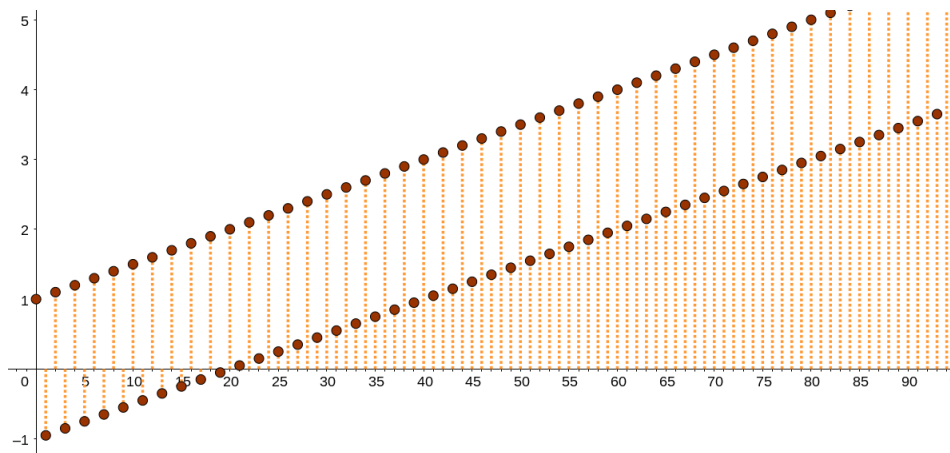


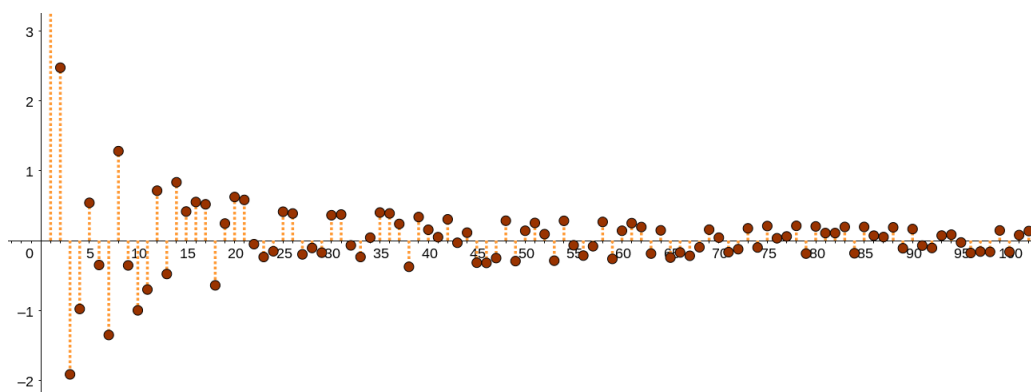
Ex-03-01:

1) Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  la suite dont le graphe est le suivant :



Pour cette suite, donner explicitement

- l'ensemble  $A = \{n : x_n < 0\}$
  - l'ensemble  $B = \{n : x_n \geq 1\}$ .
  - l'ensemble  $C = \{n : |x_n - 1| \leq \frac{1}{2}\}$ .
  - un entier  $N$  tel que  $x_n > 2$  pour tout  $n \geq N$ .
- 2) Soit  $(y_n)$  la suite dont le graphe est le suivant :



Pour cette suite, donner

- l'ensemble  $A' = \{n : y_n \geq 1\}$ .
- l'ensemble  $B' = \{n : |y_n - 1| \leq \frac{1}{2}\}$ .
- un entier  $N$  tel que  $|y_n - 1| \leq \frac{1}{2}$  pour tout  $n \geq N$ .
- l'ensemble  $C' = \{n : |y_n| \leq \frac{1}{2}\}$ .
- un entier  $N$  tel que  $|y_n| \leq \frac{1}{2}$  pour tout  $n \geq N$ .

Ex-03-02: Soit  $(x_n)$  la suite dont le terme général est défini par

$$x_n := \frac{an + b}{cn + d},$$

où  $a, b, c, d$  sont des constantes positives. Montrer que  $(x_n)$  est croissante si et seulement si  $ad - bc \geq 0$ .

Ex-03-03: Pour chacune des suites ci-dessous, montrer qu'il existe un  $N \in \mathbb{N}^*$  (en le donnant explicitement) tel que  $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ .

- 1)  $a_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $\ell = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ,                      3)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $\ell = 0$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ,  
 2)  $a_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $\ell = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ,                      4)  $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ ,  $\ell = 0$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ .

Ensuite, pour la suite définie par  $a_n = \frac{2n}{n+1}$  ( $n \geq 0$ ), prendre  $\varepsilon = \frac{3}{4}$  et donner l'ensemble des entiers  $n \geq 0$  pour lesquels  $|a_n - 1| \leq \varepsilon$ . Représenter graphiquement le résultat.

**Ex-03-04:** Montrer que si  $(a_n)$  est une suite telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = L \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = L,$$

alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .

**Ex-03-05:** Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  la suite définie ainsi :

$$x_1 = 0.9, \quad x_2 = 0.99, \quad x_3 = 0.999, \quad x_4 = 0.9999, \quad \text{etc.}$$

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

**Ex-03-06:** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $c, d > 0$ , et soit  $x_n := \frac{an+b}{cn+d}$ . À l'aide de la définition de limite, montrer que

- 1) Si  $a = 2, b = -3, c = 3, d = 7$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}.$$

- 2) En général, quels que soient  $a, b, c, d$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{a}{c}.$$

**Ex-03-07:** Parmi les affirmations suivantes, indiquer celles qui sont équivalentes à " $a_n \rightarrow L$ ".

- 1) Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $N$  tel que  $|a_n - L| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ .
- 2) Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $N$  tel que  $|a_n - L| < \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ .
- 3) Pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$  il existe un entier  $N$  tel que  $|a_n - L| \leq \frac{1}{j}$  pour tout  $n \geq N$ .
- 4) Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $N$  tel que  $|a_n - L| \leq C\varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ .
- 5) Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $N$  tel que  $|a_n - L| \leq \varepsilon^2$  pour tout  $n \geq N$ .

**Ex-03-08:** Soit  $(a_n)$  une suite réelle. Vrai ou faux ?

- 1) Si  $(a_n)$  est croissante, alors  $(a_n^2)$  est croissante.
- 2) Si  $(a_n)$  est bornée, alors  $(a_n)$  converge.
- 3) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , alors  $|a_n| \leq \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ .
- 5) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \sin(n)) = 0$ .

- 6) Si  $(a_n)$  converge, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $|a_n| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 7) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $|a_n - a| \leq \delta$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 8) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = M > 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +M$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -M$ .
- 9) Si  $a_n \leq b_n$  pour tout  $n$ , et si  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ , alors  $a_n \leq L$  pour tout  $n$ .
- 10) Si  $a_n$  est décroissante et  $b_n \rightarrow 0$ , alors  $a_n b_n$  est décroissante.

**Ex-03-09:** Étudier la limite  $n \rightarrow \infty$  des suites  $(a_n)$  ci-dessous, en utilisant explicitement le Théorème des deux gendarmes :

$$1) a_n = \frac{\cos(\sqrt{n})}{n} \qquad 2) a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad 3) a_n = \sqrt[n]{1+2^n}$$

**Ex-03-10:**

- 1) Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,

$$1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

- 2) Utiliser ces inégalités, ainsi que le Théorème des deux gendarmes, pour calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n}.$$

**Ex-03-11:** Soit  $a_n = \frac{3n}{n+2}$ ,  $n \geq 1$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , à l'aide de la définition de limite. Ensuite, en utilisant uniquement les propriétés de la limite, calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \qquad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2}{n^2 + 4n + 4}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{3} + \frac{3}{a_n} \right)$$

**Ex-03-12:** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un ensemble majoré, et  $s := \sup A$ . Montrer qu'il existe une suite  $(x_n)$  qui satisfait simultanément aux deux conditions suivantes :

- 1)  $x_n \in A$  pour tout  $n$ ,
- 2)  $x_n \rightarrow s$ .