Chapitre 3

Limites de fonctions

3.1 Limites $x \to \pm\infty$

On va d'abord parler des limites de fonctions lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, car cette situation est en analogie avec les limites de suites. Pour pouvoir étudier le comportement de f lorsque $x \to \pm\infty$, il faut que f soit définie en tout point aribtrairement loin de l'origine.

Définition 3.1.
- On dit que f est **définie sur un voisinage de** $+\infty$ s'il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $[u, \infty[\subset D_f$.
- On dit que f est **définie sur un voisinage de** $-\infty$ s'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, v] \subset D_f$.

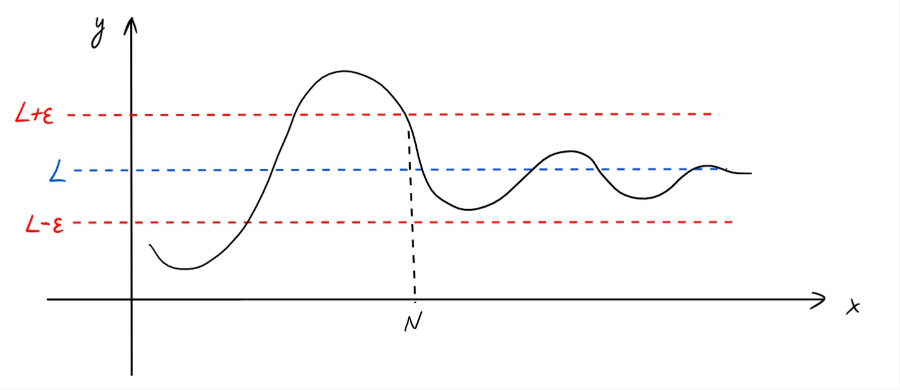
Exemples 3.2.
- $\frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, et donc sur un voisinage de $+\infty$, donné par $]0, +\infty[$, ainsi que sur un voisinage de $-\infty$, donné par $]-\infty, 0[$.
- $\tan(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, et donc sur aucun voisinage de l'infini.

◇

Avant de définir formellement $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, parlons de l'idée intuitive derrière : f tend vers une limite L lorsque $x \to +\infty$ si $f(x)$ devient arbitrairement proche de L lorsque x est suffisamment grand. Il faut donc que, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on puisse trouver une valeur de x suffisamment grande à partir de laquelle $f(x)$ est ε-proche de L.

Définitions 3.3.
- Soit f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$, et soit $L \in \mathbb{R}$.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon\ \forall x \geqslant N$.



- Soit f une fonction définie sur un voisinage de $-\infty$, et soit $L \in \mathbb{R}$.

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N < 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon\ \forall x \leqslant N$.

Remarquons que la valeur de N va en général dépendre de ε.

Exemples 3.4.

- Soit $f(x) := \frac{x}{3x-2}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{2}{3}\}$. Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{3}$.

  Soit $\varepsilon > 0$. On a

  $$\left|f(x) - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{x}{3x-2} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{2}{3(3x-2)}\right| = \frac{2}{3|3x-2|}.$$

  Donc

  $$\left|f(x) - \frac{1}{3}\right| \leqslant \varepsilon \iff \frac{2}{3|3x-2|} \leqslant \varepsilon \iff |3x-2| \geqslant \frac{2}{3\varepsilon}.$$

  Puisque on s'intéresse à $x \to +\infty$, on peut poser $x > \frac{2}{3}$ (en effet, on cherche à trouver un voisinage de l'infini dans lequel $f(x)$ est ε-proche de $\frac{1}{3}$. Imposer une condition supplémentaire du type "x est assez grand" ne changera rien à l'existence d'un tel voisinage de l'infini). On a donc

  $$\left|f(x) - \frac{1}{3}\right| \leqslant \varepsilon \iff 3x-2 \geqslant \frac{2}{3\varepsilon} \iff x > \frac{2}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}.$$

  et donc on peut choisir $N := \frac{2}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}$. En effet, ce N satisfait

  $$x > \frac{2}{9\varepsilon} + \frac{2}{3} \Longrightarrow \left|f(x) - \frac{1}{3}\right| \leqslant \varepsilon.$$

  On en conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{3}$.

- Montrons que $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

  Soit $\varepsilon > 0$. On a

  $$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| \leqslant \varepsilon &\iff \frac{1}{x^2} \leqslant \varepsilon \\ &\iff x^2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \\ &\iff x \in]-\infty, \tfrac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}] \cup [\tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \infty[, \end{aligned}$$

  donc si on choisit $N \leqslant \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}$, on aura que $\forall x \leqslant N$, $\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| \leqslant \varepsilon$.

◇

Etant donnée une suite (x_n), en appliquant une fonction f à chaque terme, on obtient une nouvelle suite $(f(x_n))$. On remarque que si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, alors pour n'importe quelle suite de nombres (x_n) avec $x_n \to \infty$, on a $f(x_n) \to L$. La réciproque est vraie aussi !

Théorème 3.5 (Caractérisation par les suites).

- *Soit f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$.*

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \textit{pour toute suite } (x_n) \textit{ telle que } x_n \to \infty, \textit{ on a } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

- *Soit f une fonction définie sur un voisinage de $-\infty$.*

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \iff \textit{pour toute suite } (x_n) \textit{ telle que } x_n \to -\infty, \textit{ on a } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Démonstration. Montrons la version $x \to +\infty$ (la version $x \to -\infty$ peut être montrée de manière analogue).

Voici la direction “facile” : supposons d'abord que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Par définition, ceci veut dire que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon\ \forall x \geqslant N$. Soit (x_n) une suite telle que $x_n \to \infty$, et soit $\varepsilon > 0$. Il nous faut trouver un indice à partir duquel $f(x_n)$ est ε-proche de L.

Puisque $x_n \to \infty$, il existe un indice N_0 à partir duquel $x_n \geqslant N(\varepsilon)$. Pour $n \geqslant N_0$, on a alors $x_n > N(\varepsilon)$ et donc $|f(x_n) - L| \leqslant \varepsilon$. N_0 est donc l'indice qu'on voulait trouver.

Pour l'autre direction, on va montrer la contraposée : si $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq L$, alors il existe une suite (x_n) telle que $x_n \to +\infty$, mais $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$. D'abord, explicitons l'assertion $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq L$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) \neq L$ veut dire : $\exists\varepsilon > 0$ tel que $\forall N > 0$, $\exists x \geqslant N$ tel que $|f(x) - L| > \varepsilon$.

Supposons donc que $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq L$. On aimerait construire une suite (x_n) telle que $x_n \to \infty$ et $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$. On sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall N > 0$, $\exists x \geqslant N$ tel que $|f(x) - L| > \varepsilon$.

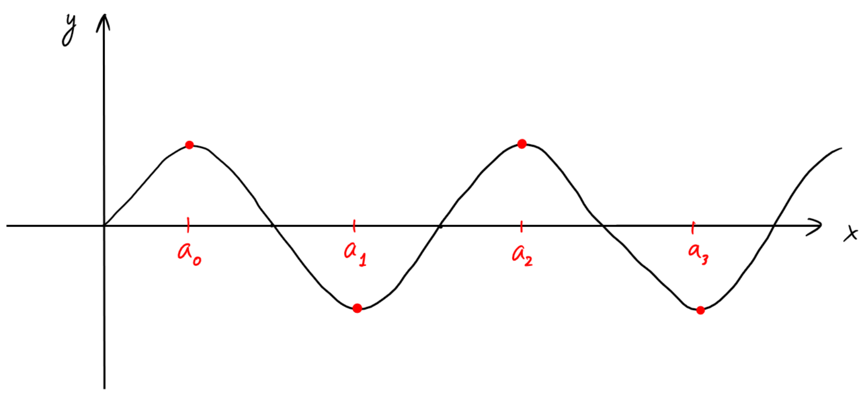
1. En prenant $N = 1$ d'abord, on aura donc $x_1 \geqslant 1$ tel que $|f(x_1) - L| > \varepsilon$.
2. En prenant $N = 2$, on aura $x_2 \geqslant 2$ tel que $|f(x_2) - L| > \varepsilon$.
3. En prenant $N = 3$, on aura $x_3 \geqslant 3$ tel que $|f(x_3) - L| > \varepsilon$.
4. etc.

En continuant de cette manière, on a construit une suite (x_n) telle que $x_n \geqslant n$, et donc $x_n \to \infty$, et $|f(x_n) - L| > \varepsilon\ \forall n$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$ puisque $f(x_n)$ est toujours à distance $> \varepsilon$ de L, et on a donc prouvé la contraposée.

□

Ce théorème est surtout utile pour montrer qu'une fonction ne tend *pas* vers une certaine limite $L \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to \pm\infty$: il suffit de trouver une suite (x_n) qui tend vers $\pm\infty$ mais telle que $f(x_n)$ ne tend pas vers L.

Exemple 3.6. Montrons que $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$ n'existe pas.



Soit (x_n) la suite définie par $x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$. On a bien que $x_n + \to \infty$. Or $\sin(x_n) = (-1)^{n+1}$, qui n'a pas de limite lorsque $n \to \infty$. Le théorème ci-dessus implique que la limite $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$ n'existe pas. (Parce que si il existait $L \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to\infty} \sin(x) = L$, alors on devrait aussi avoir $\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = L$.) ◇

Comme pour les suites, on peut définir la divergence à l'infini :

Définitions 3.7. • Soit f définie sur un voisinage de $+\infty$.
- — On dit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si $\forall M > 0, \exists N$ tel que $f(x) \geqslant M \ \forall x \geqslant N$.
- — On dit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si $\forall M < 0, \exists N$ tel que $f(x) \leqslant M \ \forall x \geqslant N$.

• Soit f définie sur un voisinage de $-\infty$.
- — On dit que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si $\forall M > 0, \exists N$ tel que $f(x) \geqslant M \ \forall x \leqslant N$.
- — On dit que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si $\forall M < 0, \exists N$ tel que $f(x) \leqslant M \ \forall x \leqslant N$.

Exemples 3.8. • Montrons que

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty\,.$$

Soit $M < 0$. On a $x^3 \leqslant M \iff x \leqslant \sqrt[3]{M}$. On peut donc choisir par exemple $N := \sqrt[3]{M}$, qui satisfait $x^3 \leqslant M \ \forall x \leqslant N$.

• Montrons que

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty\,.$$

Soit $M > 0$. On a

$$x^2 \geqslant M \iff x \leqslant -\sqrt{M} \text{ ou } x \geqslant \sqrt{M}.$$

On peut donc choisir un $N \leqslant -\sqrt{M}$, il satisfait $x^2 \geqslant M \ \forall x \leqslant N$.

◇

3.1.1 Calculs de limites

Pour chacun des types de limite introduit ci-dessus, *toutes les propriétés* énoncées pour limites de suites restent valables. De plus, les *méthodes* introduites pour étudier les limites combinées et indéterminations de suites, s'appliquent aussi aux limites de fonctions lorsque $x \to \pm\infty$.

Exemple 3.9. Pour calculer

$$\lim_{x\to\infty} \big(6x - 4x\sin(7x^2+1)\big) = \lim_{x\to\infty} x\left(6 - 4\sin(7x^2+1)\right)\,,$$

on sait que $\lim_{x\to\infty} x = \infty$ et que pour tout x, $6 - 4\sin(7x^2+1) \geqslant 6 - 4 = 2$. On a donc que

$$\lim_{x\to\infty} \big(6x - 4x\sin(7x^2+1)\big) = +\infty$$

◇

Exemple 3.10. Pour calculer

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - x^3\right)\,,$$

on remarque que le terme dominant est x^3, et donc on peut écrire

$$x^2 - x^3 = \underbrace{x^3}_{\to-\infty} \underbrace{\left(-1 + \frac{1}{x}\right)}_{\to-1}\,.$$

Comme $-1 < 0$, on peut conclure :

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - x^3\right) = +\infty\,.$$

◇

Ce dernier exemple montre qu'en général, dans une limite $x \to \pm\infty$, le comportement d'un polynôme est régi par le terme *de plus grand degré*.

Lorsqu'on étudie des quotients de polynômes, on pourra mettre les termes dominants en évidence.

Exemples 3.11.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^3}{4x^3 + 50x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{x^3\left(4 + \frac{50}{x}\right)} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(4 + \frac{50}{x}\right)} = \frac{-1}{4}$$

- $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^5 + 2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^5(5 + \frac{2}{x^5})} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{2}{x^5}} \\ &= 0 \cdot \frac{3}{5} = 0\end{aligned}$$

- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^6}{x^3 + 4x^2 + 3} = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \frac{8}{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^3}} = -\infty$$

- Même lorsque les expressions apparaissant dans le quotient ne sont pas exactement des polynômes,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 2x}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt[4]{1 + \frac{2}{x^3}}}{x\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{1 + \frac{2}{x^3}}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3}}}{\sqrt{1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2}}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

  On a utilisé le fait que $|x| = x$ lorsque $x > 0$ (ce qui est le cas puisque $x \to +\infty$).

◇

Comme on sait, l'utilisation du conjugué s'avère utile lorsqu'on a des différences de racines :

Exemple 3.12.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}+x\right)\\
&\quad=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)}\\
&\quad=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)}\\
&\quad=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\left(|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}}-x\right)}\\
&\quad=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\left(-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}-x\right)}\\
&\quad=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1\right)}\\
&\quad=\frac{3}{\left(\sqrt{1-\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}}+1\right)}\\
&\quad=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $|x|=-x$ lorsque $x<0$ (ce qui est le cas puisque $x\to-\infty$). ◇

Exemple 3.13. Déterminons la valeur de $p\in\mathbb{R}$ pour laquelle la limite

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+ax}+px$$

est finie.

Si $p\geqslant 0$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+ax}+px=+\infty$ pour tout a, donc on doit considérer $p<0$. Dans ce cas, la limite est une indétermination "$\infty-\infty$", et on peut écrire

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+ax}+px&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax}+px\right)\left(\sqrt{x^2+ax}-px\right)}{\sqrt{x^2+ax}-px}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-p^2)x^2+ax}{\sqrt{x^2+ax}-px}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-p^2)x^2+ax}{|x|\sqrt{1+\frac{a}{x}}-px}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-p^2)x+a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}-p}.
\end{aligned}$$

On voit que si $1-p^2\neq 0$, cette limite n'existe pas. Comme on est dans le cas $p<0$, l'unique valeur possible est donc $p=-1$. Dans ce cas, la limite est égale à

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+ax}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}=\frac{a}{2}.$$

◇

Enonçons encore une version du Théorème des deux gendarmes dans le cas des fonctions, dans le cas $x \to \infty$ (la version analogue avec $x \to -\infty$ est semblable) :

Théorème 3.14 (Théorème des deux gendarmes). *Soit f une fonction définie dans un voisinage de $+\infty$. S'il existe des fonctions g et h, également définies dans un voisinage de $+\infty$, telles que*
- *$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ $\forall x$ suffisamment grand, et*
- *$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = L$,*

alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

Exemple 3.15. Soit $f(x) = \frac{E(\sqrt{x})}{x}$, où E est la fonction "partie entière". Montrons que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

On a $\sqrt{x} - 1 \leqslant E(\sqrt{x}) \leqslant \sqrt{x}$ $\forall x$, et donc $\frac{\sqrt{x}-1}{x} \leqslant \frac{E(\sqrt{x})}{x} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{x}$ $\forall x > 0$. On a alors, pour $x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

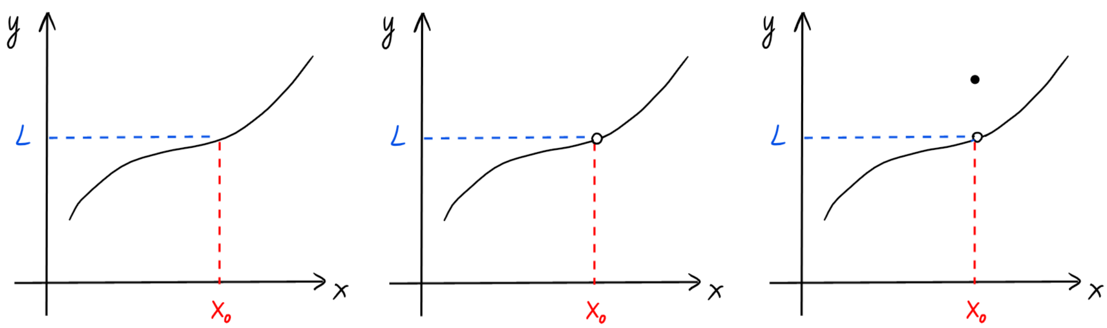
On pose $g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$ et $h(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$. On a

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 - 0 = 0\,,$$

et $\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Par le Théorème des deux gendarmes, on a alors que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. $\diamond$

3.2 Limites $x \to x_0$

Ayant étudié les limites de fonctions lorsque $x \to \pm\infty$, on va maintenant s'intéresser au comportement des fonctions lorsque x tend vers un point $x_0 \in \mathbb{R}$. L'idée intuitive est que la limite de f lorsque $x \to x_0$ est égale à $L \in \mathbb{R}$ si $f(x)$ devient arbitrairement proche de L lorsque x est suffisamment proche de x_0.



Pour les exemples au-dessus, la valeur de la limite en x_0 est la même ! Ce qui se passe en $x = x_0$ ne joue aucun rôle dans la valeur de la limite. Ce qui compte est le comportement de $f(x)$ lorsque x s'approche de x_0 sur un "voisinage épointé".

Définition 3.16. Un **voisinage épointé** de x_0 est un voisinage de x_0 privé de x_0.

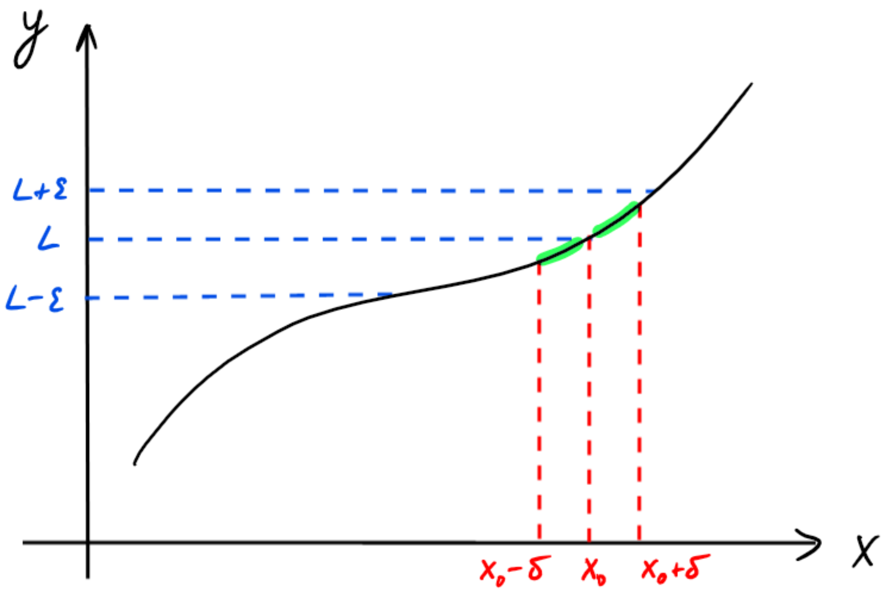
Par exemple, pour $\delta > 0$, $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| \leqslant \delta\}$ est un voisinage épointé. On a

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| \leqslant \delta\} &= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leqslant \delta\} \setminus \{x_0\} \\ &= [x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \delta] \,.\end{aligned}$$

Définition 3.17. Soit f une fonction définie sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f **tend vers la limite** L **lorsque** x **tend vers** x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ tel que } \ 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \implies |f(x) - L| \leqslant \varepsilon.$$

On écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.



Pour que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, il faut donc que pour tout $\varepsilon > 0$, on puisse trouver $\delta > 0$ suffisamment petit tel que le δ-voisinage épointé $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| \leqslant \delta\}$ est envoyé par f dans l'ε-voisinage de L.

Exemples 3.18.

- Soit f la fonction

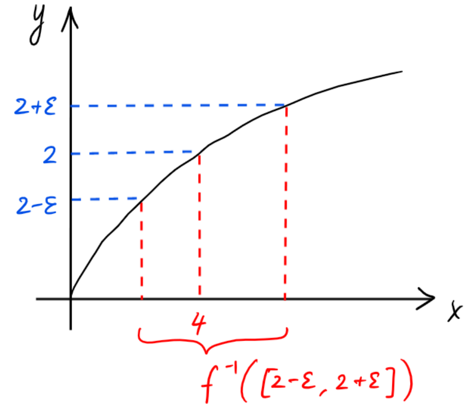
$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \neq 2, \\ 1 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

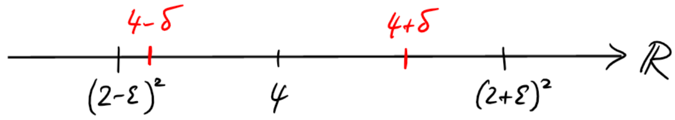
  On a $\lim_{x \to 2} f(x) = 6$. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, on a que pour tout $x \neq 2$,

$$\begin{aligned} |f(x) - 6| \leqslant \varepsilon &\iff |3x - 6| \leqslant \varepsilon \\ &\iff 3x \in [6 - \varepsilon, 6 + \varepsilon] \\ &\iff x \in \left[2 - \frac{\varepsilon}{3}, 2 + \frac{\varepsilon}{3} .\right] \end{aligned}$$

  On peut donc prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. En effet, si $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, on a $|x - 2| \leqslant \delta \implies |3x - 6| \leqslant \varepsilon$.
- Soit $f(x) = \sqrt{x}$. On a $\lim_{x \to 4} f(x) = 2$. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, on a

$$|f(x) - 2| \leqslant \varepsilon \iff |\sqrt{x} - 2| \leqslant \varepsilon \iff \sqrt{x} \in [2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon] \iff x \in [(2 - \varepsilon)^2, (2 + \varepsilon)^2].$$





Il nous faut alors $\delta > 0$ tel que $|x-4| < \delta$ garantit que $x \in [(2-\varepsilon)^2, (2+\varepsilon)^2]$. Il suffit donc de prendre $0 < \delta < 4 - (2-\varepsilon)^2$, car la distance entre 4 et $(2-\varepsilon)^2$ est plus petite que celle entre 4 et $(2+\varepsilon)^2$.

- Si $f(x) = \sqrt{x+2}$, montrons que $\lim_{x\to 1} f(x) = \sqrt{3}$. En effet, on peut d'abord remarquer que pour tout $x \geqslant -2$,

$$\begin{aligned} |f(x) - \sqrt{3}| &= |\sqrt{x+2} - \sqrt{3}| \\ &= \left| \frac{(x+2) - 3}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}} \right| \\ &= \frac{|x-1|}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}} \\ &\leqslant \frac{|x-1|}{\sqrt{3}} \,. \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a utilisé le fait que $\sqrt{x+2} \geqslant 0$.

Maintenant, fixons $\varepsilon > 0$. Par ce qui précède, on peut garantir $|f(x) - \sqrt{3}| \leqslant \varepsilon$ en imposant

$$\frac{|x-1|}{\sqrt{3}} \leqslant \varepsilon \,,$$

qui est équivalente à $|x-1| \leqslant \sqrt{3}\varepsilon$. Ceci montre que si on définit $\delta := \sqrt{3}\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} 0 < |x-1| \leqslant \delta \qquad &\Rightarrow \quad \frac{|x-1|}{\sqrt{3}} \leqslant \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad |f(x) - \sqrt{3}| \leqslant \varepsilon \,. \end{aligned}$$

(On suppose partout que $x \geqslant -2$.)

- Si $f(x) = x^2$, montrons que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. Commençons par écrire

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2| \cdot |x-2| \,.$$

Cette égalité suggère que $|f(x) - 4|$ devient petit lorsque la distance $|x-2|$ devient petite. Mais la présence du terme $|x+2|$, qui dépend de x, complique un peu l'argument.

Procédons comme suit : commençons par nous restreindre à des x dans un intervalle centré en $x_0 = 2$, de taille fixée, par exemple $[1, 3]$. Remarquons alors que pour tout $x \in [1, 3]$,

$$|x + 2| \leqslant |x| + 2 \leqslant 3 + 2 = 5\,,$$

et donc aussi

$$|f(x) - 4| = |x + 2| \cdot |x - 2| \leqslant 5|x - 2|\,.$$

Maintenant, fixons $\varepsilon > 0$. Par ce qui précède, on peut garantir $|f(x) - 4| \leqslant \varepsilon$ en imposant que $x \in [1, 3]$ et que

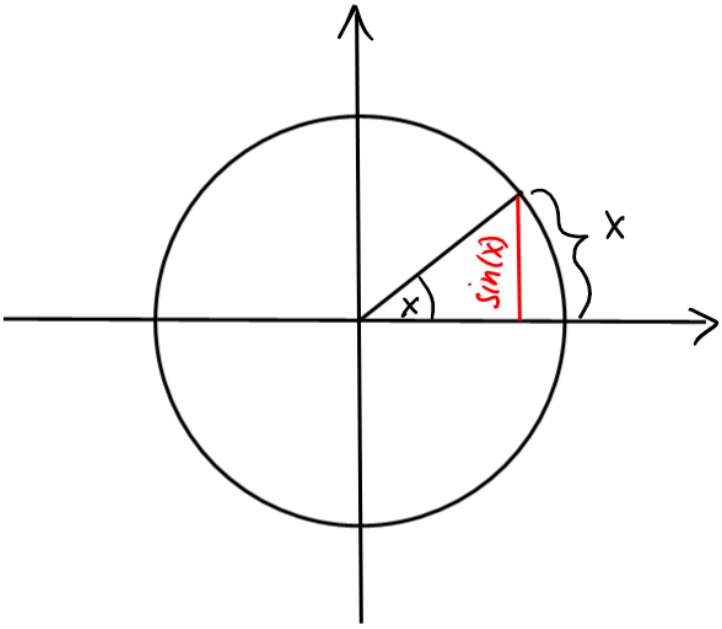
$$5|x - 2| \leqslant \varepsilon\,,$$

qui est équivalente à $|x - 2| \leqslant \varepsilon/5$. Ceci montre que si on définit $\delta := \varepsilon/5$, alors

$$\begin{aligned} 0 < |x - 2| \leqslant \delta \qquad &\Rightarrow \quad 5|x - 2| \leqslant \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad |f(x) - 4| \leqslant \varepsilon\,. \end{aligned}$$

(On suppose partout que $x \in [1, 3]$.)

- Soit $f(x) = \sin(x)$. On a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.



On remarque que $|\sin(x)| \leqslant |x|\ \forall x$. Soit $\varepsilon > 0$. Il nous faut $\delta > 0$ pour que $|x - 0| \leqslant \delta \Longrightarrow |\sin(x) - 0| \leqslant \varepsilon$. On voit que $\delta = \varepsilon$ suffit, et donc on a $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$.

- La limite $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas. On va voir une façon de montrer ce fait ci-dessous (caractérisation par les suites).

◇

Encore une fois, toutes les propriétés des limites vues précédemment possèdent un analogue dans le cas des limites en un point.

En particulier, les limites en un point se comportent bien par rapport aux sommes, produits, quotients, etc.

Exemples 3.19.

- Soit $f(x) = 3x^5\cos(2x) + 2x$. On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) &= \left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 3x^5\right)\cdot\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos(2x)\right) + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2x\\ &= 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^5\cos(\pi) + 2\frac{\pi}{2}\\ &= -3\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 + \pi\,.\end{aligned}$$

- Soit $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. On a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ car $\lim_{x\to 0} x = 0$ et la fonction $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée.
- Dans l'exemple suivant, on enlève l'indétermination en sortant un facteur "caché" :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+3} = \frac{-1}{4}\,.$$

- Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-(x+1)}{x-1}$. Calculons $\lim_{x\to 1} f(x)$.

  Puisque $x-1$, $\sqrt{x+3}-(x+1)\to 0$ lorsque $x\to 1$, on a une indétermination du type "$\frac{0}{0}$". On a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+3}-(x+1)}{x-1} &= \frac{\sqrt{x+3}-(x+1)}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+(x+1)}{\sqrt{x+3}+(x+1)}\\ &= \frac{x+3-(x+1)^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+(x+1)\right)}\\ &= \frac{-x^2-x+2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+(x+1)\right)}\\ &= \frac{-(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+(x+1)\right)}\\ &= \frac{-(x+2)}{\sqrt{x+3}+(x+1)}\,,\end{aligned}$$

  où la dernière égalité est valide car on étudie cette fonction sur un voisinage épointé de 1, et donc $x\neq 1$. On a donc

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{\sqrt{x+3}+(x+1)} = \frac{3}{4}\,.$$

  Remarque : ce qui nous a permis de calculer la limite était de faire apparaître un facteur $(x-1)$ "caché" au numérateur et au dénominateur.
- Si $f(x) = \frac{x^3+px-3}{x^2-4x+3}$, pour quelle(s) valeur(s) du paramètre p est-ce que f admet une limite finie en $x_0 = 1$? Et lorsque cette limite existe, que vaut-elle ?

  On remarque que la limite du dénominateur est

$$\lim_{x\to 1}(x^2-4x+3) = 0\,.$$

  Donc, pour que f admette une limite en 1, il est nécessaire que la limite du numérateur soit également nulle. Comme cette dernière est égale à

$$\lim_{x\to 1}(x^3+px-3) = p-2\,,$$

il faut donc que $p = 2$. Pour cette valeur de p, le numérateur devient le polynôme

$$P(x) = x^3 + 2x - 3\,,$$

qui possède $x_0 = 1$ comme racine. Or ceci implique (voir cours d'Analyse A) que P peut se factoriser :

$$P(x) = (x-1)(x^2 + x + 3)\,.$$

Ainsi, la fonction devient

$$f(x) = \frac{P(x)}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x^2+x+3}{x-3}\,,$$

et donc

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+3}{x-3} = -\frac{5}{2}\,.$$

$\diamond$

On a aussi une version du Théorème des deux gendarmes pour les limites en un point.

Théorème 3.20 (Théorème des deux gendarmes, $x \to x_0$). *Soient f, g et h des fonctions définies sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$ telles que*

- *$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ sur un voisinage épointé de x_0, et*
- *$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$,*

alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Exemple 3.21. Soit $f(x) = (x^2-1)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)$ $(x \neq 1)$. On a $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$. En effet,

$$-(x^2-1) \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 1,$$

puisque $-1 \leqslant \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \leqslant 1$, et $\lim_{x\to 1} -(x^2-1) = \lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0$. Donc par le théorème des deux gendarmes, on a $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$. $\diamond$

On a également une caractérisation par les suites dans le cas de $x \to x_0$.

Théorème 3.22 (Caractérisation par les suites). *Soit f définie sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$.*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \textit{pour toute suite } x_n \neq x_0 \textit{ telle que } x_n \to x_0, \textit{ on a } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Ce théorème sert principalement à montrer qu'une limite n'existe pas.

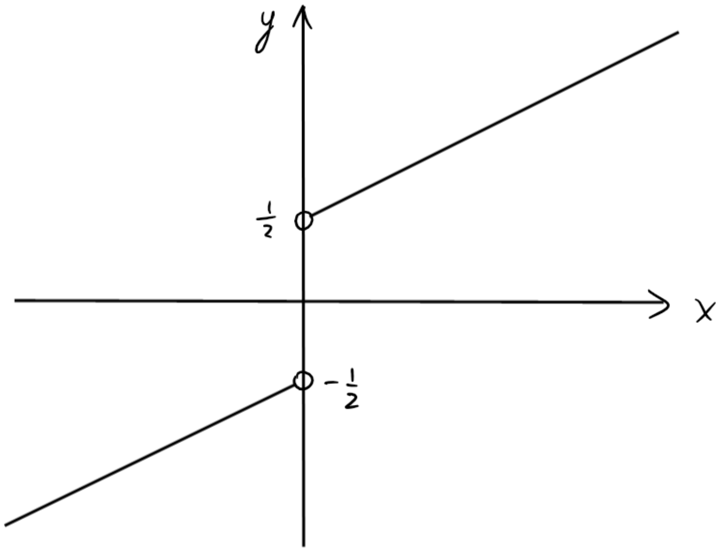
Exemple 3.23.

- La limite $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas. En effet, en prenant la suite $x_n := \frac{1}{\pi/2 + n\pi}$, on a $x_n \to 0$, mais

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin(\pi/2 + n\pi) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n \text{ n'existe pas.}$$

- Soit $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2|x|}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } x > 0, \\[2ex] \frac{x}{2} + \frac{x}{2(-x)} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$



On montre que $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas. En effet,

pour $a_n := \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, et

pour $b_n := \frac{-1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2n} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Pourtant, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. La limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe donc pas par la caractérisation par les suites.

◇

Remarque 3.24.
- Pour montrer que $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq L$, il suffit de trouver une suite $x_n \to x_0$ telle que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$.
- Pour montrer que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas, il suffit de trouver une suite $x_n \to x_0$ telle que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ n'existe pas. On peut aussi exhiber deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n$, mais $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.

◇

3.3 Limites latérales

L'exemple précédent suggère la définition suivante.

Définition 3.25.
- La **limite à droite de** f lorsque $x \to x_0$ est égale à L si

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } x_0 < x \leqslant x_0 + \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon.$$

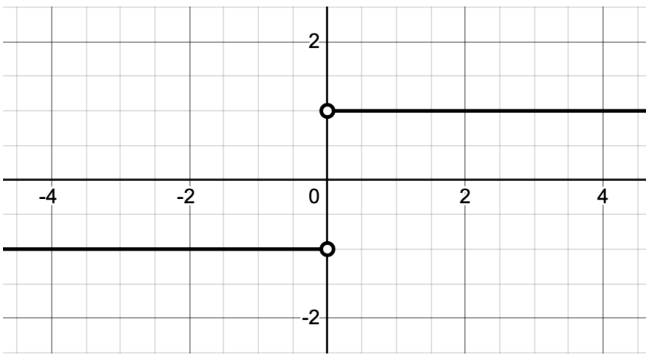
  On écrit $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$.
- La **limite à gauche de** f lorsque $x \to x_0$ est égale à L si

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } x_0 - \delta \leqslant x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon.$$

  On écrit $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

Théorème 3.26. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

Exemples 3.27.

- Soit
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 3, \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 3. \end{cases}$$
On a $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3 \neq 9 = \lim_{x\to 3^+} f(x)$, et donc $\lim_{x\to 3} f(x)$ n'existe pas.
- Soit
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 2, \\ \frac{x}{2}+1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$
On a $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 2^+} f(x)$, et donc $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$.
- Soit $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+3x^2}}$ et $x_0 = 0$. On a
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|\sqrt{x^2+3}} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x\sqrt{x^2+3}} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|\sqrt{x^2+3}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x\sqrt{x^2+3}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$
La limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe donc pas.
- La fonction signe est définie comme suit :
$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1, \\ -1 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$


Elle n'admet pas de limite en 0 puisque $\lim_{x\to 0^-} \text{sgn}(x) = -1$ et $\lim_{x\to 0^+} \text{sgn}(x) = 1$.

◇

La caractérisation par les suites et le théorème sur les limites latérales sont deux façons de montrer qu'une limite n'existe pas. Il faut choisir la méthode la plus adaptée selon la situation.

3.4 Infiniment petits équivalents (IPE)

Les infiniment petits équivalents nous permettront de calculer les limites en comparant des fonctions qui tendent vers zéro “à la même vitesse”.

Définition 3.28. Soient f et g définies sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$, telles que $g(x) \neq 0$ sur un voisinage épointé de x_0. Les fonctions f et g sont des **infiniment petits équivalents (IPE) au voisinage de** x_0 si

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (infiniment petits), et
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ (équivalents).

On écrit $f \sim g$ au voisinage de x_0.

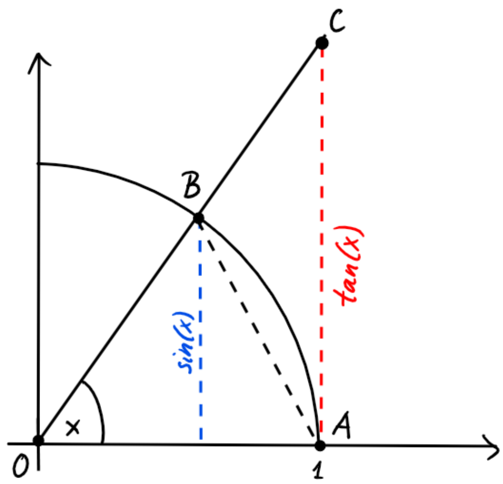
Remarque 3.29. On peut définir de manière équivalente les IPE dans un voisinage à gauche ou à droite d’un point x_0, ou dans un voisinage de l’infini. ◇

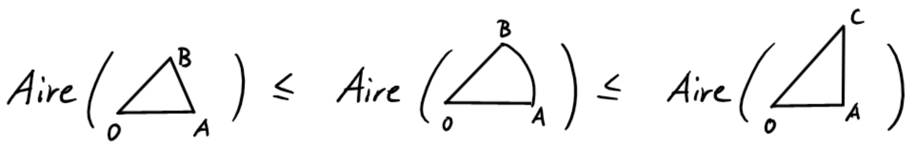
Proposition 3. *Au voisinage de* $x_0 = 0$,

- $\sin(x) \sim x$,
- $\tan(x) \sim x$,
- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$.

Démonstration. On l’a déjà dit, $\lim_{x \to 0} \sin(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$.

Pour montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, il suffit de montrer que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, puisque la fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ est paire. Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$. On compare des aires dans le dessin suivant d’un quart de cercle trigonométrique.





On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin(x) \ &\leqslant \ \pi\cdot 1^2\cdot \frac{x}{2\pi} \ \leqslant \ \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan(x) \\ \iff & \frac{\sin(x)}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\tan(x)}{2} \\ \iff & \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x) \\ \iff & 1 \leqslant \frac{x}{\sin(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)} \\ \iff & \cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1\,. \end{aligned}$$

(Ces manipulations sont justifiées par le fait que $\sin(x), \cos(x), x > 0$). Puisque $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$, le Théorème des deux gendarmes implique que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$. Ceci montre que $\sin(x) \sim x$ au voisinage de 0.

On a $\lim_{x\to 0}\tan(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$, et

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)} = 1$$

puisque $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ par le raisonnement au-dessus, et $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} = 1$.

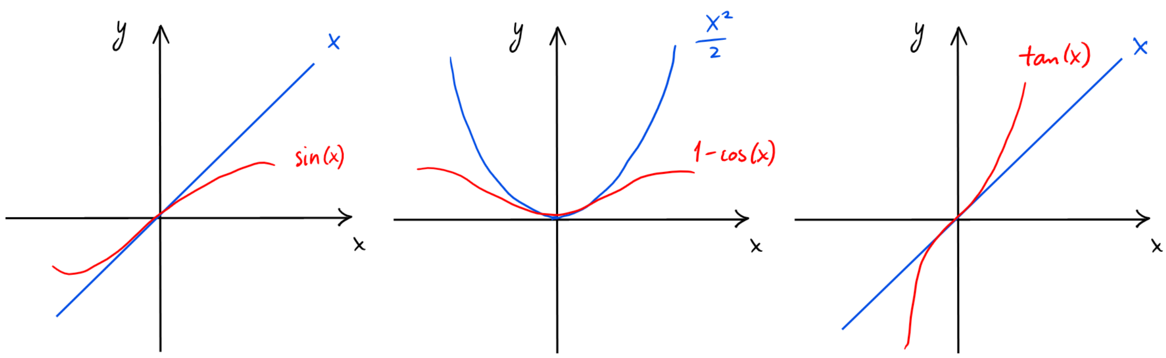
Remarquons pour commencer que $\lim_{x\to 0}(1-\cos(x)) = 0$, et $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0$. Ensuite, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos(x)}{x^2/2} &= \frac{1-\cos(x)}{x^2/2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} \\ &= \frac{1-\cos^2(x)}{x^2}\cdot\frac{2}{1+\cos(x)} \\ &= \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{2}{1+\cos(x)}\,, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2/2} &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+\cos(x)}\right) \\ &= 1^2\cdot 1 = 1\,. \end{aligned}$$

□



Dans un calcul de limite, on peut remplacer une fonction par son IPE dans une expression factorisée. En effet, si $f \sim \widetilde{f}$ au voisinage de x_0,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot h(x)\right] &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{\widetilde{f}(x)}\cdot \widetilde{f}(x)\cdot h(x)\right]\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\widetilde{f}(x)}\cdot \lim_{x\to x_0}\left[\widetilde{f}(x)\cdot h(x)\right]\\ &= \lim_{x\to x_0}\left[\widetilde{f}(x)\cdot h(x)\right].\end{aligned}$$

Et dans un quotient, si $f \sim \widetilde{f}$ et $g \sim \widetilde{g}$ au voisinage de x_0, alors

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\widetilde{f}(x)}\frac{\widetilde{f}(x)}{\widetilde{g}(x)}\frac{\widetilde{g}(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\widetilde{f}(x)}{\widetilde{g}(x)}$$

Exemple 3.30. Considérons

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{4-4\cos(x)}.$$

Puisque $\sin(x) \sim x$ et $1-\cos(x) \sim x^2/2$ au voisinage de $x_0 = 0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{4-4\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\cdot\sin(x)}{4(1-\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{4(x^2/2)} = \frac{1}{2}.$$

◇

On peut faire des changements de variable pour se ramener aux IPE connus.

Exemple 3.31. Considérons

$$\lim_{x\to -\pi/2}\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\cos(x)}.$$

Si on pose $y = x + \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\pi/2}\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\cos(x)} &= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\cos\left(y-\frac{\pi}{2}\right)}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin(y)}\\ &= 1.\end{aligned}$$

◇

Notons aussi que, par exemple, on a $\sin(5x^3) \sim 5x^3$ au voisinage de 0, puisque $\lim_{x\to 0} 5x^3 = 0$.

Attention : on ne peut pas remplacer une fonction par son IPE dans un calcul de limite d'une somme, comme montre l'exemple suivant.

Exemple 3.32. Considérons

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2\sin(x)}{x^3}.$$

Une façon correcte de calculer cette limite, est de commencer par factoriser :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2\sin(x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)\cos(x)-2\sin(x)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(x)(1-\cos(x))}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2x(x^2/2)}{x^3} = -1.\end{aligned}$$

On remarque que si on avait voulu utiliser dès le début le fait que $\sin(x)\sim x$ et $\sin(2x)\sim 2x$ au voisinage de $x_0=0$, en remplaçant par les équivalents on aurait trouvé un résultat *faux* :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-2x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3} = 0\,.$$

◇

3.5 Limites infinies en un point

On définit maintenant la divergence vers l'infini en un point.

Définitions 3.33. Soit $x_0\in\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0.

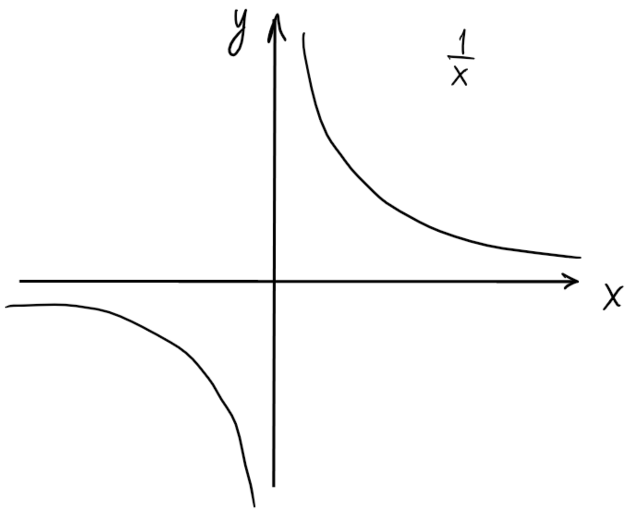
- f tend vers $+\infty$ lorsque $x\to x_0$ si $\forall M>0$, $\exists\delta>0$ tel que
$$0<|x-x_0|\leqslant\delta \quad\Longrightarrow\quad f(x)\geqslant M\,.$$
On écrit $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.
- f tend vers $-\infty$ lorsque $x\to x_0$ si $\forall M<0$, $\exists\delta>0$ tel que
$$0<|x-x_0|\leqslant\delta \quad\Longrightarrow\quad f(x)\leqslant M\,.$$
On écrit $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.
- f tend vers $+\infty$ lorsque $x\to x_0^+$ si $\forall M>0$, $\exists\delta>0$ tel que
$$x_0<x\leqslant x_0+\delta \quad\Longrightarrow\quad f(x)\geqslant M.$$
On écrit $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$.
- f tend vers $-\infty$ lorsque $x\to x_0^+$ si $\forall M<0$, $\exists\delta>0$ tel que
$$x_0<x\leqslant x_0+\delta \quad\Longrightarrow\quad f(x)\leqslant M.$$
On écrit $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$.
- f tend vers $+\infty$ lorsque $x\to x_0^-$ si $\forall M>0$, $\exists\delta>0$ tel que
$$x_0-\delta\leqslant x<x_0 \quad\Longrightarrow\quad f(x)\geqslant M.$$
On écrit $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$.
- f tend vers $-\infty$ lorsque $x\to x_0^-$ si $\forall M<0$, $\exists\delta>0$ tel que
$$x_0-\delta\leqslant x<x_0 \quad\Longrightarrow\quad f(x)\leqslant M.$$
On écrit $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$.

On définit les limites latérales infinies de manière analogue. Par exemple, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0$ tel que $x_0 < x \leqslant x_0 + \delta \Longrightarrow f(x) \geqslant M$.

Comme avant, une limite infinie en un point x_0 ne dit rien sur la valeur de f en x_0.

Exemples 3.34.

- On a $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, mais $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ ne tend pas vers $\pm\infty$.

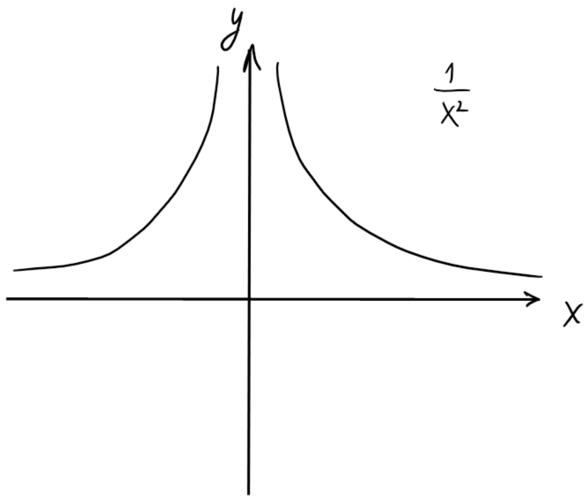


Montrons que $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
Soit $M < 0$. Pour $x < 0$,

$$\frac{1}{x} \leqslant M \iff x \geqslant \frac{1}{M}.$$

On pose $\delta = \frac{-1}{M}$; on a $\delta > 0$ et $\frac{1}{x} \leqslant M$ pour tout $x \in [-\delta, 0[$. On a donc bien que $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

- On a $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.



- Montrons que $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.
Soit $M > 0$. Pour $x \neq 1$,

$$\frac{1}{(x-1)^2} \geqslant M \iff (x-1)^2 \leqslant \frac{1}{M} \iff |x-1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

On prend $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ (ou n'importe quelle valeur dans $]0, \frac{1}{\sqrt{M}}]$). On a alors

$$0 < |x-1| \leqslant \delta \;\Rightarrow\; |x-1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} \geqslant M.$$

Donc $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

◇

Les propriétés habituelles sont vérifiées pour les limites infinies en un point.

Exemples 3.35.

- Considérons

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3x+1}{x^2-3x-10}\,.$$

Dans la limite $x \to -2^+$, le numérateur tend vers -1 et le dénominateur vers zéro 0. Donc le quotient ne peut pas avoir de limite finie, et pour comprendre son comportement il faut regarder de plus près le signe du dénominateur à son approche de zéro. En écrivant

$$\frac{x^2+3x+1}{x^2-3x-10} = \frac{x^2+3x+1}{(x-5)(x+2)} = \frac{x^2+3x+1}{x-5} \cdot \frac{1}{x+2}\,,$$

on a extrait le terme qui pose problème : en posant $y = x+2$, $x \to -2^+$ implique $y \to 0^+$, et donc

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y} = +\infty\,.$$

D'autre part,

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3x+1}{x-5} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}\,.$$

Puisque $\frac{1}{7} > 0$, on peut conclure :

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3x+1}{x^2-3x-10} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3x+1}{x-5} \cdot \frac{1}{x+2} = +\infty$$

- Considérons

$$\lim_{x\to -1} \frac{9-2x\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)}{(x+1)^2}\,.$$

Puisque

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty\,,$$

et puisque $9-2x\sin\left(\frac{1}{x+1}\right) \geqslant 7 > 0$ sur un voisinage épointé de -1, on conclut que

$$\lim_{x\to -1} \frac{9-2x\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)}{(x+1)^2} = +\infty\,.$$

◇