

Ex-13-01: Trouver les trois premiers termes de la série de Mac-Laurin des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

2) $f(x) = \tan(x)$

3) $f(x) = \arctan(x)$

4) $f(x) = \sqrt{1 + \tan(x)}$

Ex-13-02: Donner les 5 premiers termes (non nuls) du développement de Taylor de $f(x) = \sin(x)$ autour de $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Ex-13-03: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

2) Calculer la série de MacLaurin de f (en $x_0 = 0$), ainsi que son rayon de convergence.

3) Que concluez vous ?

Ex-13-04: En s'aidant de séries de MacLaurin connues, donner la valeur de la somme de chacune des séries ci-dessous.

1) $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \dots$

3) $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} \dots$

2) $1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \frac{\pi^8}{8!} \dots$

4) $\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} \dots$

Ex-13-05:

1) Montrer que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

n'est pas intégrable.

2) Montrer que la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ C & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est intégrable, et calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Ex-13-06: Calculer les primitives ci-dessous, à l'aide de primitives déjà connues.

1) $\int \frac{3x+4}{1+x^2} dx$

2) $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} dx$

3) $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx$

$$4) \int \frac{\sinh(x)}{e^x + 1} dx$$

Ex-13-07: Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrables. Montrer que si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Ex-13-08: Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, telle que $\int_a^b f(x) dx = 0$. Montrer que f est la fonction identiquement nulle : $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

Ex-13-09: Soient $a < c < b$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} H_1 & \text{si } a \leq x \leq c, \\ H_2 & \text{si } c < x \leq b, \end{cases}$$

où H_1, H_2 sont deux constantes.

- 1) Calculer \bar{f} (valeur moyenne de f sur $[a, b]$).
- 2) Existe-t-il un $c_* \in [a, b]$ tel que $f(c_*) = \bar{f}$?

Ex-13-10: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et borné et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Vrai ou faux ?

- 1) f admet une primitive sur I .

Pour la suite, on restreint le domaine de f à un intervalle $[a, b] \subset I$.

- 1) Si $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors f admet un zéro en $[a, b]$.
- 2) Si $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, alors $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.
- 3) Si $f(x) < 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx < 0$.

Soit F une primitive de f sur $[a, b]$.

- 1) Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $F(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.
- 2) Pour tout $x \in [a, b]$, on a $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Ex-13-11: Calculer les intégrales définies suivantes à l'aide de changements de variables.

$$1) \int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

$$3) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{1 + \sin(x)} dx$$

$$2) \int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x}) dx$$

$$4) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^5 dx$$