

Ex-05-01: Déterminer, parmi les suites ci-dessous, celles qui sont bornées. Lorsqu'une suite est bornée, on donnera une sous-suite convergente, ainsi que la valeur de sa limite.

- a) $a_n = (-1)^n$
- b) $a_n = (-1)^{n^2-n}$
- c) $a_n = (1 + (-1)^n)^n$
- d) $a_n = \sin(n\frac{\pi}{3}) + \cos(n\frac{\pi}{2})$

Ex-05-02: Soient (a_n) une suite bornées. Vrai ou faux ?

- a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = a > 0$, alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.
- b) Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, alors (a_n) tend vers zéro.
- c) Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors $a_n \leq 0$ pour tout n .
- d) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{M_1, M_2, \dots\}$, où $M_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$.

Ex-05-03: Considérer la suite $a_n := \sqrt{n}$.

- a) Montrer que pour tout entier $p > 0$ fixé, on a que $|a_n - a_{n+p}| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- b) Est-ce que (a_n) est une suite de Cauchy ?

Ex-05-04: Considérer la suite (a_n) définie par $a_1 := \frac{5}{2}$ et, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 6}{5}.$$

- a) Montrer que $2 \leq a_n \leq 3$ pour tout $n \geq 1$,
- b) Montrer que (a_n) est décroissante,
- c) Conclure que (a_n) converge et calculer sa limite.
- d) Faire un croquis qui illustre graphiquement ce qui se passe.

Ex-05-05:

Considérer la suite (a_n) définie par $a_1 := 10$ et, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

- a) Montrer que $a_n > \sqrt{2}$ pour tout n .
- b) Montrer que (a_n) est décroissante.
- c) Conclure que (a_n) converge et calculer sa limite.

Ex-05-06: Soient $a_1 \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On définit la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ par $a_{n+1} = g(a_n)$ pour $n \geq 1$. Montrer que dans chacun des cas la suite converge, et calculer sa limite.

- a) $g(x) := \frac{1}{4}(3x + 1)$, $a_1 := 0$,
- b) $g(x) := \frac{1}{4}(x + 4)$, $a_1 := 3$,
- c) $g(x) := \frac{7}{3} - \frac{1}{1+x}$, $a_1 := 1$,
- d) $g(x) := 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$, $a_1 := \frac{3}{2}$.

Ex-05-07: Décrire le comportement des suites $x_{n+1} = g(x_n)$ ci-dessous dans la limite $n \rightarrow \infty$, *qualitativement*, uniquement à l'aide de l'interprétation graphique de la trajectoire. On considérera en particulier le comportement en fonction du choix de la condition initiale.

- a) $x_0 \in \mathbb{R}, g(x) := \frac{3-x}{2}$.
- b) $x_0 \in \mathbb{R}, g(x) := 2x - 5$.
- c) $x_0 \in \mathbb{R}^*, g(x) := \frac{1}{x}$.
- d) $x_0 \in \mathbb{R}, g(x) := 4 - x$.
- e) $x_0 \in \mathbb{R}, g(x) := x^2 + 1$.
- f) $x_0 \in \mathbb{R}_+, g(x) := x^2$.
- g) $x_0 \in \mathbb{R}, g(x) := \cos(x)$.
- h) $x_0 \in \mathbb{R}, g(x) := \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{si } x < 1, \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

Ex-05-08: Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants.

- a) $(2 - 3i)(3 + 2i)$
- b) $\frac{2 - 3i}{4 - 5i}$
- c) $(\frac{1}{i})^{4567}$
- d) $(1 + i\sqrt{3})^{10}$
- e) $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1+3i}$
- f) $\frac{2 - 3i}{2 + i} + \frac{1 - i}{1 + 3i}$
- g) $\frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{4 + 3i}$
- h) $\frac{3i^{30} - i^{19}}{-1 + 2i}$
- i) $(\frac{10 - 15i}{2 + i})(\frac{1 + i}{1 - 3i})$

Ex-05-09: Trouver le module et un argument pour les nombres complexes suivants.

- a) $2 + 2i$
- b) $-1 + i\sqrt{3}$
- c) $-1 + i \tan(3)$
- d) $\frac{8i^{21} - 2i^{11}}{1 - i}$

Ex-05-10: Calculer le module des nombres complexes suivants.

- a) e^{i+1}
- b) $e^{-(i+1)}$
- c) $e^{-(i-1)}$
- d) $e^{(i-50)}$
- e) $e^{(1-50i)}$