Ex-05-01: Déterminer, parmi les suites ci-dessous, celles qui sont bornées. Lorsqu'une suite est bornée, on donnera une sous-suite convergente, ainsi que la valeur de sa limite.

1) $a_n = (-1)^n$
2) $a_n = (-1)^{n^2-n}$
3) $a_n = (1 + (-1)^n)^n$
4) $a_n = \sin(n\frac{\pi}{3}) + \cos(n\frac{\pi}{2})$

Ex-05-02: Soit (a_n) une suite bornée. Vrai ou faux ?

1) Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = a > 0$, alors $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
2) Si $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, alors (a_n) tend vers zéro.
3) Si $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $a_n \leqslant 0$ pour tout n.
4) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{M_1, M_2, \dots\}$, où $M_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$.

Ex-05-03: Considérer la suite $a_n := \sqrt{n}$.

1) Montrer que pour tout entier $p > 0$ fixé, on a que $|a_n - a_{n+p}| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2) Est-ce que (a_n) est une suite de Cauchy ?

Ex-05-04: Considérer la suite (a_n) définie par $a_1 := \frac{5}{2}$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 6}{5}\,.$$

1) Montrer que $2 \leqslant a_n \leqslant 3$ pour tout pour tout $n \geqslant 1$,
2) Montrer que (a_n) est décroissante,
3) Conclure que (a_n) converge et calculer sa limite.
4) Faire un croquis qui illustre graphiquement ce qui se passe.

Ex-05-05:
Considérer la suite (a_n) définie par $a_1 := 10$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\,.$$

1) Montrer que $a_n > \sqrt{2}$ pour tout n.
2) Montrer que (a_n) est décroissante.
3) Conclure que (a_n) converge et calculer sa limite.

Ex-05-06: Soient $a_1 \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ par $a_{n+1} = g(a_n)$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que dans chacun des cas la suite converge, et calculer sa limite.

1) $g(x) := \frac{1}{4}(3x + 1)$, $a_1 := 0$,
2) $g(x) := \frac{1}{4}(x + 4)$, $a_1 := 3$,
3) $g(x) := \frac{7}{3} - \frac{1}{1+x}$, $a_1 := 1$,
4) $g(x) := 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$, $a_1 := \frac{3}{2}$.

Ex-05-07: Décrire le comportement des suites $x_{n+1} = g(x_n)$ ci-dessous dans la limite $n \to \infty$, *qualitativement*, uniquement à l'aide de l'interprétation graphique de la trajectoire. On considérera en particulier le comportement en fonction du choix de la condition initiale.

1) $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{3-x}{2}$.
2) $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x) := 2x - 5$.
3) $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $g(x) := \frac{1}{x}$.
4) $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x) := 4 - x$.
5) $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x) := x^2 + 1$.
6) $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $g(x) := x^2$.
7) $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x) := \cos(x)$.
8) $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{si } x < 1\,, \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \geqslant 1\,. \end{cases}$

Ex-05-08: Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants.

1) $(2 - 3\mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})$
2) $\dfrac{2 - 3\mathrm{i}}{4 - 5\mathrm{i}}$
3) $(\dfrac{1}{\mathrm{i}})^{4567}$
4) $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{10}$
5) $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}} + \dfrac{1}{1+2\mathrm{i}} + \dfrac{1}{1+3\mathrm{i}}$
6) $\dfrac{2 - 3\mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}} + \dfrac{1 - \mathrm{i}}{1 + 3\mathrm{i}}$
7) $\dfrac{5 + 5\mathrm{i}}{3 - 4\mathrm{i}} + \dfrac{20}{4 + 3\mathrm{i}}$
8) $\dfrac{3\mathrm{i}^{30} - \mathrm{i}^{19}}{-1 + 2\mathrm{i}}$
9) $(\dfrac{10 - 15\mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}})(\dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - 3\mathrm{i}})$

Ex-05-09: Trouver le module et un argument pour les nombres complexes suivants.

1) $2 + 2\mathrm{i}$
2) $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$
3) $-1 + \mathrm{i}\tan(3)$
4) $\dfrac{8\mathrm{i}^{21} - 2\mathrm{i}^{11}}{1 - \mathrm{i}}$

Ex-05-10: Calculer le module des nombres complexes suivants.

1) $e^{\mathrm{i}+1}$
2) $e^{-(\mathrm{i}+1)}$
3) $e^{-(\mathrm{i}-1)}$
4) $e^{(\mathrm{i}-50)}$
5) $e^{(1-50\mathrm{i})}$