

Ex-04-01: Donner, s'il y en a, un ou plusieurs exemples explicites (c'est-à-dire : on définira explicitement chaque terme) de suites $(a_n)_{n \geq 1}$ possédant les propriétés suivantes.

- 1) Strictement croissante, tendant vers $\sqrt{2}$.
- 2) Possédant une infinité de termes plus grands que 3, et une infinité de termes plus petits que 2.
- 3) Majorée, pas minorée, pas monotone.
- 4) Majorée, minorée, divergente, dont tous les termes sont strictement négatifs.
- 5) Croissante, divergente, dont tous les termes sont strictement négatifs.
- 6) Convergente, pas monotone, dont tous les termes sont strictement positifs.
- 7) Convergente, possédant une infinité de termes strictement positifs, et une infinité de termes strictement négatifs.
- 8) Convergente, possédant une infinité de termes plus grands ou égaux à 1, et une infinité de termes négatifs.
- 9) Tendait vers $+\infty$, avec une infinité de termes strictement négatifs.
- 10) Tendait vers $+\infty$, pour laquelle il n'existe aucun N tel que $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout $n \geq N$.
- 11) N'ayant que des termes irrationnels, possédant une infinité de termes ≤ 0 , et telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$.

Ex-04-02: Soit (a_n) une suite d'entiers, monotone et bornée. Montrer que a_n devient constante pour n grand.

Ex-04-03: Calculer les limites $n \rightarrow \infty$ des suites ci-dessous, qui sont toutes des indéterminations "1 $^\infty$ ".

- 1) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$
- 2) $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
- 3) $z_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

Ex-04-04: *Problème de l'échiquier de Sissa* : "On place un grain de riz (ou de blé) sur la première case d'un échiquier. Si on fait en sorte de doubler à chaque case le nombre de grains de la case précédente (un grain sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, etc.), combien de grains obtient-on au total?"

Ex-04-05: Calculer les sommes suivantes. (On suppose partout que $|r| < 1$.)

- 1) $\sum_{k=N}^{\infty} r^k$ ($N \in \mathbb{N}^*$)
- 2) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{7^k}$
- 3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{5^k}$
- 4) $1 - r^3 + r^5 - r^7 + r^9 + \dots$
- 5) $r + r^2 - r^3 + r^4 + r^5 - r^6 + r^7 + r^8 - r^9 + \dots$
- 6) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^k}{3}\right)^k$

Ex-04-06: Étudier la limite $n \rightarrow \infty$ pour les suites données ci-dessous.

- | | |
|--|--|
| 1) $n^2 \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ | 5) $\frac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{\cos(n+1) + \cos(n-1)}$ |
| 2) $\frac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7}$ | 6) $\frac{\sin(\sqrt{n^3 + n^2 + 1})}{n^3 + n^2 + 1}$ |
| 3) $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$ | 7) $\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 - 3n}$ |
| 4) $(-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$ | 8) $\sqrt{n}(\sqrt{n^3 + n} - \sqrt{n^3 + 1})$ |

Ex-04-07: Soit (a_n) la suite

$$a_n := \sqrt{\alpha n^2 + \beta n} - \sqrt{\delta n^2 + \gamma n},$$

où $\alpha, \delta > 0$, et $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.

Discuter du comportement de a_n lorsque $n \rightarrow \infty$, en fonction des paramètres.

Ex-04-08: Étudier la limite $n \rightarrow \infty$ des suites ci-dessous.

- | | |
|--|--|
| 1) $b_n = \log(n+1) - \log(n-1)$ | 4) $f_n = \sqrt[n]{n}$ |
| 2) $c_n = \frac{\sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ | 5) $g_n = \sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})$ |
| 3) $e_n = \sqrt{n}\sqrt{n+1} - n$ | 6) $l_n = n \cdot \sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)$ |

Ex-04-09: Étudier la limite $n \rightarrow \infty$ des suites ci-dessous.

- | | |
|--|--|
| 1) $a_n = \frac{n^{23/47} - \sqrt{n}}{e^{\frac{1}{2} \log n} - 2 \log(n)}$ | 4) $i_n = 3^n e^{-3n}$ |
| 2) $d_n = \frac{n^n}{7^{\log(n)}}$ | 5) $j_n = n^{100} e^{-3(\log(n))^2}$ |
| 3) $h_n = \frac{n^3}{7^n} \cos(\sqrt{n})$ | 6) $k_n = \frac{e^{\sqrt{(\log n)^2 - 3 \log n}}}{7n}$ |

Ex-04-10: Soit (a_n) définie par $a_n := (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$. Considérer les suites (M_n) et (m_n) introduites au cours.

- 1) Donner M_n et m_n explicitement (en fonction de n).
- 2) Vérifier que M_n (resp. m_n) est décroissante (resp. croissante), minorée (resp. majorée), et donner sa limite.
- 3) Calculer $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Ex-04-11: Calculer $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ pour les suites (x_n) définies ci-dessous.

- 1) $x_n = \frac{n + \sin(n)}{n}$
- 2) $x_n = \frac{1}{n^2+1}$ si n est impair, $x_n := (-1)^{n/2}$ si n est pair
- 3) $x_n = (-1)^n + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$