# Chapitre 1

# Suites réelles

## 1.1 Introduction

Une suite réelle peut être vue comme une liste infinie de nombres réels, écrit dans un certain ordre :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

Ici, $a_1$ est le premier terme, $a_2$ le deuxième terme, etc. On peut parler du **terme général**, $a_n$. Le nombre naturel $n$ est appelé l'**indice** (ou le **rang**) de $a_n$. Voici une définition plus précise.

**Définition 1.1.** Une **suite de nombres réels** est une application

$$\begin{aligned} a \colon \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n) = a_n. \end{aligned}$$

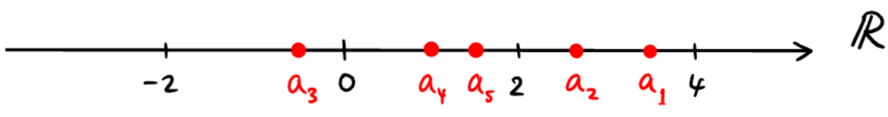
On écrit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ou simplement $(a_n)$, pour la suite définie ainsi.

**Exemple 1.2.**
- $a_n = n$ : $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- $a_n = \frac{1}{n}$ : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$
- $a_n = 42$ : $42, 42, 42, 42, 42, \ldots$
- $a_n = (-1)^n$ : $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$
- $a_n = n$-ième chiffre du développement décimal de $\pi$ ($\pi = 3.14159\ldots$) : $1, 4, 1, 5, 9, 2, \ldots$

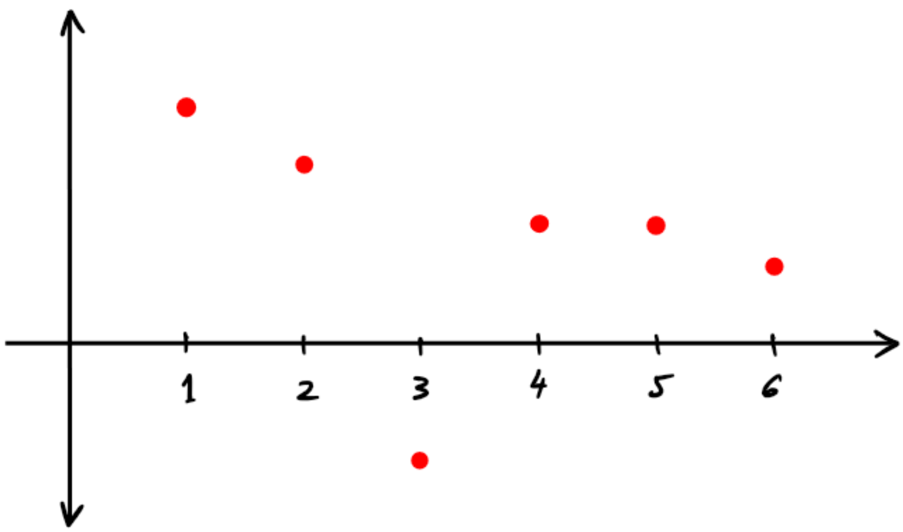
◇

Il y a plusieurs façons de définir des suites :
- par une formule explicite de $a_n$ en fonction de $n$, par exemple $a_n = n^2$ ;
- de manière descriptive, ou implicite, par exemple $a_n = n$-ième chiffre du développement décimal de $\pi$ ;
- par une **relation de récurrence**, où $a_n$ est exprimé en fonction des termes précédents, en précisant quelques premiers termes, par exemple $a_{n+1} = 2a_n - 1, a_1 = 1$.

Parfois, c'est utile de représenter les suites graphiquement. On peut représenter une suite $(a_n)$ sur la droite réelle $\mathbb{R}$ :



On peut aussi tracer le graphe de la fonction $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $a(n) = a_n$ dans le plan :




Les points dessinés sont de la forme $(n, a_n)$.

## 1.2 Suites majorées, minorées, monotones

**Définitions 1.3.** Soit $(a_n)$ une suite.

- $(a_n)$ est **majorée** (ou **bornée supérieurement**) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Un tel $M$ est appelé **majorant** (ou **borne supérieure**) de $(a_n)$.
- $(a_n)$ est **minorée** (ou **bornée inférieurement**) s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \geqslant m$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Un tel $m$ est appelé **minorant** (ou **borne inférieure**) de $(a_n)$.
- $(a_n)$ est **bornée** si elle est majorée et minorée.

**Remarques**

- $(a_n)$ est bornée si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que $|a_n| \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Une suite majorée $(a_n)$ possède plusieurs majorants : si $M$ est un majorant, alors tout $N \geqslant M$ est aussi un majorant. Si on voulait montrer qu'une suite est majorée, n'importe quel majorant suffit. La remarque analogue et aussi vraie pour le minorant.

**Exemples 1.4.**

- La suite $a_n = \frac{1}{n}$ est minorée car $a_n \geqslant 0$ pour tout $n$, et majorée car $a_n \leqslant 1$ pour tout $n$. Cette suite est donc bornée.
- La suite $a_n = n^2$ est minorée car $a_n \geqslant 0$ pour tout $n$. Par contre, $(a_n)$ n'est pas majorée car il n'existe pas $M$ tel que $n^2 \leqslant M$ pour tout $n$.

  *Démonstration.* Si $M \in \mathbb{R}$ était un majorant, on aurait $n^2 \leqslant M$ $\forall n$. Mais en prenant $n > \sqrt{|M|}$, on a $n^2 > |M| \geqslant M$ et donc $M$ ne peut pas être un majorant de $(a_n)$. ◇

- La suite $a_n = -n$ est majorée car $a_n \leqslant 0$ pour tout $n$. Par contre, $(a_n)$ n'est pas minorée : il n'existe pas $m$ tel que $-n \geqslant m$ pour tout $n$.
- $a_n = (-1)^n$ est bornée. En effet, $|a_n| = 1$, et donc en particulier $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$ pour tout $n$.

- $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$ est bornée. En effet, pour tout $n \geqslant 1$,

$$|a_n| = \left|\frac{n-1}{n}\right| = \left|1 - \frac{1}{n}\right| = 1 - \frac{1}{n} < 1\,.$$

- $a_n = n \cdot (-1)^n$ n'est ni majorée ni minorée.
- $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ est bornée : $0 \leqslant \frac{2n-1}{2n+1} \leqslant \frac{2n}{2n} = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.
- $a_n = \frac{6n+100}{n+10}$ est minorée. En effet, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{6n+100}{n+10} \geqslant \frac{6n}{n+10} \geqslant \frac{6n}{11n} = \frac{6}{11}\,.$$

  (Dans la deuxième inégalité, on a utilisé le fait que $10 \leqslant 10n$.) On obtient un minorant un peu meilleur en faisant

$$\frac{6n+100}{n+10} \geqslant \frac{6n+60}{n+10} = \frac{6(n+10)}{n+10} = 6\,.$$

- $a_n = \sqrt{n}$ ($n \geqslant 0$) est clairement minorée par $0$, mais n'est pas majorée. En effet, pour $M > 0$ donné, soit $A$ le plus petit entier plus grand ou égal à $M$. Alors

$$a_{A^2+1} = \sqrt{A^2+1} > \sqrt{A^2} = A \geqslant M\,.$$

◇

**Remarque 1.5.** Pour majorer un quotient $\frac{A}{B}$ où $A, B > 0$, on peut chercher $A'$ et $B'$ tels que $A' \geqslant A$ et $0 < B' \leqslant B$, puis écrire

$$\frac{A}{B} \leqslant \frac{A'}{B'}\,.$$

◇

### 1.2.1 Monotonicité

**Définitions 1.6.** Soit $(a_n)$ une suite.

- $(a_n)$ est **croissante** si $a_n \leqslant a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- $(a_n)$ est **strictement croissante** si $a_n < a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- $(a_n)$ est **décroissante** si $a_n \geqslant a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- $(a_n)$ est **strictement décroissante** si $a_n > a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- $(a_n)$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- $(a_n)$ est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

**Exemples 1.7.**

- $a_n = \frac{1}{n}$ est strictement décroissante car $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$ pour tout $n$.
- $a_n = n^2$ est strictement croissante car $a_n = n^2 < (n+1)^2 = a_{n+1}$.
- $a_n = \sqrt{n}$ est croissante.
- $a_n = (-1)^n$ n'est ni croissante, ni décroissante.
- $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$ n'est ni croissante ni décroissante : $a_2 > a_1$ mais $a_3 < a_2$.
- $a_n = \frac{3n+4}{n+1}$ est strictement décroissante.

*Démonstration.*

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3n+4}{n+1} - \frac{3(n+1)+4}{(n+1)+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0\,,$$

donc $a_n > a_{n+1}$. ◇

- Soit $(\alpha_n)$ une suite telle que $\alpha_n \geqslant 0$ pour tout $n$. Alors la suite $(a_n)$ définie par $a_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ est croissante, puisque $a_{n+1} - a_n = \alpha_{n+1} \geqslant 0$.

◇

## 1.3 Suites tendant vers l'infini

On dit qu'une suite tend vers l'infini si pour n'importe quel nombre $M$, les termes de la suite deviennent plus grand que $M$ à partir d'un certain indice. Voici la définition formelle.

**Définition 1.8.** Une suite $(a_n)$

1. **tend vers** $+\infty$ si pour tout $M > 0$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n \geqslant M$ pour tout $n \geqslant N_0$. On écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ou $a_n \to +\infty$.
2. **tend vers** $-\infty$ si pour tout $m < 0$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n \leqslant m$ pour tout $n \geqslant N_0$. On écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ou $a_n \to -\infty$.

On dit aussi que la suite **diverge vers l'infini**.

Il faut penser de $M$ comme un “seuil”. Une suite tendant vers $+\infty$ va, au bout d'un moment, dépasser et rester au dessus de n'importe quel seuil. L'indice $N_0$ à partir duquel elle dépasse seuil dépend de la valeur de $M$.

**Définition 1.9.** Une suite $(a_n)$ **tend vers** $-\infty$ si pour tout $m < 0$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n \leqslant m$ pour tout $n \geqslant N_0$. On écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ou $a_n \to -\infty$.

Pour pouvoir facilement parler du comportement d'une suite lorsque l'indice $n$ devient de plus en plus grand, il est pratique d'introduire la terminologie suivante : étant donné $N_0 \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : n \geqslant N_0\}$ est appelé un **voisinage de l'infini**. La définition de tendre vers l'infini devient donc : $a_n \to \infty$ si pour tout $M > 0$, il existe un voisinage de l'infini tel que $a_n \geqslant M$ pour des indices $n$ dans ce voisinage de l'infini.

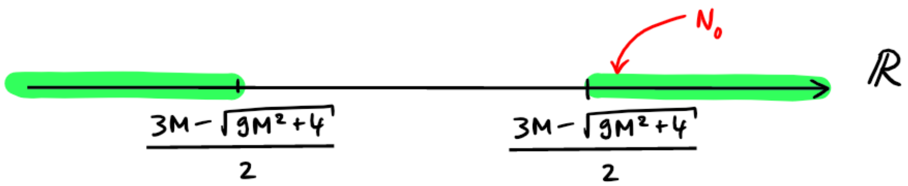
**Exemples 1.10.**
- $\{n \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant 173\}$ est un voisinage de l'infini.
- $\{n \in \mathbb{N} \,:\, (n-7)^2 > 4\}$ contient un voisinage de l'infini.
- $\{2n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ ne contient pas un voisinage de l'infini.

◇

**Exemple 1.11.** Soit $a_n = \frac{n^2-1}{3n}$. Montrons que $a_n \to \infty$.

Étant donné un $M > 0$, il nous faut montrer qu'il existe $N_0$ tel que $a_n \geqslant M$ pour tout $n \geqslant N_0$. On a

$$\begin{aligned} a_n \geqslant M &\iff \frac{n^2-1}{3n} \geqslant M \\ &\iff n^2 - 1 \geqslant 3Mn \\ &\iff n^2 - 3Mn - 1 \geqslant 0 \\ &\iff n \in \left]-\infty, \frac{3M - \sqrt{9M^2+4}}{2}\right] \cup \left[\frac{3M + \sqrt{9M^2+4}}{2}, \infty\right[. \end{aligned}$$




Si on choisit $N_0 \in \left[\frac{3M+\sqrt{9M^2+4}}{2}, \infty\right[$, on aura $a_n \geqslant M$ pour tout $n \geqslant N_0$, par les équivalences au-dessus. On peut donc par exemple prendre

$$N_0 = \left\lceil \frac{3M + \sqrt{9M^2+4}}{2} \right\rceil,$$

le nombre réel $\frac{3M+\sqrt{9M^2+4}}{2}$ arrondi vers le haut. ◇

**Exemple 1.12.** Soit $\alpha > 0$ et $a_n = \alpha n$. On va montrer que $a_n \to \infty$.

Etant donné $M > 0$, il faut donner un $N_0$ tel que $a_n > M$ pour tout $n \geqslant N_0$. Or $\alpha n > M \Leftrightarrow n > \frac{M}{\alpha}$. On choisit donc n'importe quel entier $N_0 > \frac{M}{\alpha}$, il sera tel que

$$n \geqslant N_0 \Rightarrow n > \frac{M}{\alpha} \Rightarrow a_n > M.$$

◇

**Exemple 1.13.** Montrons que $a_n = \sqrt{n}$ tend vers l'infini.

Etant donné $M > 0$, il faut donner un $N_0$ tel que $a_n > M$ pour tout $n \geqslant N_0$. Or $\sqrt{n} > M \Leftrightarrow n > M^2$.

On choisit donc n'importe quel entier $N_0 > M^2$, il sera tel que

$$n \geqslant N_0 \Rightarrow a_n > M.$$

◇

**Remarque 1.14.** On a montré auparavant que $a_n = \sqrt{n}$ n'est pas majorée :

$$\forall M > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } a_N > M.$$

Dans l'exemple ci-dessus, on vient de montrer que $a_n = \sqrt{n}$ tend vers l'infini :

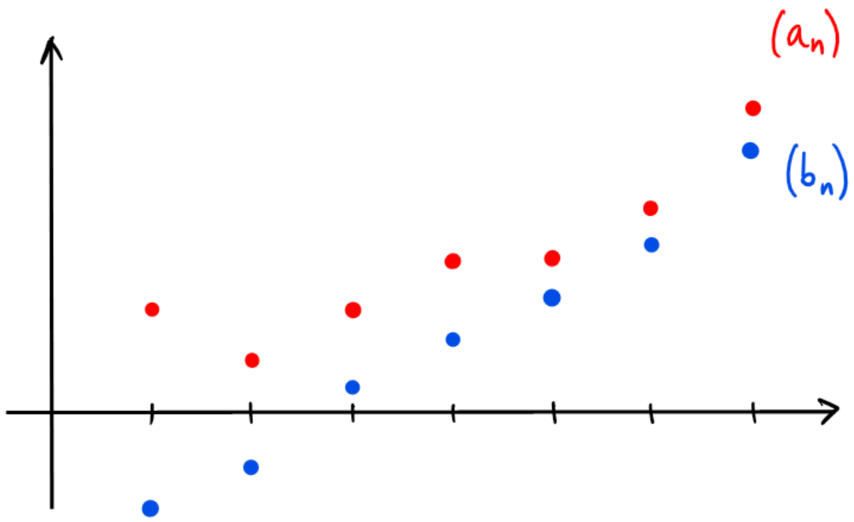
$$\forall M > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n \geqslant N \Rightarrow a_n > M.$$

Ces deux affirmations ne sont bien sûr pas équivalentes : si une suite $a_n$ tend vers l'infini, alors pour tout candidat majorant $M > 0$ qu'on nous propose, il existe un seuil $N$ à partir duquel **tous les termes** de la suite dépassent ce $M$. A plus forte raison, on peut exhiber un terme de la suite qui dépasse $M$, ce qui montre que la suite n'est pas majorée. La réciproque est fausse : par exemple, la suite $(-2)^n$ n'est pas majorée, mais elle ne tend pas vers l'infini : elle admet une infinité de termes négatifs.

Une suite non majorée ne tend donc pas nécessairement vers l'infini, mais ce sera le cas si une condition supplémentaire est vérifiée : si une suite $a_n$ est croissante et non majorée, alors elle tend vers l'infini (ce résultat sera prouvé dans un exercice facultatif). ◇

**Théorème 1.15** (Théorème du chien méchant). *Soit $(a_n)$ une suite.*

1. *Si $(b_n)$ est une autre suite telle que $a_n \geqslant b_n$ pour tout $n$, et $b_n \to +\infty$, alors $a_n \to +\infty$.*
2. *Si $(c_n)$ est une autre suite telle que $a_n \leqslant c_n$ pour tout $n$, et $c_n \to -\infty$, alors $a_n \to -\infty$.*




*Démonstration.* On démontre la première affirmation.

Supposons que $a_n \geqslant b_n$ pour tout $n$, et que $b_n \to +\infty$.

Fixons $M > 0$. Comme $b_n \to +\infty$, on sait qu'il existe $N_0$ tel que

$$b_n \geqslant M \qquad \forall n \geqslant N_0 .$$

Puisque $a_n \geqslant b_n$, ceci implique donc

$$a_n \geqslant M \qquad \forall n \geqslant N_0 .$$

On a donc montré que $a_n \to +\infty$. □

Si la condition $a_n \geqslant b_n$ n'est vraie qu'à partir d'un certain indice, on a toujours la même conclusion. On a un théorème analogue dans le cas de $-\infty$.

**Exemple 1.16.** Reprenons l'exemple ci-dessus.

On a $a_n = \frac{n^2-1}{3n} \geqslant \frac{n^2-3n}{3n} = \frac{n}{3} - 1 =: b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Or, $b_n \to \infty$ (en effet : pour $M > 0$, $\frac{n}{3} - 1 \geqslant M \iff n \geqslant 3M + 3$, donc en prenant un entier $N_0 \geqslant 3M + 3$, on a $b_n \geqslant M$ pour tout $n \geqslant N_0$). Par le théorème du chien méchant, on a donc aussi $a_n \to \infty$. ◇

## 1.4 Suites convergentes

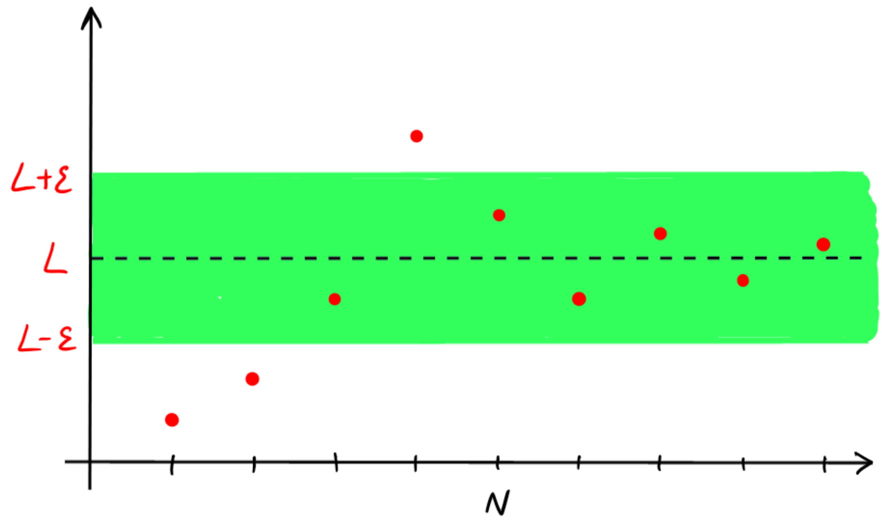
Informellement, on dit qu'une suite $(a_n)$ converge vers une limite $L$ si les termes de la suite deviennent arbitrairement proches de $L$ lorsque l'indice $n$ est suffisamment grand. Pour rendre cette définition plus mathématiquement précise, il nous faut une façon d'exprimer cette notion de devenir "arbitrairement proche" de $L$.

On peut exprimer la distance entre deux nombres réels $a$ et $b$ en utilisant la valeur absolue : $|a-b|$. Ainsi, $\{x \in \mathbb{R} : |a-x| \leqslant \varepsilon\}$ est l'ensemble des $x$ qui sont à distance au plus $\varepsilon$ de $a$. Un tel $x$ est dit $\varepsilon$-**proche** de $a$, et cet ensemble est appelé l'$\varepsilon$-**voisinage** de $a$. On a

$$\{x \in \mathbb{R} : |a-x| \leqslant \varepsilon\} = [a-\varepsilon, a+\varepsilon].$$

Pour que $(a_n)$ converge vers $L$, on voudrait que les termes de la suite finissent par être dans l'$\varepsilon$-voisinage de $L$, pour $\varepsilon$ aussi petit qu'on veut.

**Définition 1.17.** Une suite $(a_n)$ **converge vers une limite** $L \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|a_n - L| \leqslant \varepsilon$. On écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ou $a_n \to L$.




L'indice $N$ va en général dépendre de $\varepsilon$.

**Exemples 1.18.**

- Soit $a_n = \frac{1}{n}$. On montre que $a_n \to 0$.

  Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N$ tel que $|a_n - 0| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. On a $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Donc si on prend n'importe quel $N$ tel que $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, on aura bien que $|a_n - 0| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.

- Soit $a_n = \frac{1}{2n+1}$. On montre que $a_n$ ne tend pas vers $\frac{1}{2}$.

  On a $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2-(2n+1)}{2(2n+1)}\right| = \frac{2n-1}{4n+2}$, et donc

  $$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \varepsilon \iff \frac{2n-1}{4n+2} \leqslant \varepsilon \iff n \leqslant \frac{1+2\varepsilon}{2-4\varepsilon},$$

  où la dernière équivalence est vraie pour $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ (par exemple, $\varepsilon = \frac{1}{4}$) où on ne peut pas trouver $N$ tel que $\forall n \geqslant N$, on a $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \varepsilon$. Ceci veut dire que $a_n \nrightarrow \frac{1}{2}$.

- Soit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On montre que $a_n \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On veut exhiber un $N$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$. Or
$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Longleftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$
On choisit donc n'importe quel $N > \frac{1}{\varepsilon^2}$ : il sera tel que tout $n \geqslant N$ satisfait $|a_n - 0| < \varepsilon$.
- Soit $a_n = \frac{2n^2-1}{n^2+1}$. On montre que $a_n \to 2$.
Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N$ tel que $|a_n - 2| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. On a
$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n^2-1}{n^2+1} - 2\right| = \left|\frac{2n^2-1}{n^2+1} - \frac{2n^2+2}{n^2+1}\right| = \left|\frac{2n^2-1-2n^2-2}{n^2+1}\right| = \frac{3}{n^2+1}.$$
Donc $|a_n - 2| \leqslant \varepsilon \iff \frac{3}{n^2+1} \leqslant \varepsilon \iff n^2 \geqslant \frac{3}{\varepsilon} - 1$.
  1. Si $\varepsilon \geqslant 3$, $\frac{3}{\varepsilon} - 1 \leqslant 0$ et donc tout $n$ garantit $|a_n - 2| \leqslant \varepsilon$.
  2. Si $0 < \varepsilon < 3$, on a $n^2 \geqslant \frac{3}{\varepsilon} - 1 \iff n \geqslant \sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 1}$, car $n \in \mathbb{N}^*$, et on peut donc choisir n'importe quel $N \geqslant \sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 1}$ pour que $|a_n - 2| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.

◇

**Remarque 1.19.** Une condition équivalente à $a_n \to L$ est que tout $\varepsilon$-voisinage de $L$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini. Ceci donne une façon utile de montrer qu'une suite ne converge pas : on montre que pour toute limite potentielle $L \in \mathbb{R}$, il y a un $\varepsilon > 0$ tellement petit que l'$\varepsilon$-voisinage exclut une infinité de termes de la suite.

Par exemple, la suite $a_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite car pour n'importe quel candidat de limite $L$, une infinité de termes de la suite ne font pas partie de l'$\varepsilon$-voisinage de $L$ pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$. ◇

Donc une suite réelle peut

1. **converger**, c'est-à-dire admettre une limite réelle $L$
2. **diverger** (c'est-à-dire ne pas converger)
   - en tendant vers $-\infty$ ou $+\infty$
   - sans tendre vers $-\infty$ ou $+\infty$ : par exemple $(-1)^n$, $n \cdot (-1)^n$, ...

## 1.5 Propriétés des limites

**Théorème 1.20.** *Une suite convergente n'admet qu'une seule limite.*

*Démonstration.* Exercice facultatif, utilisant la remarque précédente. □

**Théorème 1.21.** *Une suite convergente est bornée.*

*Démonstration.* Supposons que $a_n \to L$. Prenons un $\varepsilon > 0$ quelconque, par exemple $\varepsilon = 3$. Puisque $a_n \to L$, il existe $N$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|a_n - L| \leqslant 3$. À partir de l'indice $N$, on a donc $|a_n| \leqslant 3 + |L|$. Si on définit
$$C := \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{N-1}|, 3 + |L|\},$$
alors $|a_n| \leqslant C$ pour tout $n$ ; $(a_n)$ est donc bornée. □

**Proposition 1.** *On a les propriétés des limites suivantes.*

1. $a_n \to L, \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda a_n \to \lambda L$.
2. $a_n \to L_1, b_n \to L_2 \Longrightarrow a_n + b_n \to L_1 + L_2$.
3. $a_n \to L_1, b_n \to L_2 \Longrightarrow a_n b_n \to L_1 L_2$.
4. $a_n \to L_1, b_n \to L_2 \neq 0 \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{L_1}{L_2}$.
5. $a_n \to L_1, b_n \to L_2$ *et* $a_n \leqslant b_n \ \forall n \Longrightarrow L_1 \leqslant L_2$.
6. $a_n \to L \Longrightarrow |a_n| \to |L|$.
7. $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$.

*Démonstration.*

- Preuve de 3) : Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il faut montrer qu'il existe $N$ tel que $|a_n b_n - L_1 L_2| \leqslant \varepsilon \ \forall n \geqslant N$. Puisque $(b_n)$ est une suite convergente, elle est bornée et il existe donc $C$ tel que $|b_n| \leqslant C \ \forall n$ (par le théorème précédent).
  Comme $a_n \to L_1$, $\exists N_1$ tel que $|a_n - L_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C} \ \forall n \geqslant N_1$.
  Comme $b_n \to L_2$, $\exists N_2$ tel que $|b_n - L_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2|L_1|} \ \forall n \geqslant N_2$.
  En prenant $N := \max\{N_1, N_2\}$, on a $\forall n \geqslant N$ :

$$\begin{aligned} |a_n b_n - L_1 L_2| &= |a_n b_n - L_1 b_n + L_1 b_n - L_1 L_2| \\ &= |b_n(a_n - L_1) + L_1(b_n - L_2)| \\ &\leqslant |b_n(a_n - L_1)| + |L_1(b_n - L_2)| \\ &= |b_n| \cdot |a_n - L_1| + |L_1| \cdot |b_n - L_2| \\ &\leqslant C\frac{\varepsilon}{2C} + |L_1|\frac{\varepsilon}{2|L_1|} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

- Preuve de 5) : Par l'absurde : supposons que $L_1 > L_2$. Soit $\varepsilon := \frac{L_1 - L_2}{3}$ et prenons $N_1$ tel que $a_n$ est dans l'$\varepsilon$-voisinage de $L_1 \ \forall n \geqslant N_1$, et $N_2$ tel que $b_n$ est dans l'$\varepsilon$-voisinage de $L_2 \ \forall n \geqslant N_2$. En particulier, $\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, on a $a_n > b_n$, ce qui est absurde.

On laisse les preuves des autres assertions en exercice facultatif. □

**Exemple 1.22.** Reprenons l'exemple de $a_n = \frac{2n^2-1}{n^2+1}$, pour lequel on avait montré que $a_n \to 2$, uniquement à l'aide de la définition de limite.

Une autre façon d'obtenir le même résultat est de remarquer que

$$a_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} = \frac{n^2(2 - \frac{1}{n^2})}{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} = \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Or on peut montrer que $\frac{1}{n^2} \to 0$. En effet, pour $\varepsilon > 0$, on a $\left|\frac{1}{n^2}\right| \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. En prenant $N$ tel que $N \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, on a donc $\left|\frac{1}{n^2}\right| \leqslant \varepsilon \ \forall n \geqslant N$.

Donc maintenant, à l'aide des propriétés de la limite listées ci-dessus,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2\,.$$

◇

**Théorème 1.23** (Théorème des deux gendarmes)**.** *Soit $(x_n)$ une suite. S'il existe deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que*

- $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ $\forall n$ *suffisamment grand, et*
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$,

*alors* $\lim_{n\to\infty} x_n = L$.

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$. On cherche un $N$ tel que $|x_n - L| \leqslant \varepsilon$ $\forall n \geqslant N$. On a

- $\exists N_1$ tel que $|a_n - L| \leqslant \varepsilon$ $\forall n \geqslant N_1$,
- $\exists N_2$ tel que $|b_n - L| \leqslant \varepsilon$ $\forall n \geqslant N_2$, et
- $\exists N_3$ tel que $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ $\forall n \geqslant N_3$.

Pour $n \geqslant N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$, on a

$$L - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant x_n \leqslant b_n \leqslant L + \varepsilon$$

et donc $L - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant L + \varepsilon$, ce qui est équivalent à $|x_n - L| \leqslant \varepsilon$. Donc $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. □

**Exemple 1.24.** Montrons que la suite $x_n = \frac{(n-1)^2}{n!}$ tend vers zéro.

On va trouver $a_n, b_n \to 0$ telles que $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$. Puisque $x_n \geqslant 0$ $\forall n$, on peut prendre $a_n = 0$. Pour trouver une suite $(b_n)$, on remarque que

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(n-1)(n-1)}{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n-1}{n(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-2}\right)\left(\frac{1}{n-3}\right)\cdots\frac{1}{2} \\ &\leqslant \frac{1}{n-2}. \end{aligned}$$

On peut donc prendre $b_n = \frac{1}{n-2}$, et on a $b_n \to 0$. Le théorème des deux gendarmes implique que $x_n \to 0$. ◇

On peut aussi utiliser ce théorème pour montrer la propriété des limites suivante.

**Corollaire 1.** *Soient $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites. Si $x_n \to 0$ et $(y_n)$ est bornée, alors $x_n y_n \to 0$.*

*Démonstration.* Puisque $(y_n)$ est bornée, il existe $C$ tel que $|y_n| \leqslant C$ $\forall n$. On a donc $0 \leqslant |x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leqslant C|x_n|$. On pose alors $a_n = 0$ et $b_n = C|x_n|$. Puisque $a_n, b_n \to 0$, par le théorème des deux gendarmes, on a $|x_n y_n| \to 0$, et donc $x_n y_n \to 0$ par les propriétés des limites vues ci-dessus. □

**Exemple 1.25.** La suite $a_n = \frac{\sin(n^2+7\cos(n^2))}{n}$ tend vers zéro, car $a_n = x_n y_n$ où $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ et $y_n = \sin(n^2 + 7\cos(n^2))$ est bornée, car $|y_n| \leqslant 1$. ◇

Le résultat suivant est souvent résumé en disant que toute suite monotone et bornée converge.

**Théorème 1.26.**

- *Une suite croissante et majorée converge.*
- *Une suite décroissante et minorée converge.*

**Exemples 1.27.**
- $a_n = \frac{n}{n+1}$ est croissante car
$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geqslant 0.$$
De plus, $a_n = \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{n+1}{n+1} = 1$ $\forall n$, et donc $(a_n)$ est majorée. Par le théorème ci-dessus, $(a_n)$ est convergente.
- $a_n = n$ est croissante mais pas majorée. Cette suite diverge, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
- $a_n = (-1)^n$ est bornée mais pas monotone. Elle n'a pas de limite.
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est bornée, pas monotone, et converge : $a_n \to 0$.

◇

Le dernier exemple montre qu'être monotone et borné n'est pas une condition nécessaire pour la convergence.

## 1.6 Limites “combinées” et indéterminations

- $(a_n \to +\infty$ et $b_n \to +\infty) \Longrightarrow a_n + b_n \to +\infty$.
- $(a_n \to +\infty$ et $b_n \to +\infty) \Longrightarrow a_n - b_n$ est indéterminé (“$\infty - \infty$”).
Exemples :
— $\lim_{n\to\infty}(3^n - 2^n) = +\infty$,
— $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$.
- $(a_n \to +\infty$ et $b_n \to +\infty) \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n}$ est indéterminé $\left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\right)$.
Exemple :
— $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$.
- $(a_n \to +\infty$ et $b_n$ est bornée $) \Longrightarrow a_n + b_n \to +\infty$.
- $(a_n \to +\infty$ et $b_n \to L, L \neq 0) \Longrightarrow a_n b_n \to \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 0, \\ -\infty & \text{si } L < 0. \end{cases}$
- $(a_n \to +\infty$ et $b_n \to 0) \Longrightarrow a_n b_n$ est indéterminé (“$\infty \times 0$”).
Exemples :
— $n^2 \cdot \frac{1}{n} \to +\infty$,
— $n \cdot \frac{1}{n} \to 1$,
— $n \cdot \frac{1}{n^2} \to 0$,
— $n \cdot \frac{(-1)^n}{n}$ ne converge pas.
- $(a_n \to +\infty$ et $\exists \delta > 0$ tel que $b_n \geqslant \delta$ $\forall n$ suffisamment grand $) \Longrightarrow$
$a_n b_n \to +\infty$.
Exemple :
— $x_n = n\left(1 + \frac{1}{3}\cos(n^2+7)\right) \to +\infty$, car $n \to +\infty$ et $1 + \frac{1}{3}\cos(n^2+7) \geqslant 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \delta > 0$.
- $(a_n \to +\infty$ et $\exists \delta > 0$ tel que $b_n \leqslant -\delta$ $\forall n$ suffisamment grand $) \Longrightarrow$
$a_n b_n \to -\infty$.

Remarquons que pour les deux dernières propriétés, il ne suffit pas d'avoir $b_n > 0$ (ou $b_n < 0$) : il nous faut que $b_n$ “reste loin de $0$”. Par exemple, si $a_n = n \to +\infty$ et $b_n = \frac{1}{n}$, on a $a_n b_n = 1$ $\forall n$, même si $b_n > 0$ pour tout $n$.

## 1.7 Séries géométriques

**Lemme** Soit $r \in \mathbb{R}$ et soit $a_n := r^n$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n \begin{cases} \text{tend vers } +\infty & \text{si } r > 1, \\ = 1 & \text{si } r = 1, \\ = 0 & \text{si } -1 < r < 1, \\ \text{n'existe pas} & \text{si } r \leqslant -1. \end{cases}$$

**Définition 1.28.** Une suite de la forme $a_n = r^n$, $r \in \mathbb{R}$, est appelée **suite géométrique**.

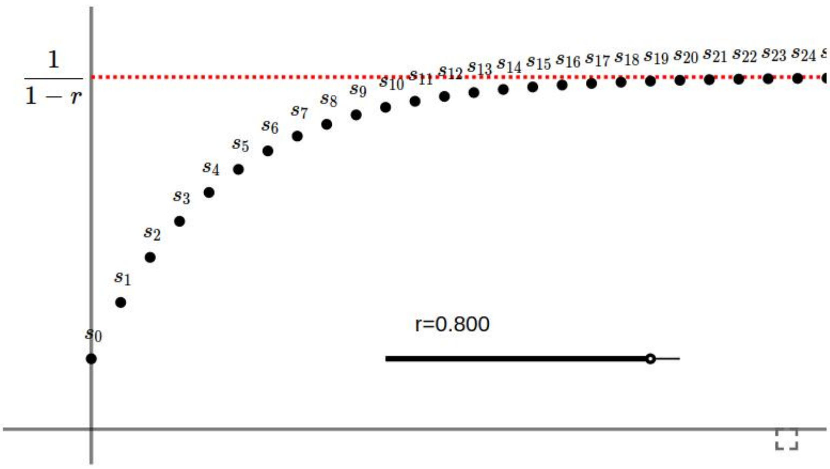
On considère maintenant la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\begin{aligned} S_0 &:= 1 \\ S_1 &:= 1 + r \\ S_2 &:= 1 + r + r^2 \\ &\vdots \\ S_n &:= 1 + r + r^2 + \cdots + r^n \\ &\vdots \end{aligned}$$

**Théorème 1.29.**

$$\lim_{n\to\infty} S_n \begin{cases} = +\infty \text{ (diverge)} & \text{si } r \geqslant 1, \\ = \frac{1}{1-r} & \text{si } -1 < r < 1, \\ \text{n'existe pas} & \text{si } r \leqslant -1. \end{cases}$$

Sur l'animation suivante, on observe le comportement de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$, en fonction de $r$ :




Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

*Démonstration.* Si $r \geqslant 1$, $S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n \geqslant 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1 \to +\infty$, donc $S_n \to +\infty$ par le théorème du chien méchant.

Si $r < 1$, on a

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^n \\ rS_n &= r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n+1}, \end{aligned}$$

et donc $S_n - rS_n = S_n(1-r) = 1 - r^{n+1}$. On obtient

$$S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

En vue du lemme précédent, si $-1 < r < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r}$, et si $r \leqslant -1$, $S_n$ n'a pas de limite.

□

On voit donc que pour $|r| < 1$, la somme infinie $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ converge.

La suite $(S_n)$ au-dessus est appelée la **suite des sommes partielles**.

**Définition 1.30.** Soit $r \in R$ tel que $|r| < 1$. La somme infinie $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ est appelée **série géométrique**, et $r$ est dit la **raison** de cette série. On peut écrire $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$.

Attention : une somme infinie n'a de sens que si elle converge.

**Exemples 1.31.**

- On évalue la somme infinie $1-0.7+0.7^2-0.7^3+0.7^4-\cdots$ en utilisant la série géométrique de raison $-0.7$ :

$$1 - 0.7 + 0.7^2 - 0.7^3 + \cdots = 1 + (-0.7) + (-0.7)^2 + (-0.7)^3 + \cdots = \frac{1}{1-(-0.7)} = \frac{10}{17}.$$

- On évalue la somme infinie $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$ en utilisant la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ :

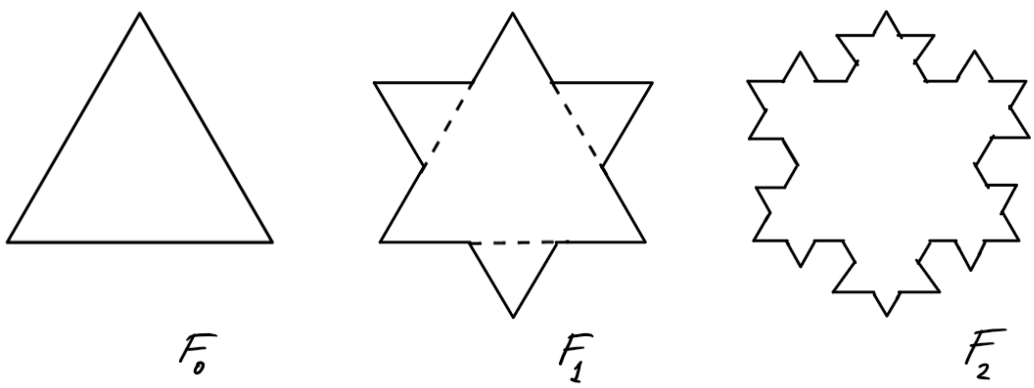
$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

- La somme infinie $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots$ ne converge pas, puisque $r = 2 > 1$.

◇

**Exemple 1.32.** Les séries géométriques sont utiles dans plein de contextes. Voici un exemple géométrique : **le flocon de von Koch**.

On construit les formes géométriques suivantes par récurrence, en commençant par un triangle équilatéral $F_0$, d'aire $1$. À chaque étape, on "colle" des petits triangles équilatéraux au milieu de chaque côté de la forme précédente (la longueur des côtés d'un petit triangle est un tiers de la longueur du côté à laquelle on le colle).



$$\text{On pose } A_n := \text{ aire de } F_n$$
$$\text{et } C_n := \text{ nombre de côtés de } F_n.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1\\
&C_0 = 3\\
&A_1 = A_0 + C_0 \cdot \frac{1}{9} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{9}\\
&C_1 = 3 \cdot 4\\
&A_2 = A_1 + C_1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2\\
&C_2 = 3 \cdot 4 \cdot 4\\
&A_3 = A_2 + C_2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3\\
&C_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

On déduit donc les expressions

$$\begin{aligned}
&A_n = 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \cdots + 3 \cdot 4^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^n\\
&C_n = 3 \cdot 4^n
\end{aligned}$$

On peut réécrire $A_n$ de la façon suivante :

$$A_n = 1 + \frac{3}{9}\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right].$$

On voit apparaître donc la série géométrique de raison $r = \frac{4}{9}$. Ainsi, on a

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 1 + \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5}.$$

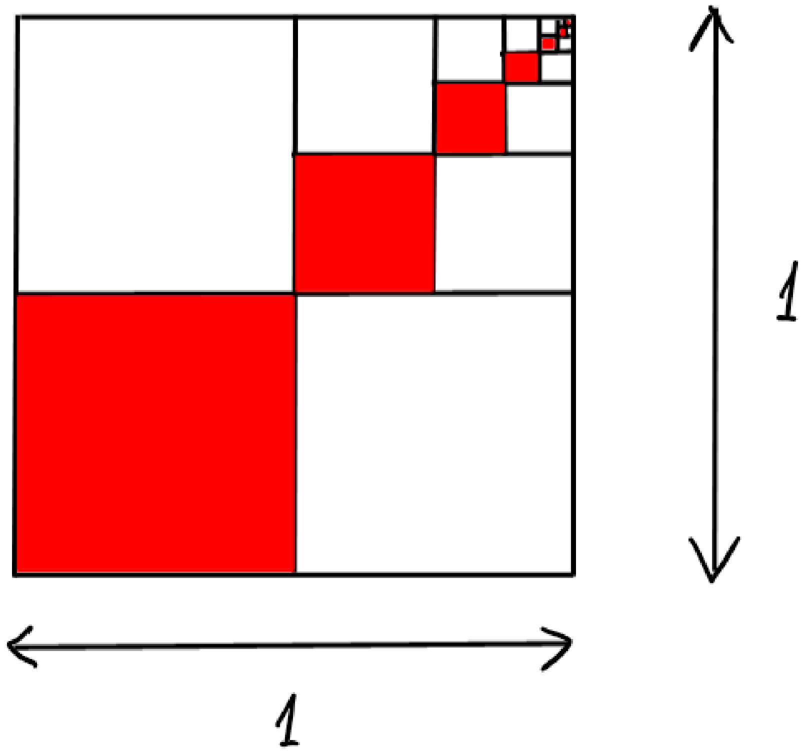
$\diamond$

**Exemple 1.33.** On peut montrer que tout nombre réel dont le développement décimal est périodique est un nombre rationnel, à l'aide des séries géométriques. On prend l'exemple de $x = 1.1515151515151\ldots$, mais ce qu'on va dire se généralise facilement à n'importe quel nombre à développement décimal périodique. On exprime $x$ ainsi :

$$\begin{aligned}
x &= 1 + 0.15 + 0.0015 + 0.000015 + 0.00000015 + \cdots\\
&= 1 + 15 \cdot \frac{1}{100} + 15 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 + 15 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots\\
&= 1 + 15 \cdot \frac{1}{100}\left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots\right]\\
&= 1 + 15 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + \frac{15}{99} = \frac{114}{99}.
\end{aligned}$$

On voit donc que $x = \frac{114}{99} \in \mathbb{Q}$. ◇

**Exemple 1.34.** La série géométrique suivante est une des premières à être évaluée dans l'histoire des mathématiques, par Archimède.




L'aire $A$ indiquée ci-dessus en rouge peut être évaluée en utilisant une série géométrique.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots \\ &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots \\ &= \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots\right] - 1 \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La méthode de Archimède était plutôt géométrique : on constate que trois fois l'aire rouge donne l'aire du carré. On a donc $3A = 1$, d'où $A = \frac{1}{3}$. ◇

## 1.8 Le nombre $e$

Une application importante des suites géométriques est l'existence du **nombre d'Euler**, $e$.
Rappel : la **factorielle** $n!$ de $n \in \mathbb{N}$ est définie par

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Pour le cas de $n = 0$, on pose $0! = 1$.

Soit $(e_n)$ la suite définie par

$$e_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

**Proposition 2.** *La suite $(e_n)$ converge.*

*Démonstration.* On va montrer que $(e_n)$ est croissante et majorée, et donc elle converge.

- $(e_n)$ est croissante : $e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} > e_n$.
- $(e_n)$ est majorée : $e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et pour $k \geqslant 2$, chaque $\frac{1}{k!}$ peut être majoré,

  $$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k} \leqslant \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

  On a donc

  $$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant 2 + 1 = 3.$$

  Alors on a $e_n \leqslant 3 \ \forall n$.
- $(e_n)$ converge car elle est croissante et majorée.

□

**Définition 1.35.** La limite de la suite convergente $(e_n)$ est appelée $e$.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

On note que la valeur numérique de $e$ est $2.71828\ldots$. On peut montrer que $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (exercice facultatif).

**Remarque 1.36.** On a utilisé la notation $\sum$ pour faciliter (ou pas !) l'écriture des sommes. C'est utile de savoir manipuler cette notation, voici quelques exemples de différentes façons d'écrire les mêmes expressions.

- $$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots 9 + 10 = \sum_{n=1}^{10} n = \sum_{k=1}^{10} k.$$

  L'indice utilisé n'importe pas.
- $$2 + 4 + 6 + \cdots 18 + 20 = \sum_{n=1}^{10} 2n = 2 \sum_{n=1}^{10} n.$$

  Ceci découle des règles basiques de calcul.
- $$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots 9 + 10 = \sum_{n=1}^{10} n = \sum_{k=2}^{11} (k-1).$$

  Ceci découle d'un changement d'indice, $k = n + 1$.

- $$\text{Si } |r| < 1,\ r^N \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=N}^{\infty} r^n.$$

  Ceci découle de la définition de cette somme infinie (cf. exercice facultatif).
- $$\sum_{n=1}^{10} k = 10k.$$

  Dans cet exemple, l'indice n'apparaît pas dans l'expression, c'est donc la somme $k + k + \cdots + k$, où $k$ apparaît $10$ fois.
  Attention : $\sum_{n=0}^{10} k = 11k$.

$\diamond$