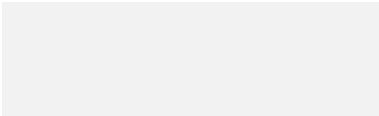


Ens: A. Garin
Analyse I - XXX
Novembre 2023
1h

154













XXX-9

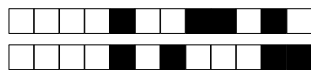
SCIPER : **FAKE-9**

Signature: 

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages (les dernières pouvant être vides), et 30 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

**Première partie, questions à choix multiple**

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{6n+8}{2n} \right) - 3 - \frac{4}{n}.$$

Alors :

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -14$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ | <input type="checkbox"/> $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -6$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ |
| <input type="checkbox"/> $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -6$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 6$ | <input type="checkbox"/> $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -3$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ |

Question 2 : Soit la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par $a_0 = \frac{3}{2}$, et pour $n \geq 1$ par $a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}$. Alors :

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ | <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ |
| <input type="checkbox"/> la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ n'existe pas dans \mathbb{R} | <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ |

Question 3 : Soit, pour $a_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$.

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Si $a_0 < 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. | <input type="checkbox"/> Si $a_0 < 1$, la suite est décroissante. |
| <input type="checkbox"/> Si $a_0 = 0$, la suite est convergente. | <input type="checkbox"/> Si $a_0 > 1$, la suite est croissante. |

Question 4 : Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = (-1)^k \frac{k+1}{k^2}$, et soit $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Alors :

- | |
|---|
| <input type="checkbox"/> la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, mais ne converge pas absolument |
| <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ |
| <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$ |
| <input type="checkbox"/> la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument |

Question 5 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$ converge si et seulement si

- | | | | |
|--|--|---------------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> $\alpha < -1$ | <input type="checkbox"/> $\alpha \geq 0$ | <input type="checkbox"/> $\alpha < 0$ | <input type="checkbox"/> $-1 < \alpha < 0$ |
|--|--|---------------------------------------|--|

Question 6 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $a_n = \frac{(n+3)^{1/2} - n^{1/2}}{(n+1)^{-1/2}}$. Alors :

- | | | | |
|--|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ | <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ | <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$ | <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ |
|--|--|--|--|



Question 7 : Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles majorés. Alors :

$\sup(A \cup B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$

$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

$\sup(A \cup B) = \min\{\sup A, \sup B\}$

$\sup(A \cup B) = (\sup A) + (\sup B)$

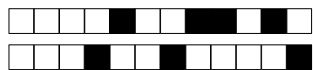
Question 8 : Les nombres complexes $3, 1 - 2i$, et $1 + 2i$ sont les racines du polynôme

$z^3 + 14z^2 + 15$

$z^3 - 5z^2 + 11z - 15$

$z^3 - 5z^2 + 5z + 45$

$z^3 - 2iz^2 + 45$

**Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux**

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels non-nuls telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

VRAI FAUX

Question 10 : Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés. Si $\inf A \leq \inf B$ et $\sup A \geq \sup B$, alors $B \subset A$.

VRAI FAUX

Question 11 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante. Alors la fonction réciproque $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante.

VRAI FAUX

Question 12 : Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| = 1$, alors $z^5 + \frac{1}{z^5}$ est un nombre réel.

VRAI FAUX

Question 13 : Soient $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ deux suites de nombres réels telles que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

VRAI FAUX