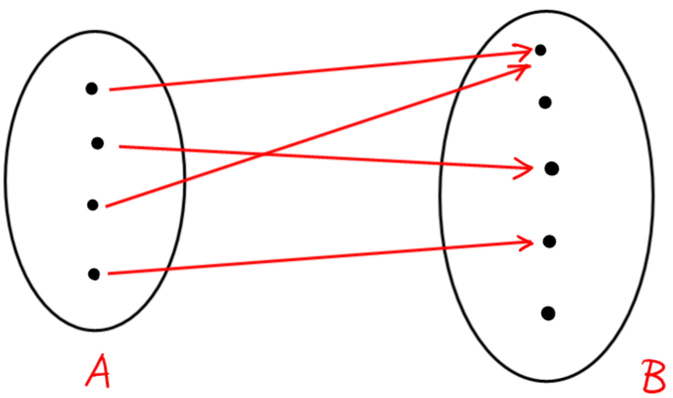
# Chapitre 2

# Fonctions réelles

## 2.1 Introduction

**Définition 2.1.** Une **fonction** $f$ d'un ensemble $A$ dans un ensemble $B$ est une règle qui assigne à chaque élément de $A$ un unique élément de $B$.

Si on représente par une flèche l'assignement de l'élément $a \in A$ à l'élément $b \in B$,

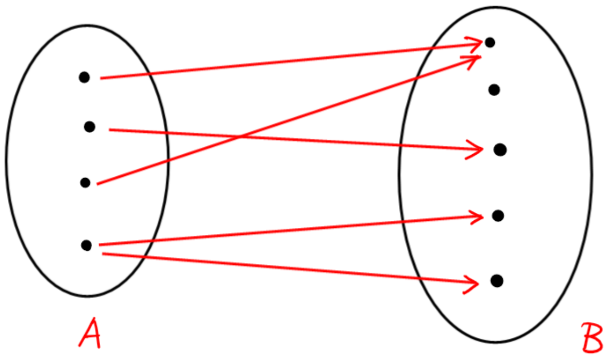



On écrit $f : A \to B$ et on note $f(a)$ l'élément de $B$ assigné à $a \in A$. On écrit donc

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

On dit que $b = f(a)$ est l'**image** de $a$ ($a$ est "envoyé sur/vers $b$"), et que $a$ est une **préimage** (ou un **antécédent**) de $b$.

**Exemple 2.2.** La règle représentée sur le shéma




ne définit pas une fonction, puisqu'il y a des éléments de $A$ qui sont envoyés vers plus qu'un élément de $B$ : ◇

**Définitions 2.3.** L'**ensemble image** $\mathrm{Im}(f)$ de $f$ est l'ensemble des éléments de $B$ qui possèdent au moins une préimage :

$$\mathrm{Im}(f) = \{b \in B : \exists a \in A \text{ t.q. } f(a) = b\}.$$

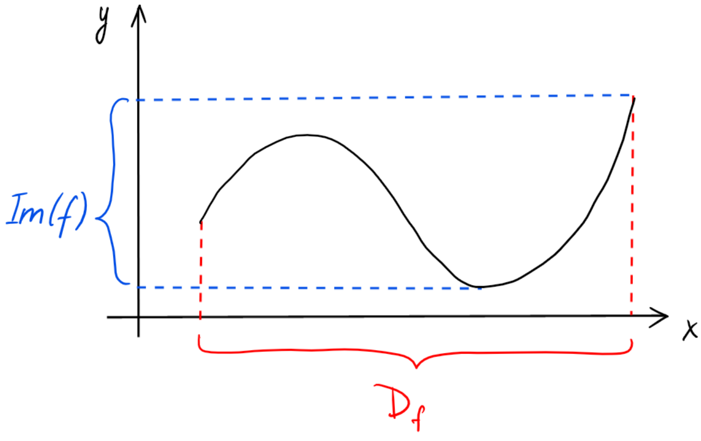
On parle d'une **fonction réelle d'une variable réelle** lorsque $A$ et $B$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Au lieu de $A$, on écrira souvent $D_f$, et on parlera du **domaine de définition** de $f$.

Une fonction peut être décrite de plusieurs façons (on note que le domaine de définition de la fonction fait partie, parfois implicitement, de la description de la fonction) :

- par une formule explicite valable pour tout $x$, par exemple $f(x) = x^2$ ;
- par une distinction de cas, par exemple

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 42 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 1000 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

- verbalement, par des mots, par ex. la température en fonction du temps ;
- graphiquement (par un graphe, voir ci-dessous).

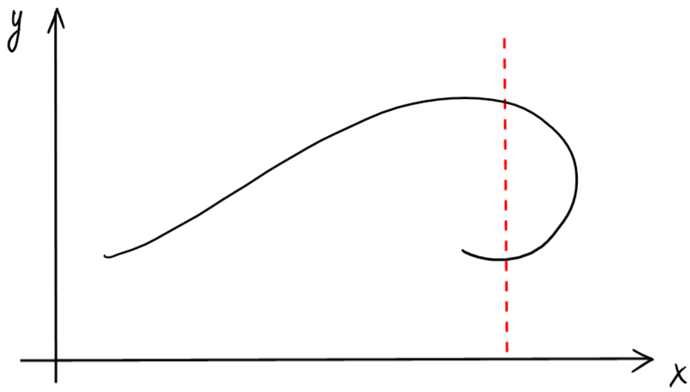


On peut se représenter plus facilement une fonction $f$ à l'aide de son **graphe**, qui est l'ensemble

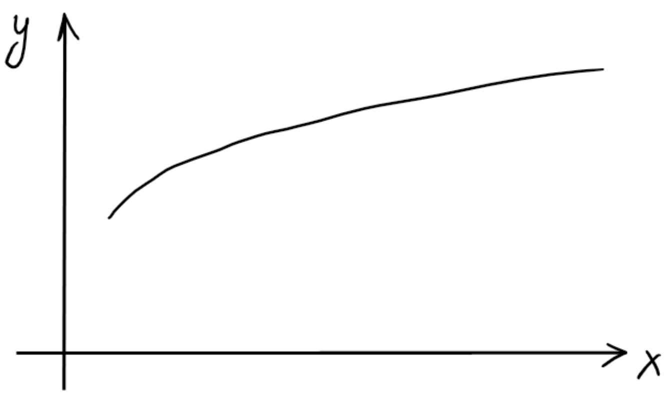
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_f \text{ et } y = f(x)\}\,.$$

Chaque point du graphe est donc de la forme $(x, f(x))$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ pour lesquels la droite horizontale de hauteur $y$ coupe le graphe de $f$ en au moins un point.

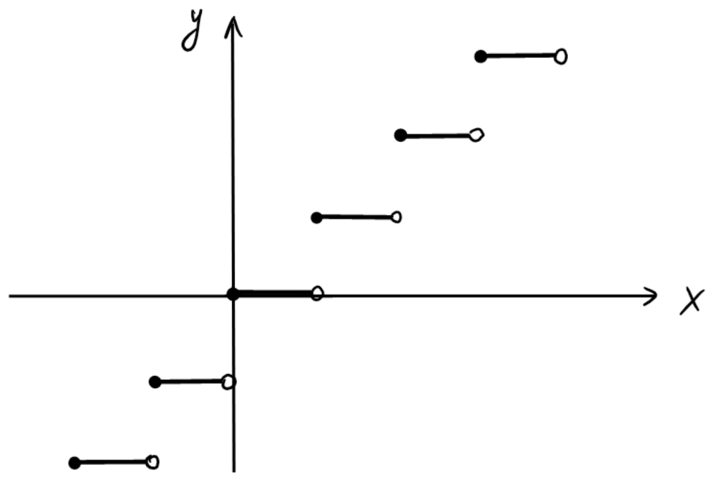
Remarquons qu'une courbe représente le graphe d'une fonction seulement si toute droite verticale la coupe au plus une fois. Par exemple, l'image suivante ne représente pas le graphe d'une fonction :




**Exemples 2.4.**
- $f : x \mapsto x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty[$.
- $f : x \mapsto |x|$, $D_f = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty[$.
- $f : x \mapsto \sqrt{x-1} + 3$, $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geqslant 0\} = [1, \infty[$, $\mathrm{Im}(f) = [+3, \infty[$.

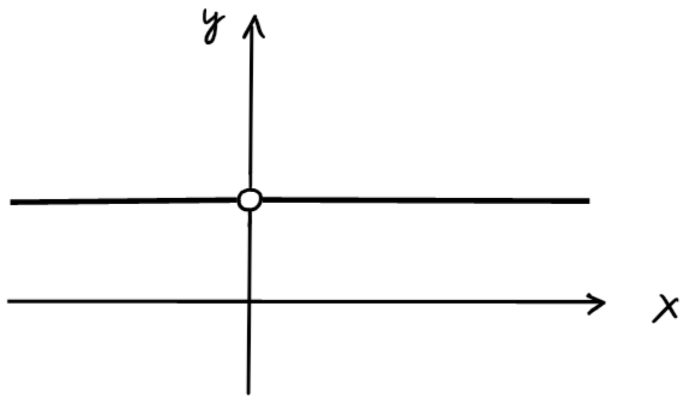



- $E : x \mapsto E(x)$, où $E(x)$ est la partie entière de $x$ (définie comme le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x$).




(Remarque sur l'image : un cercle plein indique la valeur de la fonction.) Par exemple, $E(0.5) = 0$, $E(-1.7) = -2$, $E(5) = 5$. Ici, $D_f = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}$.

- $f : x \mapsto \frac{x}{x}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{1\}$. Cette fonction vaut $1$ partout, sauf en $0$, où elle n'est pas définie. Elle est donc différente de la fonction constante $x \mapsto 1$ (qui est elle définie partout).




◇

Comment peut-on trouver $\mathrm{Im}(f)$ sans connaître le graphe de $f$ ? Comme $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x) = y$, on peut donc regarder pour quels $y$ l'équation $f(x) = y$ possède une solution. L'ensemble de ces $y$ sera alors l'image de $f$.

**Exemples 2.5.**
- Pour trouver $\mathrm{Im}(f)$ pour $f(x) = \frac{1}{4x-6}$, on constate que

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Im}(f) &\iff \exists x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \frac{1}{4x-6} = y \\ &\iff \exists x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } 1 + 6y = 4xy. \end{aligned}$$

Si $y \neq 0$, on a la solution $x = \frac{1+6y}{4y}$. Si $y = 0$, l'équation n'a pas de solution. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$.

- Pour trouver $\mathrm{Im}(f)$ pour $f(x) = x^2 - 4x$, on constate que

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Im}(f) &\iff \exists x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x^2 - 4x = y \\ &\iff \exists x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x^2 - 4x - y = 0 \\ &\iff \Delta = 16 - 4(-y) \geqslant 0 \\ &\iff 16 \geqslant -4y \\ &\iff y \geqslant -4. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}(f) = [-4, \infty[$.

◇

## 2.2 Parité

**Définition 2.6.**
- $f$ est dite **paire** si $f(-x) = f(x)\ \forall x \in D_f$.
- $f$ est dite **impaire** si $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in D_f$.

Graphiquement, une fonction est paire si son graphe possède l'axe $Oy$ comme axe de symétrie. Une fonction est impaire si son graphe a l'origine comme centre de symétrie (par un angle de $180°$).

**Exemples 2.7.**
- Exemples de fonctions paires : $x^2, |x|, \cos(x)$.
- Exemples de fonctions impaires : $x, x^3, \mathrm{sgn}(x), \sin(x)$.
- Plus généralement, $x^p$ est paire si $p \in \mathbb{Z}$ est pair, et impaire si $p \in \mathbb{Z}$ est impair.
- $f(x) = x - 1$ n'est ni paire ni impaire, par ex. $f(-1) = -1 - 1 = -2$ et $f(1) = 1 - 1 = 0$, donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(-1)$.

◇

On remarque que pour montrer qu'une fonction $f$ n'est pas paire, il suffit de trouver un $x_0$ tel que $f(-x_0) \neq f(x_0)$. De manière analogue, pour montrer qu'une fonction $f$ n'est pas impaire, il suffit de trouver un $x_0$ tel que $f(-x_0) \neq -f(x_0)$.

On n'a pas besoin de connaître le graphe de la fonction pour vérifier qu'elle est paire ou impaire : on peut le faire algébriquement.

**Exemple 2.8.** La fonction définie par

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

est paire, puisque

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh(x)\,.$$

◇

## 2.3 Composition de fonctions

**Définition 2.9.** La **composée** de deux fonctions $f$ et $g$, notée $g \circ f$, est définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))\,.$$

Pour que le nombre $(g \circ f)(x)$ soit défini, il faut que $x \in D_f$ et que $f(x) \in D_g$.

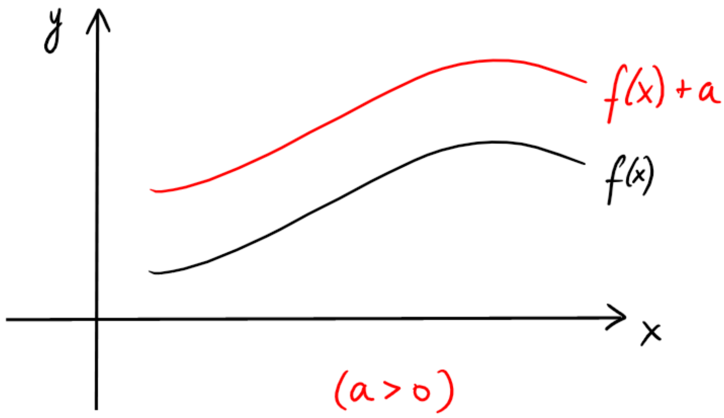
### 2.3.1 Graphes et compositions

On peut parfois déduire le graphe d'une fonction "compliquée", en l'interprétant comme une composition de fonctions "simples" dont on connaît le graphe. Il est donc utile de savoir quel effet ont des compositions avec des fonctions "simples" sur le graphe d'une fonction.

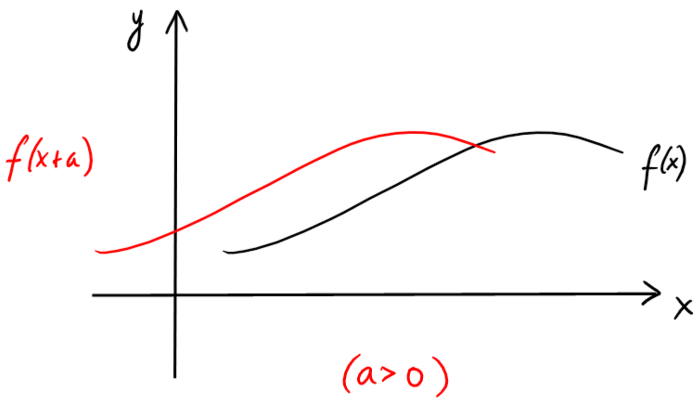
On présente quelques cas simples. Une animation en bas de page permet de tester l'effet de ces compositions.

Soit $f$ une fonction quelconque.

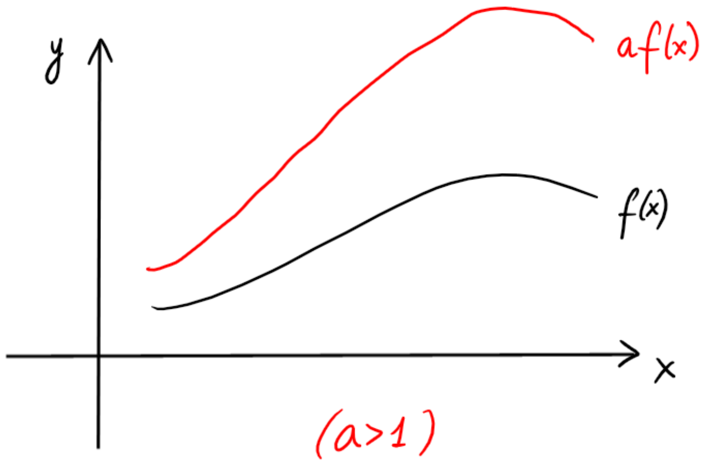
- Si $g(x) = x + a$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + a$, et le graphe de $g \circ f$ est une translation verticale du graphe de $f$, de $a$ unités, vers le haut si $a > 0$, et vers le bas si $a < 0$ :



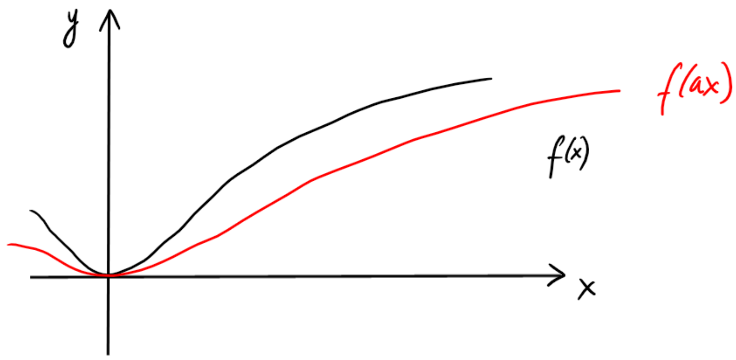

- Si $g(x) = x + a$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + a)$, et le graphe de $f \circ g$ est une translation horizontale du graphe de $f$, de $a$ unités vers la gauche si $a > 0$, vers la droite si $a < 0$ :



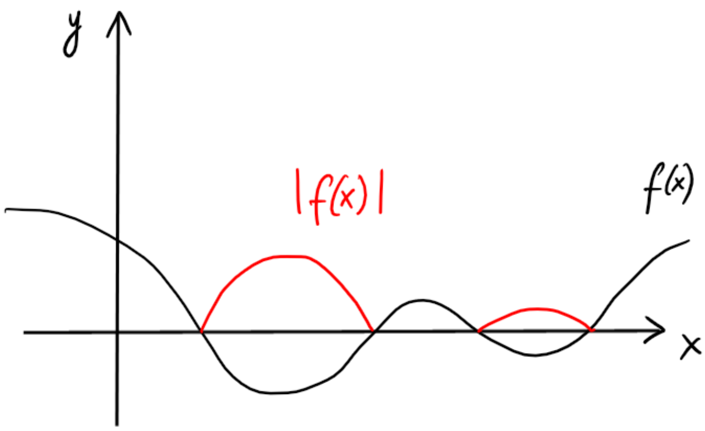

  La direction peut sembler un peu contre-intuitive. Pour se convaincre, ça pourrait aider de réécrire $(f \circ g)(x - a) = f(g(x - a)) = f((x - a) + a) = f(x)$.
- Si $g(x) = ax$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = af(x)$, et le graphe de $g \circ f$ représente un étirement vertical de celui de $f$ :



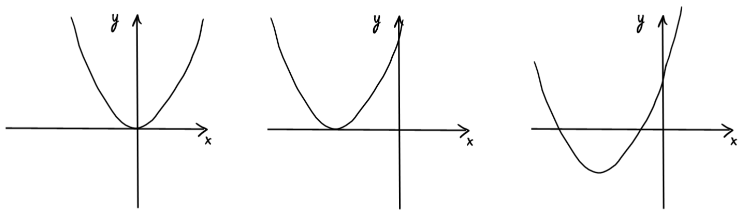

- Si $g(x) = ax$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax)$, et le graphe de $f \circ g$ est un étirement horizontal de celui de $f$ :



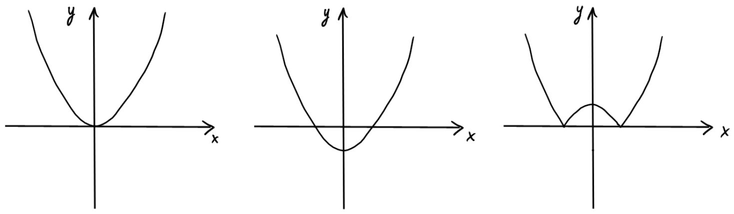

- Si $g(x) = |x|$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = |f(x)|$, toute partie négative de la fonction est reflétée à travers l'axe $Ox$ :




**Exemples 2.10.** • Pour esquisser le graphe de $f(x) = x^2 + 6x + 7$, on remarque que $f(x) = (x+3)^2 - 2$. C'est donc le graphe de $x^2$, translaté vers la gauche de 3 unités, puis translaté vers le bas de 2 unités.

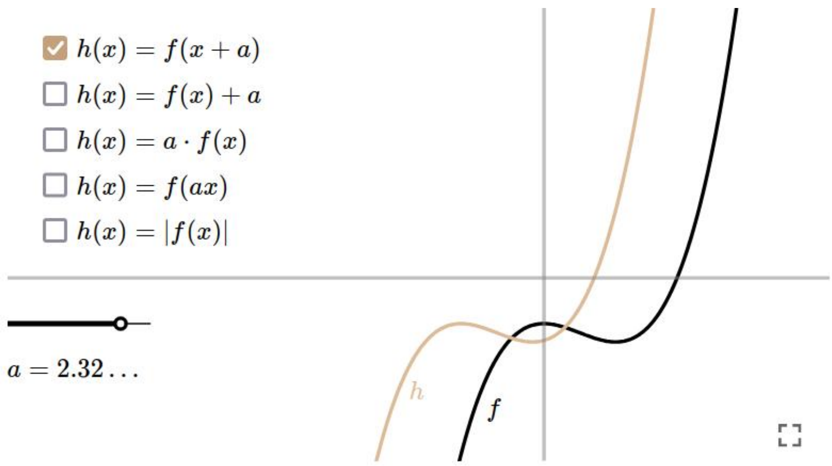


- On peut dessiner le graphe de $f(x) = |x^2 - 1|$ en décomposant la fonction en trois étapes : $x \mapsto x^2 \mapsto x^2 - 1 \mapsto |x^2 - 1|$. Donc pour obtenir le graphe de $f$, on prend le graphe de $x^2$, on le translate vers le bas d'une unité, puis on réfléchit la partie négative à travers $Ox$ :



◇

L'animation ci-dessous résume les différents types de transformations décrits dans cette section :




Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

## 2.4 Surjectivité, injectivité, bijectivité

**Définition 2.11.** Soit $f : A \to B$ une fonction.
- $f$ est **surjective** si $\mathrm{Im}(f) = B$.
- $f$ est **injective** si pour tout $y \in B$, il y a au plus un $x \in A$ tel que $f(x) = y$.
- $f$ est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.

Parlons d'abord de la surjectivité. La condition $\mathrm{Im}(f) = B$ veut dire que pour chaque élément $b \in B$, il y a un élément de $a$ qui est envoyé sur $b$ par $f$ : $f(a) = b$.

Si une fonction $f : A \to B$ n'est pas surjective, on peut toujours restreindre son ensemble d'arrivée pour qu'elle le devienne.

**Exemple 2.12.** Soit

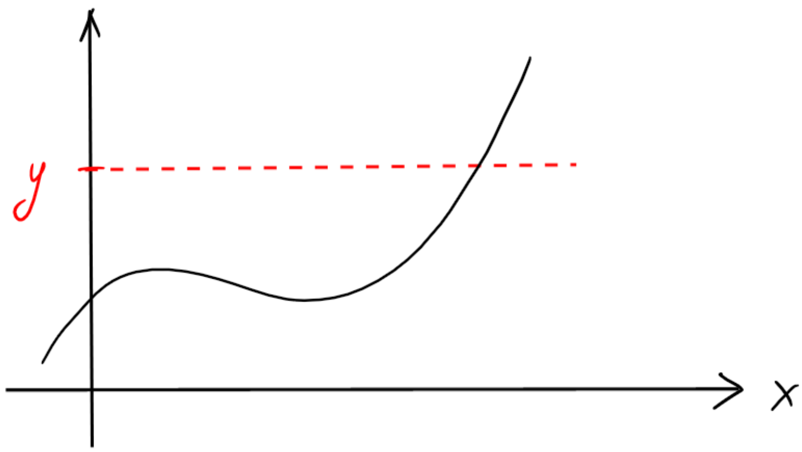
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - 4x$$

On a vu dans un exemple précédent que $\mathrm{Im}(f) = [-4, \infty[$. La fonction $f$ n'est donc pas surjective, puisque $[-4, \infty[ \neq \mathbb{R}$. Par contre, la fonction

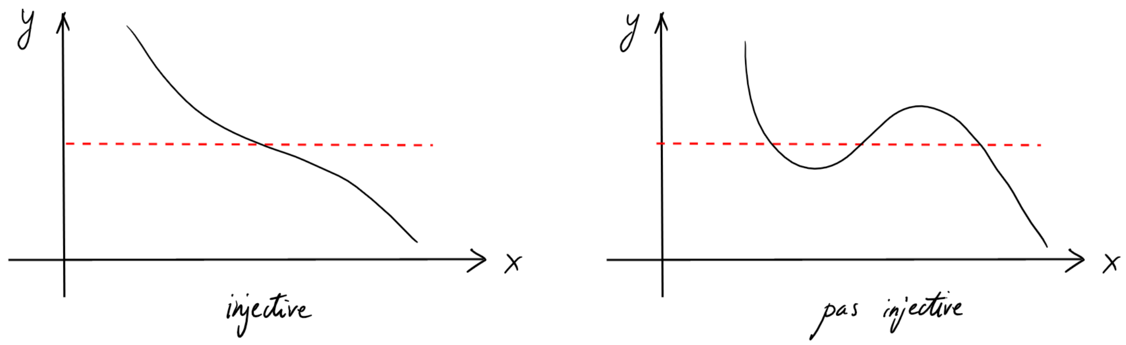
$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to [-4, \infty[$$
$$x \mapsto x^2 - 4x$$

est surjective. ◇

Graphiquement, une fonction réelle est surjective si pour tout $y \in \mathbb{R}$, la droite horizontale à hauteur $y$ coupe le graphe de $f$ en au moins un point.




Ensuite, l'injectivité peut être décrite graphiquement ainsi : $f$ est injective si pour tout $y \in \mathbb{R}$, la droite horizontale à hauteur $y$ coupe le graphe de $f$ en au plus un point.




Une fonction $f$ est injective si et seulement si

$$\forall x, x' \in D_f,\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')\,.$$

Ceci veut dire que deux éléments distincts ne peuvent pas avoir la même image par $f$. Cette condition est équivalente à sa contraposée :

$$\forall x, x' \in D_f,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\,.$$

**Exemples 2.13.**
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ n'est pas injective, car $-1 \neq 1$ mais $f(-1) = 1 = f(1)$. Par contre, $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ est injective.
- La fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est-elle injective ? On a

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\iff \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x'}{\sqrt{(x')^2+1}} \\ &\implies \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x')^2}{(x')^2+1} \\ &\implies x^2((x')^2+1) = (x')^2(x^2+1) \\ &\implies x^2 = (x')^2 \\ &\implies x^2 - (x')^2 = 0 \\ &\implies (x-x')(x+x') = 0. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x'}{\sqrt{(x')^2+1}}$ implique que $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(x')$, on a donc

$$f(x) = f(x') \implies x - x' = 0 \implies x = x',$$

d'où la fonction est injective.
- La fonction $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \frac{4}{x}$ est-elle injective ? On a

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\iff x - \frac{4}{x} = x' - \frac{4}{x'} \\ &\iff x^2x' - 4x' = x(x')^2 - 4x \\ &\iff (x-x')(xx'+4) = 0 \\ &\iff x = x' \text{ ou } x' = \frac{-4}{x}. \end{aligned}$$

Si $x' = \frac{-4}{x}$, on a donc $f(x) = f(x')$. On peut prendre par exemple $x = 1$ et $x' = -4 \neq x$, et on aura $f(1) = f(-4)$. La fonction n'est donc pas injective.

◇

On remarque que pour montrer qu'une fonction $f$ réelle n'est pas injective, il suffit de trouver deux nombres réels distincts qui sont envoyé au même nombre réel.

**Théorème 2.14.** *Une fonction strictement monotone est injective.*

*Démonstration.* Soit $f$ strictement croissante (la preuve est similaire dans le cas d'une fonction strictement décroissante). Soit $x \neq x'$. Alors on a $x < x'$ (ou $x' < x$) et donc $f(x) < f(x')$ (respectivement $f(x') < f(x)$). Ainsi, $f(x) \neq f(x')$. □

Une fonction bijective $f : A \to B$ est
- surjective, et donc tout $y \in B$ possède au moins une préimage,
- injective, et donc tout $y \in B$ possède au plus une préimage.

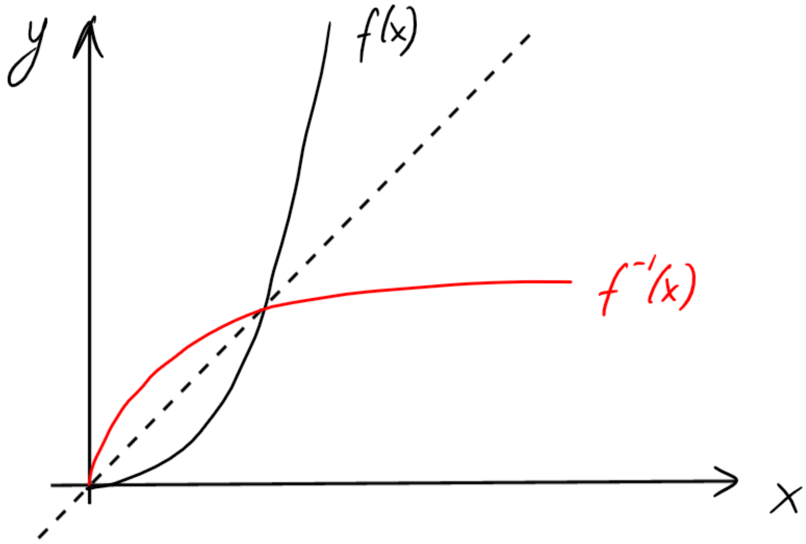
On a alors que pour une fonction bijective $f : A \to B$, tout $y \in B$ possède exactement une préimage. Ceci nous permet de définir la fonction

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\to A \\ y &\mapsto \text{ l'unique préimage de } y. \end{aligned}$$

Cette fonction est appelée la *fonction réciproque* de $f$. On a

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= y \qquad \forall y \in B, \\ f^{-1}(f(x)) &= x \qquad \forall x \in A. \end{aligned}$$

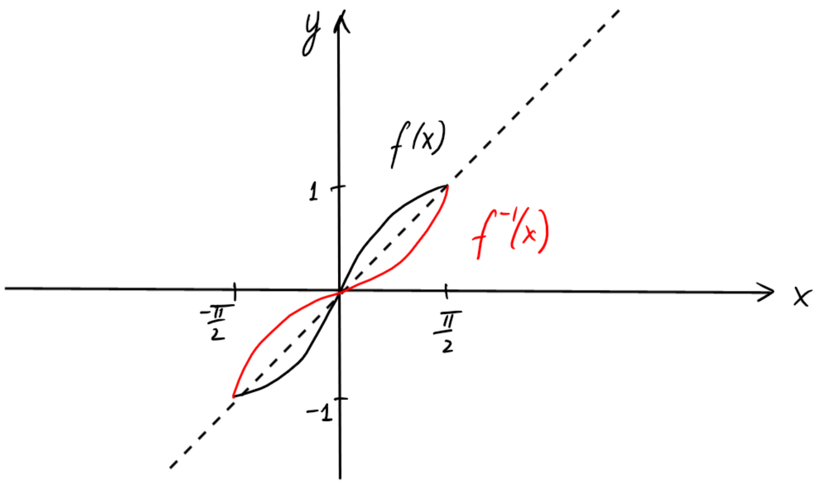
**Exemples 2.15.**
- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ est bijective. Sa réciproque est la racine carrée, $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ y \mapsto \sqrt{y}$.




- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$ n'est pas surjective (par ex. car $y = 2$ n'a pas de préimage).

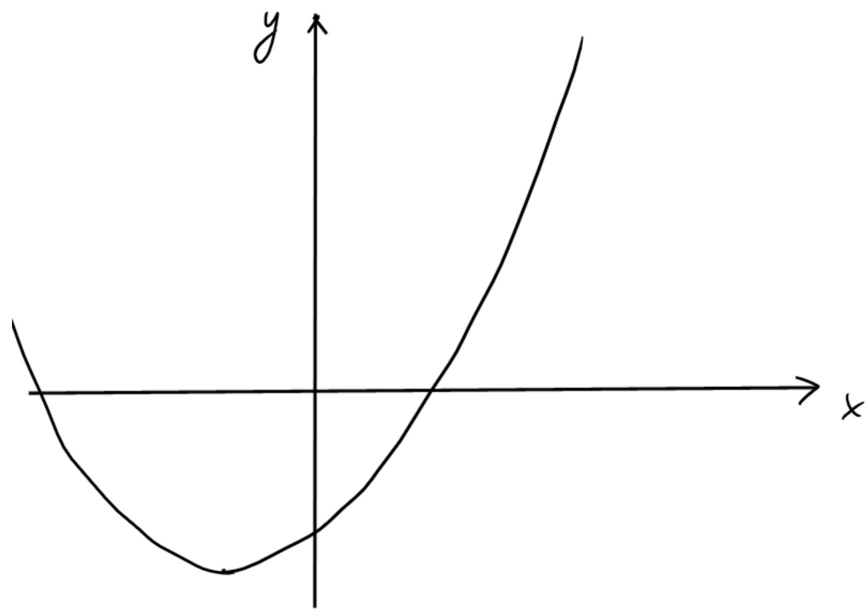
  $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin(x)$ est surjective mais pas injective (par ex. car $\sin(0) = \sin(2\pi)$, mais $0 \neq 2\pi$).

  $f : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin(x)$ est bijective. Sa réciproque est $f^{-1} : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \mapsto \arcsin(y)$.




◇

**Exemple 2.16.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 2x - 1$.




Cette fonction n'est pas surjective, par ex. car $-3$ n'a pas de préimage. Par contre, $f : \mathbb{R} \to [-2, \infty[,\ x \mapsto x^2 + 2x - 1$ est surjective, puisque on a choisi l'image de $f$ comme ensemble d'arrivée. Elle n'est toujours pas injective : par ex. $f(-2) = -1 = f(0)$.

On peut restreindre l'ensemble de départ pour que la fonction devienne injective. Sur le graphe de $f$, on voit qu'on peut choisir la "partie droite" de la parabole, ou la "partie gauche" de la parabole.

- Si on choisit la partie droite, on obtient la fonction bijective

$$\begin{aligned} f : [-1, \infty[ &\to [-2, \infty[ \\ x &\mapsto x^2 + 2x - 1. \end{aligned}$$

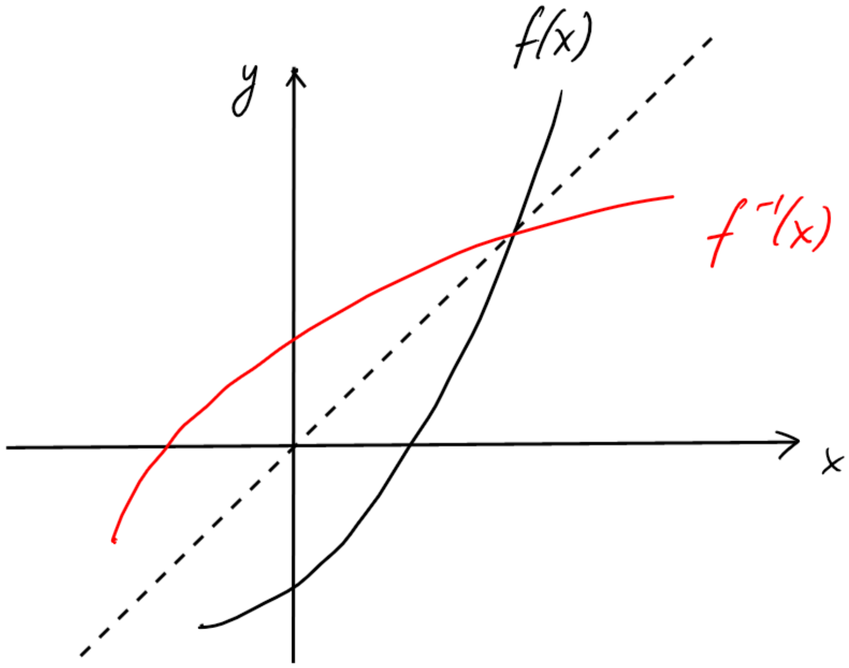
  Sa réciproque est

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-2, \infty[ &\to [-1, \infty[ \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{2 + y}. \end{aligned}$$

  En effet, si $y \in [-2, \infty[$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff x^2 + 2x - 1 = y \\ &\iff x^2 + 2x - 1 - y = 0 \\ &\iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4(1 + y)}}{2} \end{aligned}$$

  et donc $x = -1 + \sqrt{2 + y}$ puisque $x \in [-1, \infty[$ (c'est-à-dire, $x \geqslant -1$).




- De manière analogue, si on choisit la partie gauche, on obtient la fonction bijective

$$\begin{aligned} f : ]-\infty,-1] &\to [-2,\infty[ \\ x &\mapsto x^2+2x-1 \end{aligned}$$

dont la réciproque est

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-2,\infty[ &\to ]-\infty,-1] \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = -1-\sqrt{2+y}. \end{aligned}$$

◇

On remarque qu'on obtient le graphe de la fonction réciproque $f^{-1}$ en reflétant le graphe de $f$ par rapport à la diagonale $y = x$.