série diverge.

Ex-07-08: Étudier la convergence des séries données ci-dessous.

$$1) \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

$$2) \frac{3}{2} + \frac{4}{3 \cdot 2} + \frac{5}{4 \cdot 3} + \frac{6}{5 \cdot 4} + \dots$$

$$3) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$4) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

Ex-07-09: Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k} \right\}$.

Ex-07-10: (Cet exercice est facultatif)

Soit (a_n) une suite pour laquelle les deux limites ci-dessous existent :

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Montrer que $L_1 = L_2$.