



Ens. S. Friedli - Analyse I - (n/a)

15 janvier 2018 - durée : 3 heures




n / a

n / a


SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

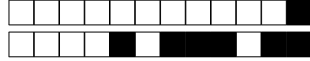
- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire** ou **bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses** :

 oui | ja | sì | yes



 non | nein | non | no





Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$, la suite des sommes partielles. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1$, alors :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} < 1$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n} - 2s_n) = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$

Question 2 : Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ le développement limité d'ordre trois de la fonction $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

autour de $x = 0$. Alors :

- $a_3 = \frac{5}{6}$
- $a_3 = -\frac{1}{6}$
- $a_3 = 5$
- $a_3 = 1$

Question 3 : Soit le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$,

$$E = \left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Alors :

- $\inf E = -1 - \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$
- $\inf E = -1$
- $\inf E = 0$
- $\inf E = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Question 4 : Soit l'intégrale

$$I = \int_1^{e^3} \frac{\text{Log}(x)}{x \sqrt{(\text{Log}(x))^2 + 1}} dx .$$

Alors :

- $I = \sqrt{10} + 1$
- $I = \frac{1}{2}(\sqrt{10} - 1)$
- $I = \sqrt{10} - 1$
- $I = 2(\sqrt{10} - 1)$

Question 5 : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x+2) & \text{si } x < 0, \\ \alpha x + \beta & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

est dérivable sur \mathbb{R} . Alors :

- $f'(2) = 2$
- $f(2) = 12$
- $f(-3) + f(1) = 7$
- $f(3) = 9$

Question 6 : Soit la fonction $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)e^{-x}$. Alors :

- f atteint son minimum en $x = 0$ en $x = \pi$ et en $x = 2\pi$.
- f atteint son minimum en $x = 0$ et son maximum en $x = \frac{\pi}{4}$.
- f atteint son minimum en $x = \frac{5\pi}{4}$ et son maximum en $x = \frac{\pi}{4}$.
- f atteint son minimum en $x = \frac{3\pi}{2}$ et son maximum en $x = \frac{\pi}{2}$.

Question 7 : Soit une fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et la suite de nombre réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie récursivement par $a_0 = 1$ et $a_n = g(a_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour g définie par :

- $g(x) = x + 1$
- $g(x) = 2x - 2$
- $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$
- $g(x) = -x^2 + 2x - 2$



Question 8 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors :

- f est trois fois dérivable sur \mathbb{R} .
- f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , mais pas trois fois dérivable.
- f n'est pas dérivable sur \mathbb{R} .
- f est une fois dérivable sur \mathbb{R} , mais pas deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

Question 9 : Soit la fonction $f:]-\pi, \pi[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^{\cos(x)-1} - 1 - x^2}{(\sin(x))^2}.$$

Alors :

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{3}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Question 10 : Soit la suite de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$a_n = \frac{\text{Log}(n + e^n)}{n + 1}.$$

Alors :

- a_n est une suite bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$
- a_n est une suite non bornée
- a_n est une suite bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- a_n est une suite bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

Question 11 : Soit l'intégrale généralisée

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx.$$

Alors :

- $I = -\text{Log}(e^2 - 1)$
- $I = 2 \text{Log}\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$
- $I = \frac{1}{2} \text{Log}\left(\frac{e+1}{e-1}\right)$
- l'intégrale I diverge



Question 12 : Soit la série numérique S avec paramètre $c \in \mathbb{R}$ définie par

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{cn}} .$$

Alors :

- S converge si et seulement si $c \geq 1$
- S converge si et seulement si $c \geq 0$
- S converge si et seulement si $2 > c > 0$
- S converge si et seulement si $c > 3$

Question 13 : Soit r le rayon de convergence de la série entière S , définie par

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{5^{k+3}} x^k .$$

Alors :

- $r = 0$
- $r = 25$
- $r = 5$
- $r = \frac{1}{5}$

Question 14 : Soit $a < 1$ un nombre fixé. Alors l'ensemble

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(a-1)^n} \text{ converge} \right\}$$

est donné par

- $D = \mathbb{R}$
- $D =]a, 1[$
- $D =]a, 2 - a[$
- $D =]-|a-1|, |a-1|[$

Question 15 : Soit l'intégrale

$$I = \int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{1-4x+4x^2}} dx .$$

Alors :

- $I = \frac{1}{2} \text{Log} (6 - \sqrt{33})$
- $I = -\frac{1}{2} \text{Arcsin} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$
- $I = -\frac{1}{2} \text{Log} (5)$
- $I = \frac{1}{2} \text{Log} (5)$



Question 16 : Soit la fonction $f: [-1, 3] \rightarrow [-1, 3]$ définie par

$$f(x) = \sqrt{|x-1| + 2x}.$$

Alors :

- f est surjective
- f est injective
- f est discontinue en $x = 1$
- f est dérivable sur $] -1, 3 [$

Question 17 : Soit

$$I = \int_0^1 x \cdot \arctan(x) dx.$$

Alors

- $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$
- $I = -\frac{1}{2}$
- $I = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$
- $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Question 18 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(e^{\frac{1}{x}})}{e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors :

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

Question 19 : Soit la fonction bijective $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2 + \text{Log} \left(\frac{2e+x}{x^2} \right),$$

et soit f^{-1} la fonction réciproque de f et $y_0 := f(2e)$. Alors :

- $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{1}{2e+1}$
- $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{4e}{3}$
- $(f^{-1})'(y_0) = 2e+1$
- $(f^{-1})'(y_0) = \frac{3}{4e}$



Question 20 : Soit le nombre complexe $z = e^i + e^{i/3}$. Alors :

$|z| = \sqrt{1 + (e^{2i/3} + e^{-2i/3})}$

$|z| = \sqrt{2}$

$|z| = \sqrt{2 + 2(e^{i/3} + e^{-i/3})}$

$|z| = \sqrt{2 + 2\cos(\frac{2}{3})}$



Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 21 : L'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^{13}) dx$ vaut zéro.

VRAI FAUX

Question 22 : Soit $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui admet autour de $x = 0$ le développement limité $f(x) = x - 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$, où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 0.$$

VRAI FAUX

Question 23 : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $b_n = \cos(a_n)$ converge. Alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

VRAI FAUX

Question 24 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux sous-ensembles bornés de \mathbb{R} tels que $A \cap B \neq \emptyset$ (ensemble vide). Alors $\text{Inf } A \leq \text{Inf } A \cap B$.

VRAI FAUX

Question 25 : Soit $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f([1, 2]) =]1, 2[$. Alors f n'est pas continue sur $[1, 2]$.

VRAI FAUX

Question 26 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2h)}{h} = 2f'(x_0).$$

VRAI FAUX



Question 27 : La fonction $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en $x = 0$.

VRAI FAUX

Question 28 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telles que $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.

VRAI FAUX

Question 29 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné de \mathbb{R} et $c = \text{Sup } A$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in A$ tel que $x + \epsilon \geq c$.

VRAI FAUX

Question 30 : Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série numérique divergente et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels

telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Alors la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

VRAI FAUX



Troisième partie, questions de type ouvert

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 31: *Cette question est notée sur 3 points.*

₀ ₁ ₂ ₃

Réservé au correcteur

Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) := x e^{-x/5}$. Montrer qu'il existe $x_* > 0$ tel que $f(x_*) = 1$.
On donnera une justification complète. Si des résultats du cours sont utilisés, on les énoncera.



Question 32: Cette question est notée sur 7 points.

₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇

Réservé au correcteur

- (a) Calculer le développement limité d'ordre 2 de $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ autour de $x_0 = 1$.
- (b) Déterminer si la série

$$\sum_{n \geq 1} \left\{ \arctan\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} \right\}$$

converge ou diverge, en justifiant rigoureusement votre réponse.

