Chapitre 5

Dérivabilité

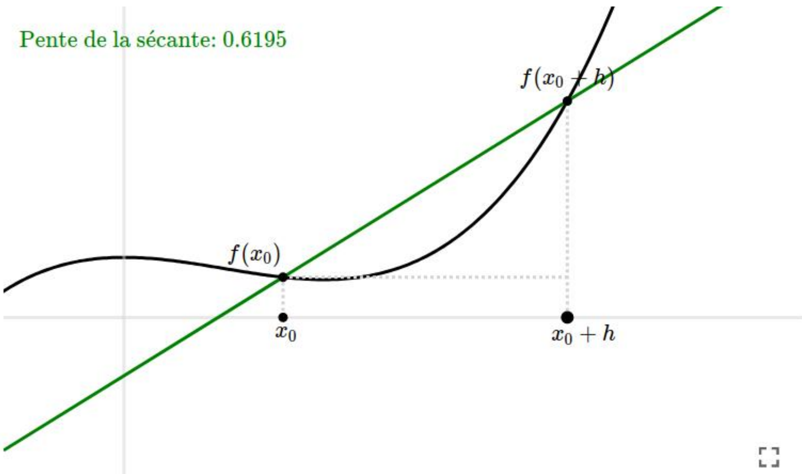
5.1 Définition et propriétés

5.1.1 Introduction

Étant donné une fonction f définie sur un voisinage de x_0, une information sur le *taux de variation de* f sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$ est donnée par le quotient

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

appelé le **rapport de Newton** de f en x_0. On pense à h comme un petit changement en x. Géométriquement, le rapport de Newton représente la pente de la droite sécante (en vert sur le dessin ci-dessous) au graphe de f, reliant les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

Remarque 5.1. Si on imagine que $f(t)$ représente la distance parcourue par une particule jusqu'au temps t, le rapport de Newton

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$

représente la vitesse moyenne entre les instants t_0 et $t_0 + h$. Plus h est petit, plus cette vitesse moyenne est proche de la *vitesse instantanée* en x_0. ◇

Plus h est petit, plus l'information donnée par le rapport de Newton sur la variation de f est précise. On peut donc se poser la question : Que se passe-t-il si on fait tendre $h \to 0$?

Si f est continue, $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ se rapproche de $(x_0, f(x_0))$ à mesure que h se rapproche de zéro. La limite du rapport de Newton représente donc une indétermination "$\frac{0}{0}$". Listons quelques comportements possibles.

Lorsque $h \to 0$, le rapport de Newton

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

peut...

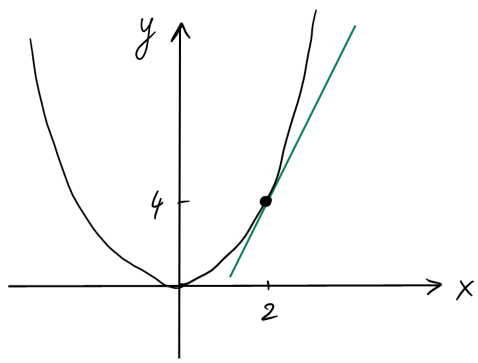
- ... tendre vers une limite finie,
- ... tendre vers $\pm\infty$,
- ... rester borné mais ne pas converger.

Considérons des exemples pour chacun de ces cas de figure.

Exemple 5.2. $f(x) = x^2$ est continue en $x_0 = 2$ et

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(4 + h) = 4\,.\end{aligned}$$

Géométriquement, la pente de la droite sécante (reliant les points $(2, f(2))$ à $(2+h, f(2+h))$) tend vers 4 lorsque h tend vers 0.



◇

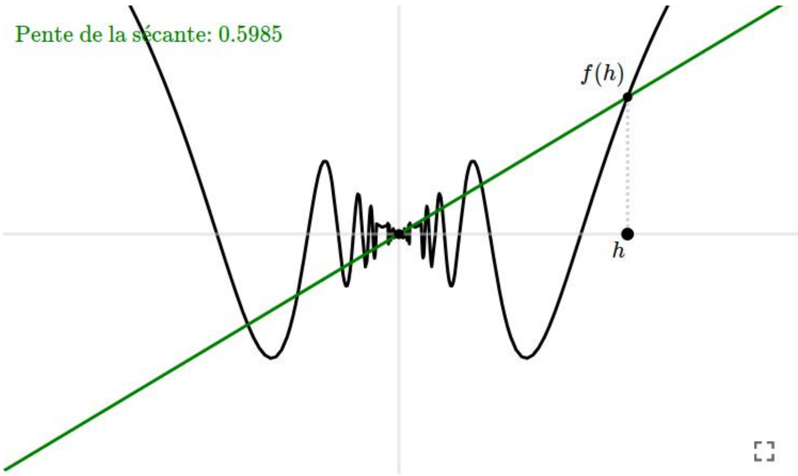
Exemple 5.3. Considérons

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0\,, \end{cases}$$

qui est continue en $x_0 = 0$ puisque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)\,,$$

mais pour laquelle
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right),$$
qui est borné mais n'a pas de limite lorsque $h \to 0$. Géométriquement, la pente de la droite sécante oscille entre $+1$ et -1 à mesure que h se rapproche de 0.



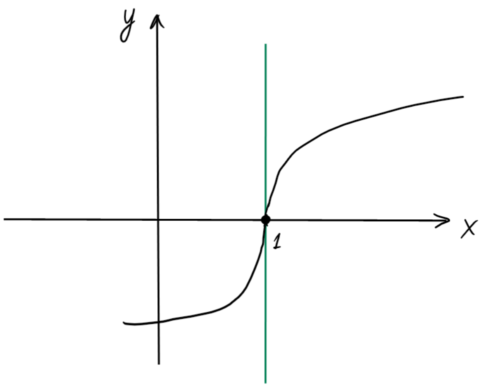
Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

◇

Exemple 5.4. Considérons $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, qui est continue en $x_0 = 1$ et

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{(1+h)-1} - \sqrt[3]{1-1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} \\ &= +\infty\,.\end{aligned}$$

Géométriquement, la droite tangente au graphe de f en 1 est verticale :



◇

5.1.2 Définition

Définition 5.5. Soit f définie sur un voisinage de x_0. f est **dérivable en** x_0 si la limite

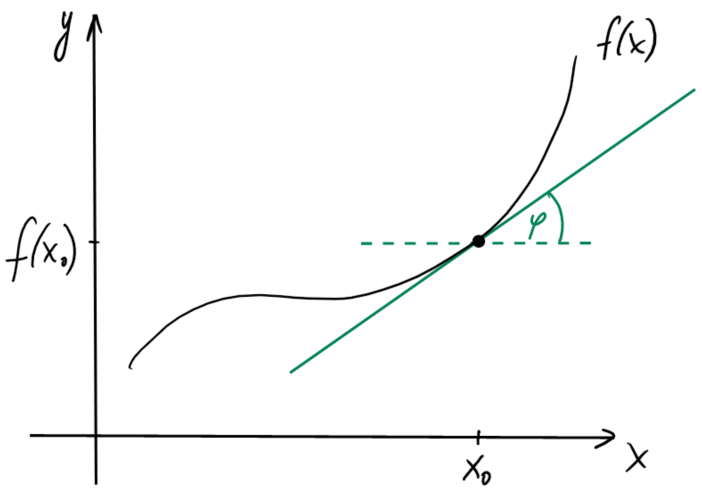
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe (c'est-à-dire, est égale à un nombre réel). Dans ce cas, cette limite est appelée la **dérivée** (ou le **nombre dérivé**) de f en x_0, et on la note $f'(x_0)$.

On peut écrire le nombre dérivé de diverses manières :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Géométriquement, l'existence de la dérivée $f'(x_0)$ est équivalente à l'existence d'une tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. En effet, lorsque $h \to 0$, la droite sécante tend vers la **droite tangente** au point x_0.



La pente de la tangente au graphe de f en x_0 est donc

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan(\varphi).$$

L'équation de la tangente au graphe de f en x_0 est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

qui est l'équation de la droite de pente $f'(x_0)$ passant par le point $(x_0, f(x_0))$.

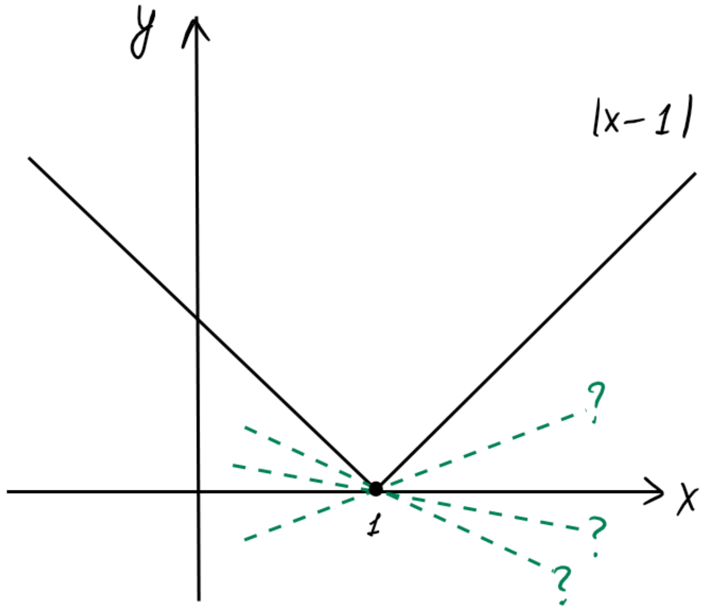
Exemples 5.6. • Prenons $f(x) = x^2$ en $x_0 = 2$. On a $f(2) = 4$ et $f'(2) = 4$ comme vu avant, et donc la tangente est donnée par

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4.$$

- Soit $f(x) = |x - 1|$. f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$. En effet, on a

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1) - 0}{x - 1} = 1,$$
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x - 1) - 0}{x - 1} = -1.$$

Donc la limite $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ (et donc $f'(1)$) n'existe pas. Effectivement, le graphe de f ne possède pas de tangente bien définie en $x_0 = 1$.



◇

5.1.3 Dérivabilité latérale

Le dernier exemple le suggère : des limites latérales permettent d'introduire des notions de dérivabilité latérale.

Définition 5.7. • Soit f définie sur un voisinage à gauche de x_0. Si

$$f'_-(x_0) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe, on l'appelle la **dérivée à gauche de** f **en** x_0.

- Soit f définie sur un voisinage à droite de x_0. Si

$$f'_+(x_0) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe, on l'appelle la **dérivée à droite de** f **en** x_0.

Géométriquement, ces dérivées latérales représentent les pentes des demi-droites tangentes au graphe de f à gauche et à droite, au point $(x_0, f(x_0))$.

Théorème 5.8. *f est dérivable en x_0 $\iff$ f est dérivable à gauche et à droite en x_0, et $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.*

Exemple 5.9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + x + 2)/2 & \text{si } x < 0\,, \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

On a $f(0) = \sqrt{0+1} = 1$, et donc

$$\begin{aligned} f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{(h^2 + h + 2)/2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{h+1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h+1} + 1} \\ &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Comme $f'_-(0) = f'_+(0) = \frac{1}{2}$, on en déduit par le théorème que f est dérivable en $x_0 = 0$ et que sa dérivée en ce point vaut $f'(0) = \frac{1}{2}$. ◇

Exemple 5.10. Soit $f(x) = |x - 1|$. On a vu plus haut que les dérivées latérales en $x_0 = 1$existent, et que

$$f'_-(1) = -1\,, \qquad f'_+(1) = +1\,.$$

Ainsi, $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, et par conséquent le théorème implique que f n'est pas dérivable en 1. ◇

5.1.4 Dérivabilité vs continuité

Théorème 5.11. *Si f est une fonction définie sur un voisinage de x_0, alors*

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est continue en } x_0\,.$$

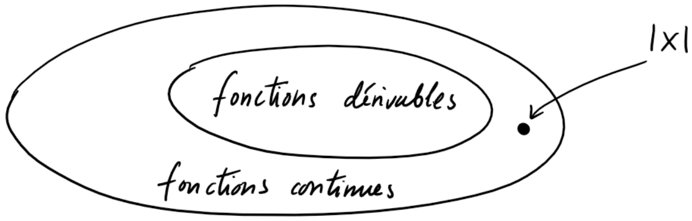
L'implication est aussi vraie si on replace la dérivabilité et la continuité par leurs analogues latéraux.

Démonstration. Supposons que f est dérivable en x_0. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\ &= \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \right) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a donc $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$: f est continue en x_0. □

Attention : la réciproque du théorème est fausse ! Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ est continue au point $x_0 = 0$ mais elle n'est pas dérivable en ce point.



Le théorème ci-dessus nous montre que la continuité est une condition nécessaire pour qu'une fonction soit dérivable. Mais il n'y a pas besoin de montrer séparément la continuité ; il suffit de montrer que la fonction est dérivable, et sa continuité est immédiate par le résultat ci-dessus.

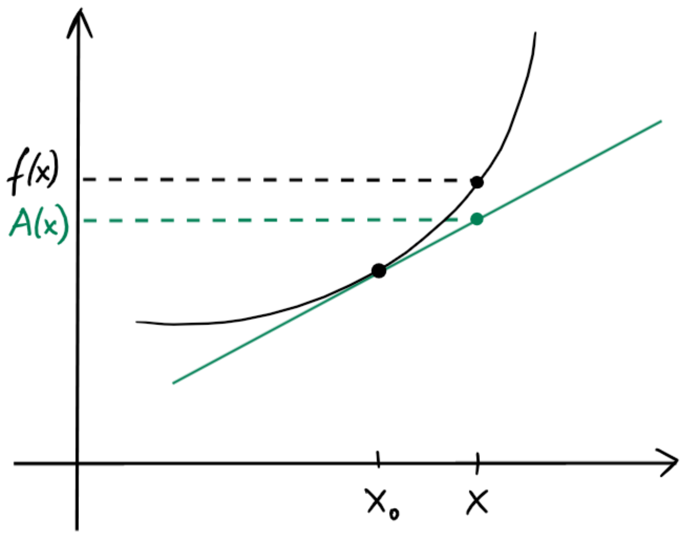
5.2 Approximation linéaire

Considérons une fonction f dérivable en x_0, ainsi que la droite tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

Pour souligner la dépendance en x, écrivons $y = A(x)$, où

$$A(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Le nombre $A(x)$ approxime bien la valeur de $f(x)$ au voisinage de x_0, dans le sens suivant. Commençons par exprimer la différence

$$\begin{aligned} f(x) - A(x) &= f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)] \\ &= (x - x_0) \cdot \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] \,, \end{aligned}$$

où l'on voit apparaître la différence entre le rapport de Newton et $f'(x_0)$, qui tend vers 0 lorsque $x \to x_0$ puisque f est dérivable en x_0. Ainsi, $f(x) - A(x)$ est un *produit* de deux termes qui tendent vers zéro.

On appelle $A(x)$ l'**approximation linéaire** de $f(x)$ au voisinage x_0.

Exemple 5.12. L'approximation linéaire de $f(x) = \sin(x)$ au voisinage de $x_0 = 0$ est donnée par

$$\begin{aligned} A(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) \\ &= \sin(0) + \sin'(0)(x-0) \\ &= x \end{aligned}$$

◇

Exemple 5.13. L'approximation linéaire de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ au voisinage de $x_0 = 8$ est donnée par

$$\begin{aligned} A(x) &= f(8) + f'(8)(x-8) \\ &= \sqrt[3]{8} + \tfrac{1}{3} 8^{-2/3}(x-8) \\ &= 2 + \tfrac{1}{12}(x-8)\,. \end{aligned}$$

Par exemple, avec $x = 8.012$, on approxime $\sqrt[3]{8.012} = f(8.012)$ par

$$A(8.012) = 2 + \tfrac{1}{12}(8.012 - 8) = 2.001$$

Remarquons que la "vraie" valeur est $f(8.012) = \sqrt[3]{8.012} = 2.00099949\ldots$ ◇

5.3 Fonction dérivée et règles de dérivation

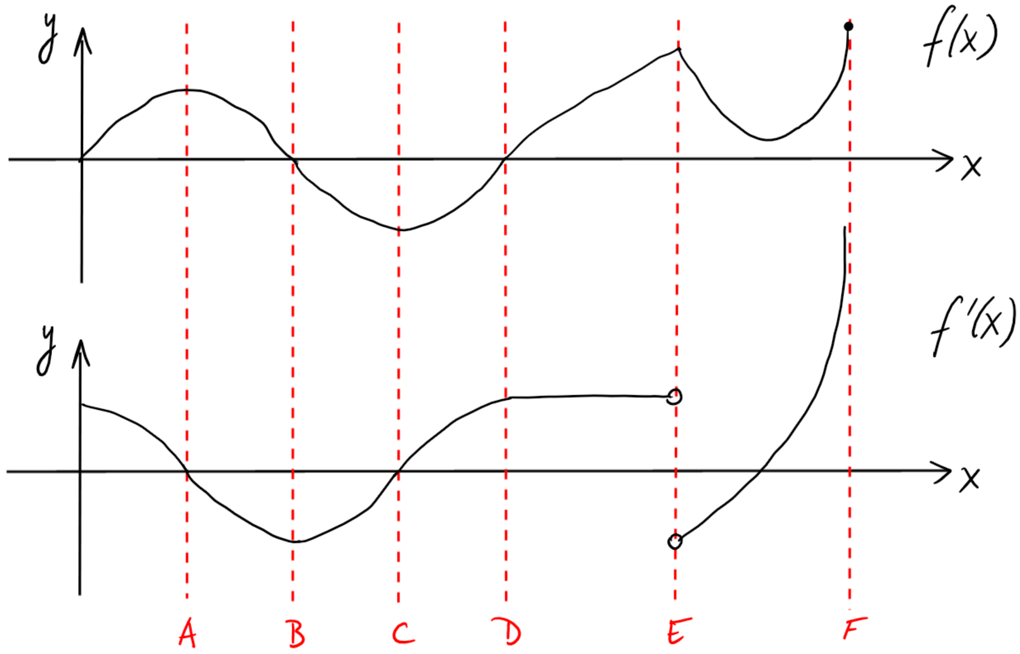
Définition 5.14. Si f est définie sur un intervalle ouvert I, f est dite **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point de I. On définit alors la fonction

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,,$$

appelée la **dérivée de** f **sur** I.

Notation équivalente : f', $\frac{df}{dx}$ (notation de Leibniz).

Exemple 5.15. Représentons une fonction f et sa dérivée f'.



- Au point A, la fonction f arrête de croître et commence à décroître. La dérivée f' est donc > 0 avant A et < 0 après.
- Au point B, f décroît le plus rapidement et donc la dérivée y a un minimum.
- Au point C, f arrête de décroître et commence à croître. La dérivée passe donc de < 0 à > 0.
- Au point D, f croît le plus rapidement. f' y a donc un maximum.
- Au point E, la fonction f n'est pas dérivable, et la fonction f' n'est donc pas définie en ce point.
- Au point F, f n'est pas dérivable et la tangente y est verticale. f' tend vers $+\infty$.

◇

5.3.1 Règles de dérivation

Théorème 5.16. *Soient f et g dérivables sur I. Pour tout $x \in I$,*

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
4. *Si* $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Si f est dérivable en x et g et dérivable en $f(x)$, on a aussi

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)\,.$$

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)+g'(x).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(\lambda f)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(\lambda f)(x+h)-(\lambda f)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\lambda f(x+h)-\lambda f(x)}{h}\\ &= \lambda\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lambda f'(x)\,.\end{aligned}$$

(Cette propriété peut aussi être vue comme une conséquence de la suivante, où une des fonctions est prise comme étant constante.)

3. Par définition,

$$(f\cdot g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h}\,.$$

Récrivons le quotient comme suit :

$$\begin{aligned}&\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h}\\ &\quad=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &\quad=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &\quad=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

Dans cette dernier ligne, les quotients convergent respectivement vers $f'(x)$ et $g'(x)$. Puis, comme g est dérivable, elle est continue en x, et donc

$$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)\,.$$

Ceci implique que

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\,.$$

4. En procédant comme dans le point précédent,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)} \\
&= \frac{1}{g(x)} \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)} \cdot \lim_{h\to 0} \left[g(x)\cdot \frac{(f(x+h)-f(x))}{h} - f(x)\cdot \frac{(g(x+h)-g(x))}{h} \right] \\
&= \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot (g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)) \\
&= \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

□

5.3.2 Dérivées de puissances

Voici quelques exemples de dérivées des fonctions élémentaires.

Remarquons pour commencer que si une fonction f est constante, $f(x) = C$ pour tout x, alors sa dérivée est nulle puisque

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = 0\,.$$

Théorème 5.17. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors*

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

(Si n est négatif, x^n n'est bien sûr pas définie en $x_0 = 0$.)

Démonstration. Commençons par les exposants entiers positifs, $x \in \mathbb{N}^*$. On procède par récurrence sur n.

Lorsque $n = 1$, $f(x) = x^1$, et donc

$$(x^1)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^1 - x^1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1\,.$$

Puisqu'on peut écrire cette dernière comme $(x^1)' = 1\cdot x^{1-1}$, on a démontré le résultat pour $n = 1$.

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $(x^n)' = nx^{n-1}$. Pour $n+1$, on peut écrire $x^{n+1} = x^n \cdot x$, et utiliser la règle de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned}
(x^{n+1})' &= (x^n \cdot x)' \\
&= (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' \\
&= nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 \\
&= nx^n + x^n = (n+1)x^n = (n+1)x^{(n+1)-1}\,.
\end{aligned}$$

Donc la formule est aussi vraie pour $n+1$.

Si on considère maintenant $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, alors $m = -n \in \mathbb{N}^*$, et donc par la règle de dérivation d'un quotient,

$$\begin{aligned}(x^n)' = (x^{-m})' &= \left(\frac{1}{x^m}\right)' \\ &= \frac{-(x^m)'}{(x^m)^2} \\ &= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= (-m)x^{-m-1} = nx^{n-1}\,.\end{aligned}$$

□

Exemple 5.18. $(x^{1234})' = 1234 \cdot x^{1233}$ ◇

Considérons une puissance non-entière, comme $\frac{1}{2}$:

Exemple 5.19. Si $x > 0$,

$$\begin{aligned}(\sqrt{x})' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.\end{aligned}$$

Remarquons qu'avec un exposant, $\sqrt{x} = x^{1/2}$, cette dernière prend la forme

$$(x^{1/2})' = \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\,.$$

◇

La dernière remarque suggère que la formule donnée dans le théorème précédent est aussi valable pour des exposants rationnels.

Théorème 5.20. *Soient $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$. Alors*

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \tfrac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}\,, \qquad x > 0$$

Démonstration. Commençons par le cas $p = 1$, $q \in \mathbb{N}^*$. On a

$$(x^{\frac{1}{q}})' = \lim_{\widetilde{x}\to x} \frac{\widetilde{x}^{1/q} - x^{1/q}}{\widetilde{x} - x}\,.$$

Effectuons le changement de variable $\widetilde{x}^{1/q} = \widetilde{y}$, $x^{1/q} = y$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\widetilde{x}\to x} \frac{\widetilde{x}^{1/q} - x^{1/q}}{\widetilde{x} - x} &= \lim_{\widetilde{y}\to y} \frac{\widetilde{y} - y}{\widetilde{y}^q - y^q} \\
&= \lim_{\widetilde{y}\to y} \frac{1}{\frac{\widetilde{y}^q - y^q}{\widetilde{y} - y}} \\
&= \frac{1}{\lim_{\widetilde{y}\to y} \frac{\widetilde{y}^q - y^q}{\widetilde{y} - y}} \\
&= \frac{1}{qy^{q-1}} \\
&= \frac{1}{q(x^{1/q})^{q-1}} \\
&= \tfrac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}
\end{aligned}$$

Maintenant, pour une valeur quelconque $p \in \mathbb{N}^*$, par la règle de dérivation d'une composée,

$$\begin{aligned}
(x^{\frac{p}{q}})' &= \big((x^{1/q})^p\big)' \\
&= p(x^{1/q})^{p-1}(x^{1/q})' \\
&= p(x^{1/q})^{p-1}\tfrac{1}{q}x^{1/q-1} \\
&= \tfrac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}\,.
\end{aligned}$$

□

5.3.3 Dérivées des fonctions trigonométriques

Théorème 5.21. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}
(\sin(x))' &= \cos(x) \\
(\cos(x))' &= -\sin(x)\,.
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

$$(\tan(x))' = \begin{cases} 1 + \tan^2(x) \ \textit{ou} \\ \frac{1}{\cos^2(x)}\,. \end{cases}$$

Démonstration. Par définition,

$$(\sin(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

On utilise la relation (voir Analyse A)

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)\,.$$

Après avoir réarrangé les termes, le quotient devient

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \sin(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h}\,.$$

Or on a d'une part que $1-\cos(h) \sim h^2/2$ au voisinage de $h=0$, donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2/2}{h} = 0\,,$$

et d'autre part on sait que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1\,.$$

Ceci implique que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \cos(x)\,.$$

En utilisant ensuite les relations

$$\begin{aligned} \sin(x+\tfrac{\pi}{2}) &= \cos(x)\,,\\ \cos(x+\tfrac{\pi}{2}) &= -\sin(x)\,, \end{aligned}$$

on peut utiliser la formule pour la dérivée d'une composée comme suit :

$$\begin{aligned} (\cos(x))' &= \big(\sin(x+\tfrac{\pi}{2})\big)' \\ &= \cos(x+\tfrac{\pi}{2}) \cdot \underbrace{(x+\tfrac{\pi}{2})'}_{=1} \\ &= -\sin(x)\,. \end{aligned}$$

Finalement, par la règle de dérivation d'un quotient,

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\,,$$

que l'on peut simplifier avec $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, ou alors séparer en

$$\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

□

Exemple 5.22.

$$\left(\sqrt{\sin(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \cdot (\sin(x))' = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}\,.$$

◇

5.3.4 Dérivées exponentielles et logarithmes

Théorème 5.23. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$(e^x)' = e^x\,.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

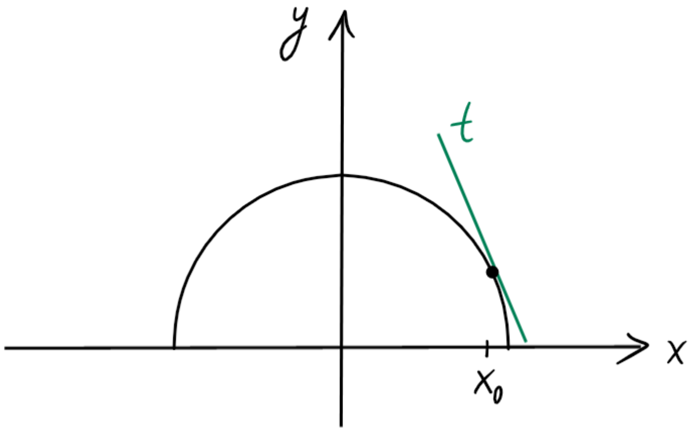
$$(\ln(x))') = \frac{1}{x}\,.$$

5.4 Tangentes à des courbes dans $\mathbb{R}^2$

La dérivée d'une fonction évaluée en $x_0 \in \mathbb{R}$ nous donne la pente de la tangente à la courbe définie par la fonction dans le plan au point $(x_0, f(x_0))$. On peut utiliser la dérivée pour résoudre des problèmes géométriques, comme ci-dessous.

Attention : il ne faut pas confondre la fonction dérivée avec l'équation de la tangente !

Exemple 5.24. Soit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $D_f = [-1, 1]$.



Déterminons l'équation de la tangente t au graphe de f en $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On sait que l'équation de t est donnée par

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,.$$

On a d'abord que

$$f(x_0) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\,,$$

et puisque

$$f'(x) = \left[\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

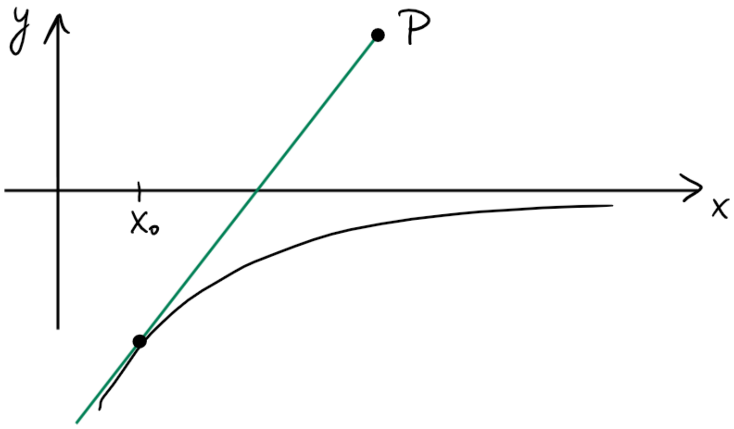
on peut calculer $f'(x_0) = \frac{-\sqrt{3}/2}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = -\sqrt{3}$. L'équation de t est donc

$$y = -\sqrt{3}\left(x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\,.$$

◇

On peut aussi chercher des tangentes à une courbe sans connaître a priori le point de tangence.

Exemple 5.25. Soit $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$. Déterminons l'équation de la tangente t au graphe de f issue du point $P(2, 1)$.



Il s'agit ici de déterminer le point de tangence $(x_0, f(x_0))$ (où la tangente touche de graphe de f).

t a l'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Comme t passe par $P(2,1)$, on doit avoir $1 = f'(x_0)(2 - x_0) + f(x_0)$. Résolvons cette équation pour trouver x_0. Il nous faut d'abord calculer la dérivée en un point quelconque :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Longrightarrow f'(x_0) = 1 - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+1}} \, .$$

Ainsi, l'équation du dessus en x_0 devient

$$\begin{aligned}
& 1 = \big(1 - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+1}}\big)(2 - x_0) + \left(x_0 - \sqrt{x_0^2+1}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & 1 = 2 - x_0 - \frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2+1}} + \frac{x_0^2}{\sqrt{x_0^2+1}} + x_0 - \sqrt{x_0^2+1} \\
\Longleftrightarrow\ & -1 = \frac{x_0^2 - 2x_0}{\sqrt{x_0^2+1}} - \sqrt{x_0^2+1} \\
\Longleftrightarrow\ & -\sqrt{x_0^2+1} = x_0^2 - 2x_0 - \big(x_0^2+1\big) \\
\Longleftrightarrow\ & 2x_0 + 1 = \sqrt{x_0^2+1} \text{ (et donc } 2x_0 + 1 \geqslant 0) \\
\Longleftrightarrow\ & (2x_0+1)^2 = x_0^2 + 1 \text{ et } x_0 \geqslant \frac{-1}{2} \\
\Longleftrightarrow\ & 4x_0^2 + 4x_0 + 1 = x_0^2 + 1 \text{ et } x_0 \geqslant \frac{-1}{2} \\
\Longleftrightarrow\ & x_0(3x_0 + 4) = 0 \text{ et } x_0 \geqslant \frac{-1}{2} \\
\Longleftrightarrow\ & x_0 = 0 \text{ car } \frac{-4}{3} < \frac{-1}{2}.
\end{aligned}$$

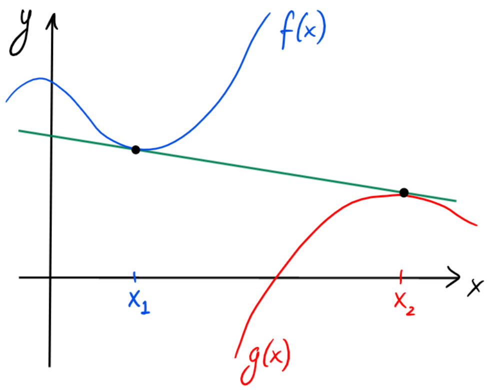
L'équation de t est donc

$$\begin{aligned}
y = f'(0)(x - 0) + f(0) &= \left(1 - \frac{0}{\sqrt{0^2+1}}\right) x + \left(0 - \sqrt{0^2+1}\right) \\
&= x - 1 \, .
\end{aligned}$$

$\diamond$

5.4.1 Tangente commune à deux courbes

Considérons deux fonctions $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et considérons une tangente commune à leurs graphes, c'est-à-dire une droite qui est tangente à la fois au graphe de f et au graphe de g :



Les points de tangence sont a priori distincts (comme sur l'image), on les nomme x_1 et x_2,

Pour trouver l'équation $y = mx + c$ de la tangente commune, il faut que

$$m = f'(x_1) = g'(x_2)\,,$$

et que les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, g(x_2))$ soient tous deux sur la droite $y = mx + c$.

Exemple 5.26. Cherchons les tangentes communes aux graphes des fonctions $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = -x^2 + 6x - 7 = -(x-3)^2 + 2$.

— On a $m = f'(x_1) = g'(x_2)$:

$$\begin{aligned} m &= f'(x_1) = 2x_1 \\ m &= g'(x_2) = -2x_2 + 6. \end{aligned}$$

On a donc $2x_1 = -2x_2 + 6 \iff x_1 = -x_2 + 3$.

— $(x_1, f(x_1))$ se trouve sur la tangente commune $y = mx + c$:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= mx_1 + c \\ x_1^2 + 2 &= (2x_1)x_1 + c \\ c &= -x_1^2 + 2. \end{aligned}$$

— $(x_2, g(x_2))$ se trouve sur la tangente commune $y = mx + c$:

$$\begin{aligned} g(x_2) &= mx_2 + c \\ -x_2^2 + 6x_2 - 7 &= (-2x_2 + 6)x_2 + c \\ c &= x_2^2 - 7. \end{aligned}$$

— Les inconnues x_1, x_2, c doivent donc satisfaire

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 3 \\ c = -x_1^2 + 2 \\ c = x_2^2 - 7 \end{cases}$$

On peut commencer par égaler la deuxième et la troisième équation, puis insérer la première :

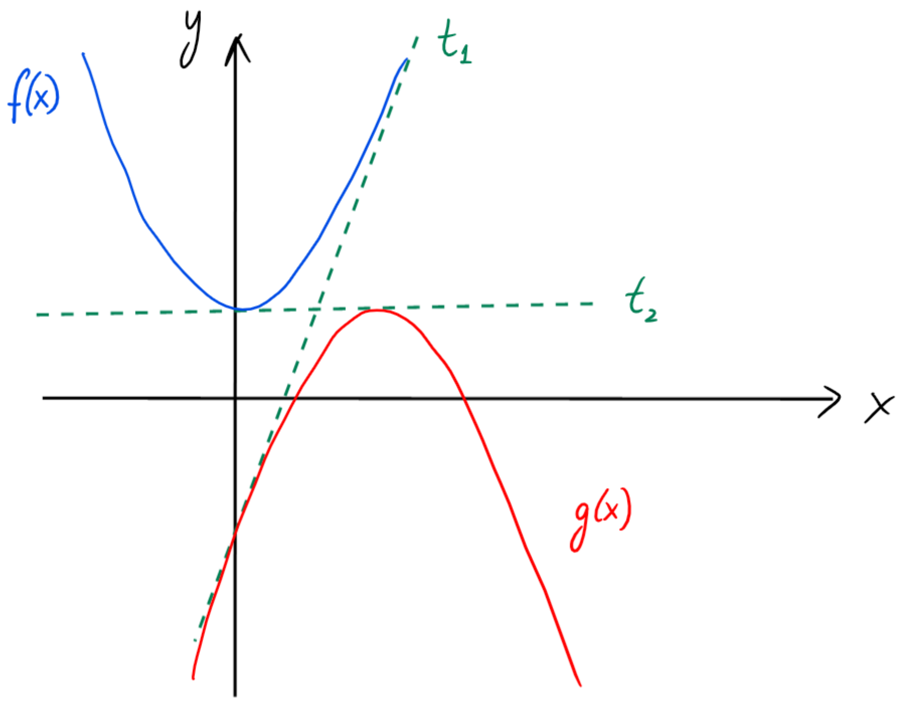
$$\begin{aligned}-x_1^2+2=x_2^2-7 &\iff -(-x_2+3)^2+2=x_2^2-7\\ &\iff 2x_2(x_2-3)=0.\end{aligned}$$

On a donc deux solutions :

$$x_2=0, x_1=3 \qquad \text{et} \qquad x_2=3, x_1=0.$$

Les deux tangentes communes sont donc

$$\begin{aligned}t_1 &: y=6x-7\\ t_2 &: y=2.\end{aligned}$$



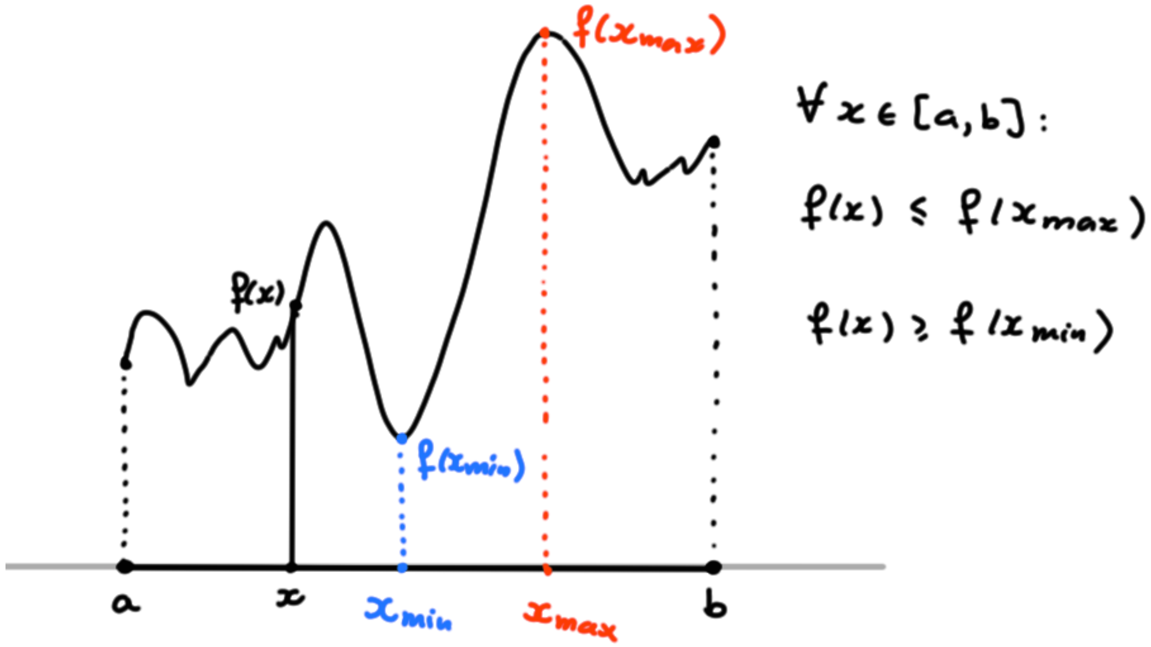
◇

5.5 Théorème de Rolle

Définition 5.27. Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ possède

- un **maximum global** en x_0 si pour tout $x\in[a,b]$, on a $f(x)\leqslant f(x_0)$; on dit alors que son maximum est **atteint** en x_0.
- un **minimum global** en x_0 si pour tout $x\in[a,b]$, on a $f(x)\geqslant f(x_0)$; on dit alors que son minimum est **atteint** en x_0..

Théorème 5.28. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son maximum et son minimum sur $[a,b]$.*



Combiné avec le Théorème des valeurs intermédiaires, ce résultat implique que l'image d'un intervalle fermé et borné, par une fonction continue, est aussi un intervalle fermé et borné.

La recherche des max/min globaux peut parfois se faire à l'aide de l'étude de la dérivée de la fonction, lorsque celle-ci existe. Mais puisque la dérivée est une propriété *locale* des fonctions, on a aussi besoin d'une notion local de max/min.

Définition 5.29. Une fonction f possède
- un **maximum local** en x_0 si il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f(x) \leqslant f(x_0)$
- un **minimum local** en x_0 si il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f(x) \geqslant f(x_0)$

Théorème 5.30. *Soit f dérivable sur $]a,b[$. Si f possède un minimum ou maximum local en $x_0 \in]a,b[$, alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. Supposons que f admet un maximum local en $x_0 \in]a,b[$ (on a une preuve analogue dans le cas d'un minimum). Puisque f est dérivable en x_0, elle est en particulier à gauche et à droite en x_0, ce qui implique

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \,. \end{aligned}$$

Mais, puisque $f(x_0)$ est un maximum local, on a $f(x_0+h) \leqslant f(x_0)$ pour tout h suffisamment petit. On a donc d'une part que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0 \,,$$

et d'autre part que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0 \,.$$

Ceci implique que $0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$, d'où $f'(x_0) = 0$. □

Remarquons que l'implication inverse n'est pas vraie. Par exemple, la dérivée de la fonction $f(x) = x^3$ s'annule en 0 mais la fonction n'y possède pas de maximum ni de minimum.

Théorème 5.31 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f'(x_0) = 0$.*

On remarque qu'il peut bien sûr y avoir plusieurs points où f' s'annule.

Démonstration. Comme f y est continue, f atteint son maximum et son minimum global sur $[a, b]$.

- Si un maximum ou un minimum se trouve en un point intérieur $x_0 \in]a, b[$, alors par le résultat précédent, on a $f'(x_0) = 0$.
- Si il n'y a pas de maximum ou de minimum en un point intérieur, alors la valeur $f(a) = f(b)$ est à la fois le maximum et le minimum de f sur $[a, b]$. Ceci implique que f est constante sur $[a, b]$ et donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

□

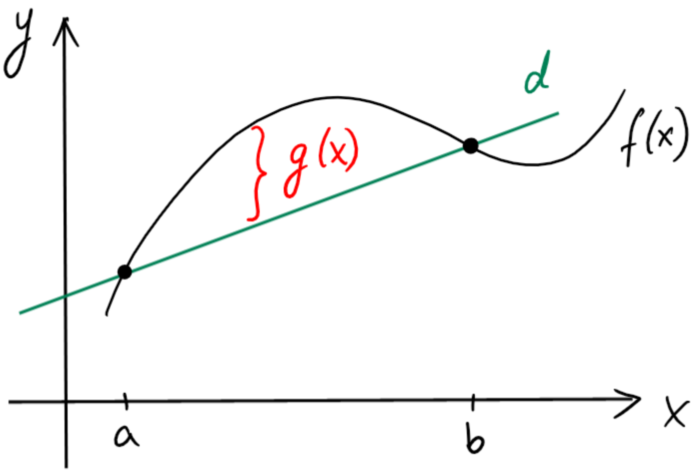
5.6 Théorème des accroissements finis

Théorème 5.32 (Théorème des accroissements finis (TAF))**.** *Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. L'équation de la sécante d passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

$$y = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \cdot (x - a) + f(a).$$



On définit la fonction de la différence entre d et $f(x)$:

$$g(x) := f(x) - \left[\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \cdot (x - a) + f(a)\right].$$

g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, car f l'est, et on a $g(a)=g(b)=0$. Les hypothèses du Théorème de Rolle sont alors vérifiées, et on a donc un $x_0 \in]a,b[$ tel que $g'(x_0)=0$. Mais

$$g'(x) = f'(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right),$$

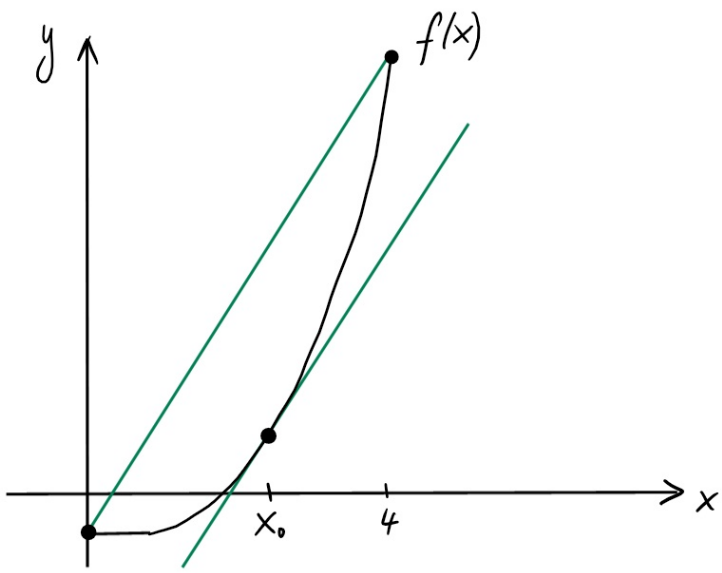
et donc $g'(x_0) = f'(x_0) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) = 0$ implique que

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Remarques
- Le Théorème des accroissements finis est une généralisation du Théorème de Rolle.
- Si f décrivait la distance parcourue en fonction du temps, le TAF dirait qu'il y a un moment auquel la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne entre le temps a et le temps b. Par exemple, si on réalise un trajet à une vitesse moyenne de 100 km/h, alors il doit y avoir un moment du trajet où on roule à 100 km/h !
- Géométriquement, ce théorème dit qu'il y a au moins un point x_0 entre a et b tel que la tangente en x_0 est parallèle à la droite sécante entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
- Ce résultat est essentiel pour déduire des conséquences géométriques de la dérivée, comme on va voir.

Exemples 5.33. • Soit $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leqslant 1, \\ x^2-2x & \text{si } x > 1. \end{cases}$ et soit Γ le graphe de f. Déterminons $x_0 \in]0,4[$ tel que la tangente à Γ en x_0 est parallèle à la sécante passant par $(0, f(0)) = (0,-1)$ et $(4, f(4)) = (4,8)$.



Pour pouvoir appliquer le TAF sur $]0,4[$, il nous faut vérifier les hypothèses
— f continue sur $[0,4]$, et
— f dérivable sur $]0,4[$.

En effet, f est continue sur $[0,4]$, puisque f est clairement continue en $x \neq 1$, et en 1 on a $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, donc f y est continue aussi.

f est clairement dérivable en $x \neq 1$, et en 1 on a

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1-(-1)}{h} = 0, \text{ et}$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2-2(1+h)-(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0,$$

d'où f est dérivable en 1 aussi. Alors le TAF s'applique et implique que x_0 existe. On peut le trouver explicitement.

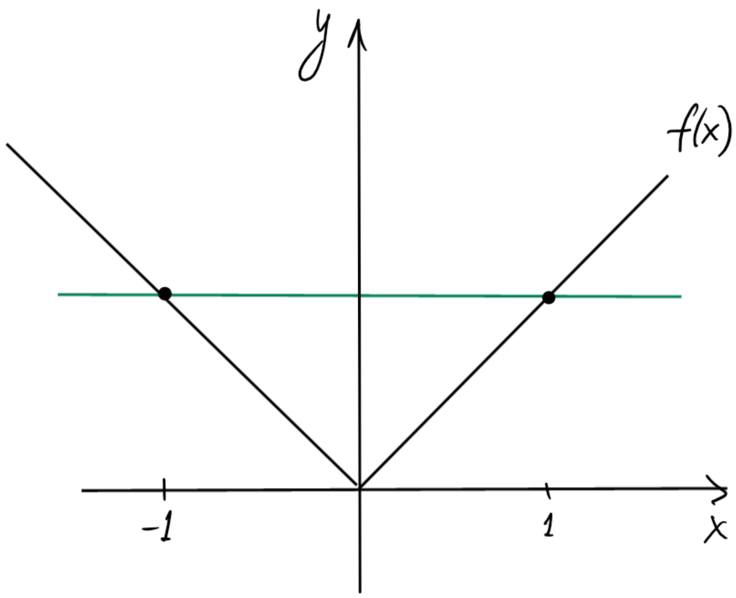
La pente de la sécante passant par $(0,-1)$ et $(4,8)$ est $\frac{8-(-1)}{4-0} = \frac{9}{4}$.

La pente de la tangente en x_0 est

$$f'(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 \leqslant 1, \\ 2x_0 - 2 & \text{si } x_0 > 1. \end{cases}$$

Pour que les deux droites soient parallèles, il nous faut $f'(x_0) = \frac{9}{4}$, c'est-à-dire $2x_0 - 2 = \frac{9}{4}$. On a donc $x_0 = \frac{17}{8} \in]0,4[$.

- Soit $f(x) = |x|$. La pente de la sécante passant par $(-1, f(-1))$ et $(1, f(1))$ est 0. Mais il n'y a pas de $x_0 \in]-1,1[$ tel que $f'(x_0) = 0$, et donc pas de tangente parallèle à cette sécante. En effet, f ne vérifie pas les hypothèses du TAF car f n'est pas dérivable en $0 \in]-1,1[$.



◇

On va maintenant parler de quelques conséquences du TAF. Comme on a mentionné, ce résultat nous aide à déduire des conséquences géométriques de la dérivée. Si on a des informations sur f, on peut pendre la limite du rapport du Newton pour trouver f' et déduire des informations sur la variation de la fonction. Mais si on a des informations sur la dérivée, comment avoir de l'information sur f ? On ne peut pas "défaire" la limite, mais on peut justement utiliser le TAF.

On sait que pour une fonction constante, la dérivée s'annule. Le TAF nous permet de montrer que l'implication inverse est vraie aussi.

Corollaire 4. *Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I, telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Alors $f(x) = c$ pour tout $x \in I$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.*

Démonstration. Pour n'importe quels $a, b \in I$ avec $a < b$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ par le TAF. Or $f'(x_0) = 0$, donc $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ et alors $f(b) = f(a)$. Comme ceci est vrai pour n'importe quels $a, b \in I$, f prend donc la même valeur partout sur I, donc $f(x) = c$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$. □

Corollaire 5. *Soient f, g dérivables sur un intervalle ouvert I, telles que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in I$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = g(x) + c$ pour tout $x \in I$.*

Démonstration. Laissée en exercice. □

Corollaire 6. *Soit I un intervalle ouvert, et f une fonction dérivable sur I.*
- *$f'(x) \geqslant 0$ sur I $\iff$ f est croissante sur I.*
- *$f'(x) \leqslant 0$ sur I $\iff$ f est décroissante sur I.*

Démonstration. On montre la première équivalence, la deuxième est laissée en exercice.

Supposons d'abord que f est croissante sur I. Prenons $x_0 \in I$ et $h > 0$ tel que $x_0 + h \in I$. Alors on a $f(x_0 + h) \geqslant f(x_0)$, et donc $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0$, d'où

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0.$$

Mais puisque f est dérivable en x_0, $f'(x_0) = f'_+(x_0)$, et donc on a $f'(x_0) \geqslant 0$.

Supposons maintenant que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Par le TAF appliqué à l'intervalle $[a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ tel ue

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \geqslant 0.$$

Puisque $b - a > 0$, on a donc que $f(b) - f(a) \geqslant 0$, d'où $f(a) \leqslant f(b)$. □

On remarque qu'on a aussi
- $f'(x) > 0$ sur $I \Longrightarrow f$ est strictement croissante sur I,
- $f'(x) < 0$ sur $I \Longrightarrow f$ est strictement décroissante sur I.

Par contre, une fonction strictement croissante ou strictement décroissante peut avoir une dérivée nulle, par exemple $f(x) = x^3$ en 0.

Corollaire 7. *Soit f une fonction continue en x_0 et dérivable sur un voisinage épointé de x_0. Si $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existe, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$.*

Démonstration. La fonction f est continue en x_0 et dérivable sur un voisinage épointé de x_0. Donc pour tout h tel que $x_0 + h$ appartient à ce voisinage, on peut appliquer le TAF sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$ si $h > 0$, ou $[x_0 + h, x_0]$ si $h < 0$:

$$\exists t \in]0,1[\text{ tel que } \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + t \cdot h).$$

Lorsque $h \to 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(x_0 + t \cdot h).$$

Par hypothèse, la limite $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ existe. Elle est donc unique et ne dépend pas de la façon dont x tend vers x_0. On a alors

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = \lim_{h\to 0} f'(x_0 + t \cdot h).$$

Alors $f'(x_0)$ existe et

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(x_0 + t \cdot h) = \lim_{x\to x_0} f'(x).$$

□

Attention : ce résultat ne dit pas que la dérivée est continue ! Il dit juste que la seule façon de ne pas être continue pour une fonction dérivée est une limite $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ non existante.

Ce corollaire est utile si par exemple on a une fonction qui est clairement dérivable à gauche et à droite de x_0, et on voudrait montrer qu'elle l'est aussi en x_0. Au lieu de calculer et comparer les dérivées à gauche et à droite, grâce à ce corollaire, on peut simplement montrer que $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ existe (en calculant cette limite à gauche et à droite, par exemple) et ainsi on aura que $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$.

Exemple 5.34. Soit $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leqslant 1, \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 1. \end{cases}$

On peut montrer que f est dérivable en 1 en calculant

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1-(-1)}{h} = 0,$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) - (-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0.$$

Mais grâce au corollaire ci-dessus, on peut simplement constater que f est continue, on a

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 2x - 2 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

et $\lim_{x\to 1} f'(x)$ existe et vaut 0. On a donc que $f'(1) = 0$. ◇

Le théorème suivant sera utilisé dans la preuve de la Règle de Bernoulli–de l'Hôpital.

Théorème 5.35 (TAF généralisé)**.** *Soient f et g continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, tel que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors il existe $t \in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Démonstration. Idée : On applique le TAF à la fonction $h(x) := (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$. □

On remarque qu'en prenant $g(x) = x$, on retrouve le TAF.

5.7 Règle de Bernoulli–de l'Hôpital

On a utilisé les limites pour calculer les dérivées à partir de la définition. On va voir maintenant que les dérivées peuvent nous aider à calculer les limites.
Prenons l'exemple d'une indétermination du type "$\frac{0}{0}$",

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}.$$

On ne peut pas utiliser l'IPE $\sin(x) \sim x$ ici, car ce n'est pas une expression factorisée. Pour calculer cette limite, on introduit l'outil suivant.

Théorème 5.36 (Règle de BH). *Soient f et g définies sur un voisinage épointé V de $x_0 \in \mathbb{R}$, telles que f et g y sont dérivables et $g(x), g'(x) \neq 0$ sur V. Si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) \in \{0, +\infty, -\infty\}$$

et la limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est égale à $+\infty$ ou $-\infty$, alors on a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ce théorème reste vrai si on remplace

- $\lim_{x\to x_0}$ par $\lim_{x\to x_0^+}$ ou $\lim_{x\to x_0^-}$, ou
- V par un voisinage de $\pm\infty$ et $\lim_{x\to x_0}$ par $\lim_{x\to\pm\infty}$.

Démonstration. Montrons le cas particulier où

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}.$$

On prolonge d'abord f et g par continuité en définissant

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Ces prolongées sont continues sur un voisinage de x_0.

Soit $x \in V$ tel que $x_0 < x$. Alors $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont continues sur $[x_0, x]$ et dérivables sur $]x_0, x[$. On peut donc appliquer le TAF généralisé sur cet intervalle. Ainsi, il existe $t \in]x_0, x[$ tel que

$$\frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(x_0)} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}.$$

Lorsque $x \to x_0^+$, on a $t \to x_0^+$, et donc

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \lim_{t \to x_0^+} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = L.$$

De manière analogue, on montre que $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. On peut donc conclure que $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. □

La Règle de BH s'applique seulement dans un cas d'indétermination du type "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$".

Exemples 5.37. • ("$\frac{0}{0}$") : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$
— f, g définies et dérivables sur un voisinage épointé de 0, par ex. $]-1,1[\setminus\{0\}$,
— $g(x) \neq 0$, $g'(x) = 3x^2 \neq 0$ sur ce voisinage épointé.
On calcule

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-(x^2/2)}{3x^2} \quad \text{(par IPE)} \\ &= \frac{-1}{6}.\end{aligned}$$

Par BH, on a donc $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = \frac{-1}{6}$.

• ("$\frac{\infty}{\infty}$") : $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$
— f, g définies et dérivables sur $]1, \infty[$,
— $g(x) \neq 0$, $g'(x) = e^x \neq 0$ sur $]1, \infty[$.
On calcule

$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$,

Par BH, on a donc $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

◇

Généralisation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x}$.

Démonstration. Preuve par récurrence :
Vérifié pour $n = 1$ ci-dessus. Si c'est vrai pour n, alors on a pour $n + 1$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} \underbrace{=}_{\text{BH}} \lim_{x \to \infty} \frac{(n+1)x^n}{e^x} = (n+1) \cdot \underbrace{\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x}}_{=0 \text{ par hyp.}} = 0.$$

On déduit que pour tout polynôme $P(x)$, on a $\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln(x))^n}{x} = \lim_{y \to \infty} \frac{y^n}{e^y} = 0,$$

en utilisant le changement de variable $y = \ln(x)$. □

Exemples 5.38. Voici quelques autres indéterminations.

- ("$0 \cdot \pm\infty$") : $\lim_{x\to 0^+}(x \cdot \ln(x))$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}(x \cdot \ln(x)) &= -\lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln(x)}{1/x} \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x}{-1/x^2} \text{ (par BH, } \frac{\infty}{\infty}) \\
&= -\lim_{x\to 0^+} x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- ("0^0") : $\lim_{x\to 0^+} x^x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x^x &= \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} \ \left(\text{en général, } f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}\right) \\
&= \exp(\lim_{x\to 0^+}(x \cdot \ln(x))) \ \ (\text{car } \exp(x) \text{ est continue}) \\
&= \exp(0) = 1.
\end{aligned}$$

- ("1^∞") : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} \exp\left(x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot(-1/x^2)}{(-1/x^2)}\right) \\
&= \exp(1) = e.
\end{aligned}$$

◇

Exemples 5.39. Voici aussi quelques exemples où il ne faudrait pas utiliser la Règle de BH.

- $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x+1} \neq \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

  Ceci n'est pas une forme indéterminée, la limite du dénominateur n'est pas 0. On a $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x+1} = 0$.
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

  Même si BH s'applique, on connaît déjà cette limite après notre travail sur les IPE.
- $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x-1}} = 1$.

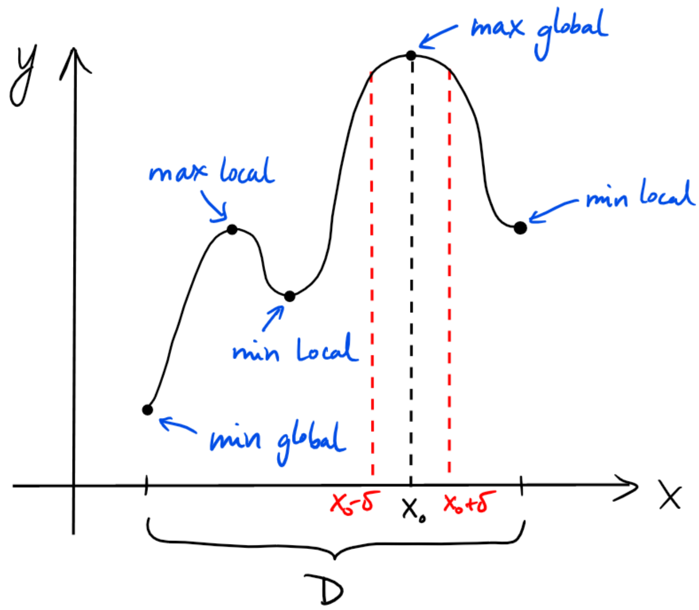
  Ici, BH s'applique mais ne donne rien d'utile :

  $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/2\sqrt{x+1}}{1/2\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$.
- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{999}-x^{1000}}{3x^{1000}-x^{1001}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^{1000}}{-x^{1001}} = 0$.

◇

5.8 Extrema de fonctions

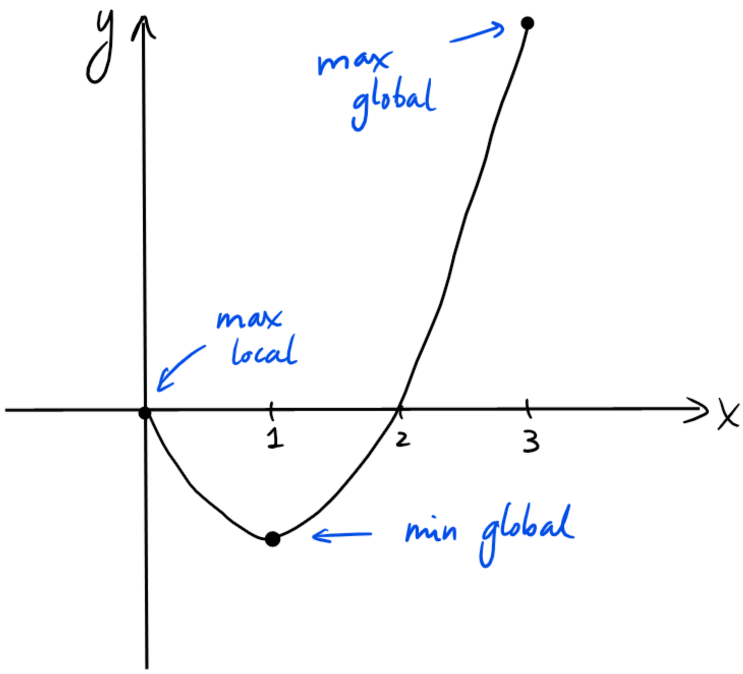
On a déjà donné les définitions d'**extrema**, à savoir de maximum/minimum global/local dans une section précédente.



Remarque 5.40. Un extremum global est aussi un extremum local. Par contre, un extremum local n'est pas forcément global. ◇

À titre d'illustration, voyons quelques cas "faciles" de fonctions pour lesquelles les extrema peuvent être trouvés sans difficulté.

Exemple 5.41. Soit $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^2 - 2x$.

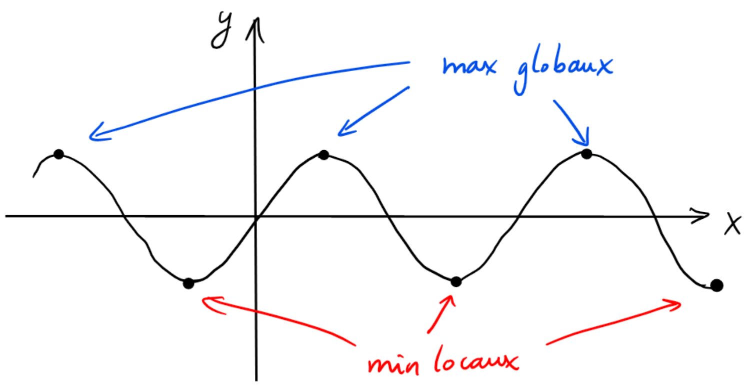


Puisque $f(x) = (x-1)^2 - 1$, on peut représenter la parabole précisément, et en déduire que f possède :

- un minimum global en $x = 1$,
- un maximum global en $x = 3$,
- un maximum local en $x = 0$.

◇

Exemple 5.42. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \sin(x)$.



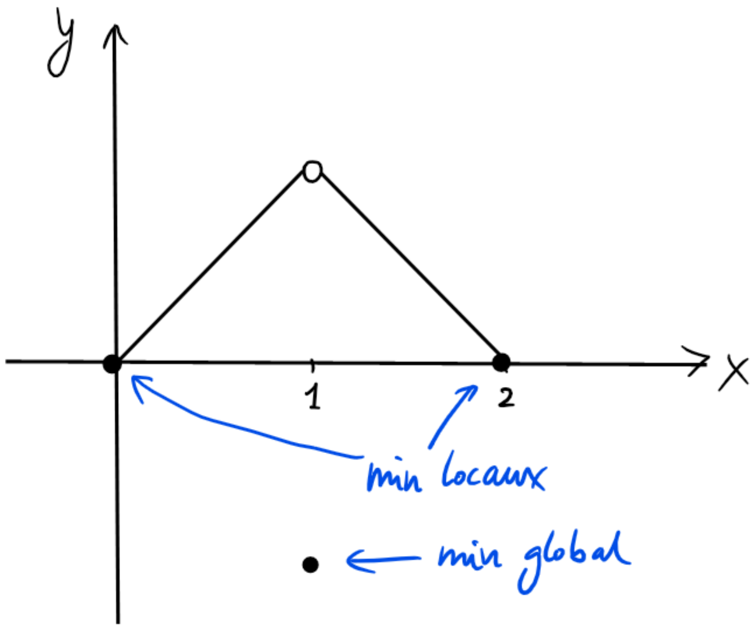
f possède

- une infinité de maximums globaux, en $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,
- une infinité de minimums globaux, en $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

◇

Exemple 5.43. Soit $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x-1| & \text{si } x \neq 1, \\ -1 & \text{si } x = 1\,. \end{cases}$$



Alors f

- possède un minimum global en $x = 1$,
- possède deux minimums locaux en $x = 0$ et en $x = 2$,
- ne possède pas de maximum (ni local ni global).

$\diamond$

5.8.1 Recherche analytique d'extrema

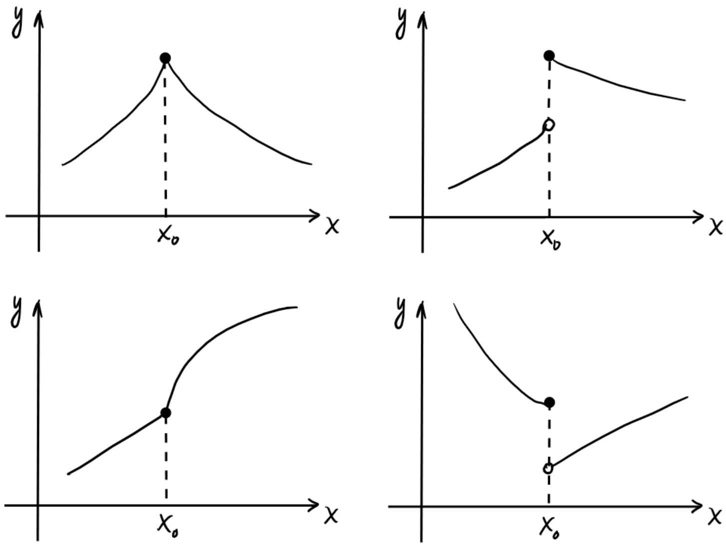
Comment peut-on trouver les extrema d'une fonction donnée, par des méthodes analytiques ?

Avant de chercher des extrema, il faudrait déjà être sûr que la fonction en possède. Et rappelons que si la fonction est *continue*, et définie sur un intervalle *fermé et borné*, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, alors l'existence des extrema globaux est garantie, ce qui est un bon point de départ, même si on a besoin d'un algorithme plus précis qui mène à leur détermination.

Ensuite, on a aussi vu le résultat suivant : pour une fonction dérivable f sur $]a, b[$, si f possède un minimum/maximum local en $x_0 \in]a, b[$, alors $f'(x_0) = 0$. On a aussi noté que sa réciproque n'est pas vraie.

Donc si $f'(x_0) = 0$, alors x_0 est un *candidat* à être un minimum/maximum local.

Mais si f n'est pas dérivable en x_0, f peut y posséder un minimum/maximum local, ou pas :



Pour trouver les candidats à être extrema locaux il faut

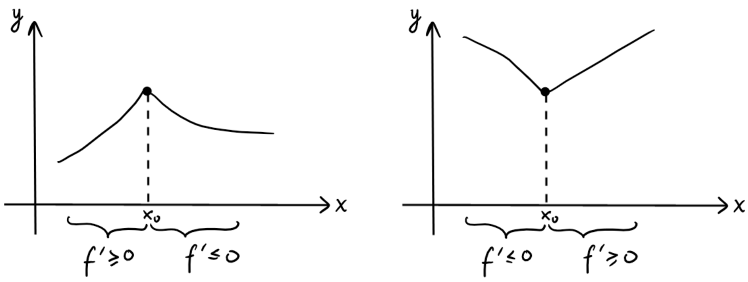
- trouver les points x_0 tels que $f'(x_0) = 0$,
- trouver les points où f n'est pas dérivable,
- regarder les points sur le bord du domaine, s'il y en a.

Ensuite on étudie la dérivée au voisinage du point, lorsque c'est possible, pour déterminer lesquels de ces candidats sont des extrema locaux.

Théorème 5.44. *Soit f continue en x_0 et dérivable dans un voisinage épointé de x_0. Si f' change de signe en x_0, alors f possède un extremum local en x_0.*

Par “change de signe en x_0”, on veut dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que

- $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0[$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta]$ (dans ce cas, il y a un max local en x_0), ou
- $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0[$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta]$ (dans ce cas, il y a un min local en x_0).

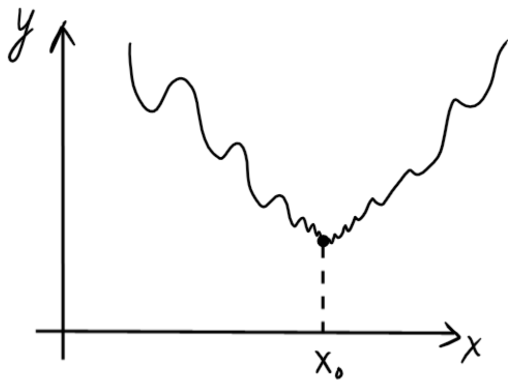


Remarques

- Il faut vérifier la continuité de f en x_0 ! Sinon, l'assertion du théorème pourrait être fausse. Par exemple, reprenons l'exemple précédent

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 - |x-1| & \text{si } x \neq 1, \\ -1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

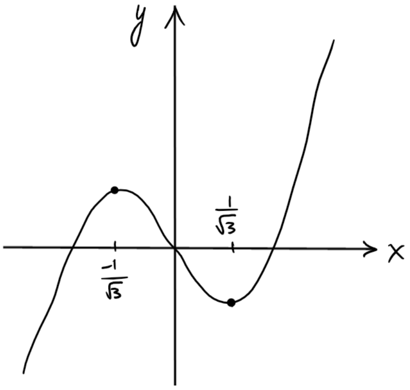
  f n'est pas continue en $x_0 = 1$, et malgré le changement de signe de f' en x_0, il n'y a pas de max en x_0.
- La réciproque du théorème est fausse : si f possède un extremum local en x_0, f' ne change pas forcément de signe en x_0.

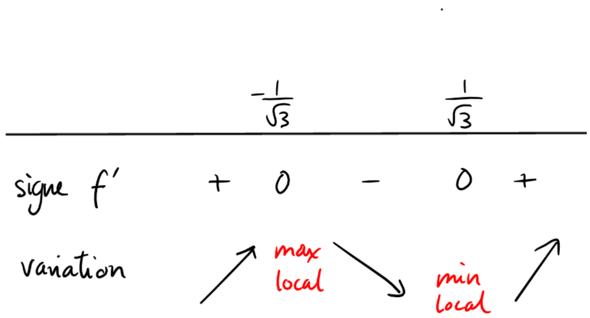


Pour les extrema globaux, en vu du fait que les extrema globaux sont aussi des extrema locaux, il faut juste évaluer la fonction aux points qu'on a trouvés ci-dessus comme extrema locaux, et trouver parmi eux les plus grandes et les plus petites valeurs.
Rappel : une fonction continue atteint ses bornes sur un intervalle fermé.

Exemples 5.45. • $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$.

$f'(x) = 3x^2 - 1$ et donc $f'(x) = 0 \iff x = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$.





Il n'y a pas d'extrema globaux.

- $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin|x|$.

  On a $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \sin(-x) & \text{si } -\pi \leqslant x < 0, \end{cases}$

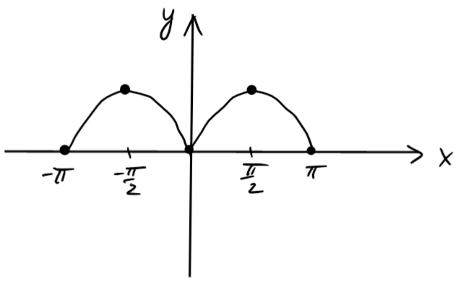
  et donc, puisque $\sin(-x) = -\sin(x)$, $f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } 0 < x < \pi \\ -\cos(x) & \text{si } -\pi < x < 0. \end{cases}$

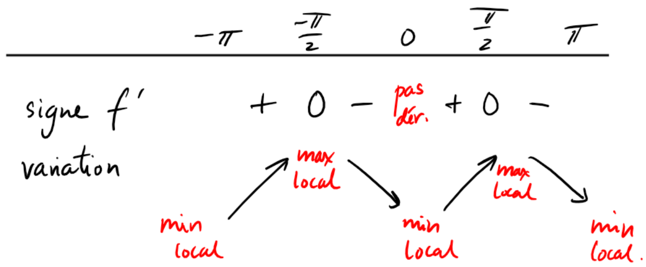
  En 0, on a

$$
\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \\
f'_-(0) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin(x)}{x} = -1,
\end{aligned}
$$

  et donc f n'est pas dérivable en 0.

  Les candidats sont
  — $x = \pm\frac{\pi}{2}$ ($\iff f'(x) = 0$),
  — $x = 0$, où f n'est pas dérivable,
  — $x = \pm\pi$, les points du bord.





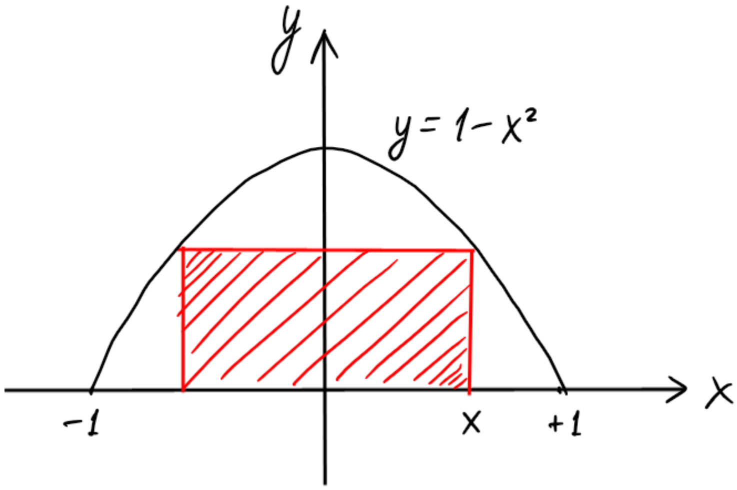
  Ici, les extrema locaux sont aussi globaux.

◇

5.9 Problèmes d'optimisation

La recherche d'extrema de fonctions permet de résoudre des problèmes d'optimisation concrets.

Exemple 5.46. Trouver le rectangle inscrit entre la courbe $y = 1 - x^2$ et l'axe Ox d'aire maximale. (On suppose que les côtés du rectangle sont parallèles aux axes de coordonnées.)



Paramétrisons tous les rectangles à l'aide de la variable $x \in [0, 1]$, visible sur l'image ci-dessus. Pour un x fixé, l'aire du rectangle représenté est égale à

$$A(x) = \text{ base } \times \text{ hauteur } = 2x \cdot (1 - x^2)\,.$$

On aimerait donc trouver le maximum global de la fonction

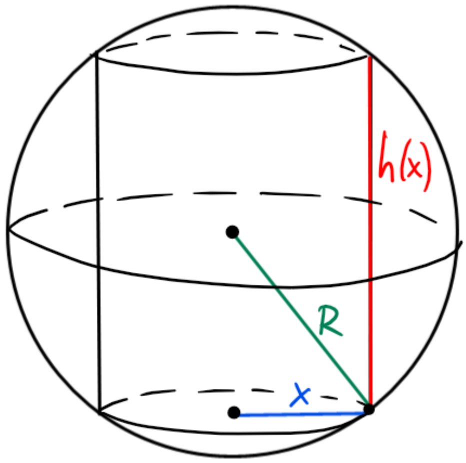
$$\begin{aligned} A : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto A(x) = 2x(1 - x^2)\,. \end{aligned}$$

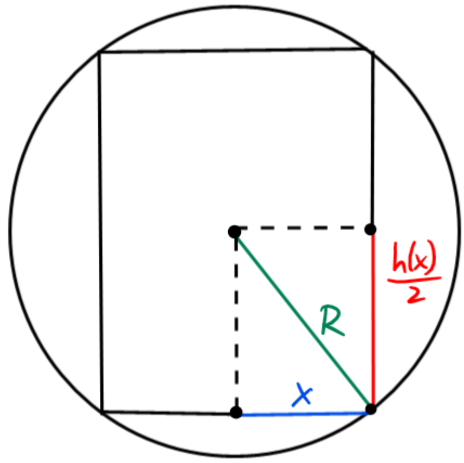
On a $A'(x) = -6x^2 + 2$, et donc la variation de A est donnée par

	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
signe A'		$+$	0	$-$	
variation		↗	max local	↘	

A s'annule sur le bord de $[0, 1]$ bord, $A(0) = A(1) = 0$, et donc A possède un max local et global en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. En ce point, $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$. $\diamond$

Exemple 5.47. Trouver, parmi tous les cylindres inscrits dans une sphère de rayon R, celui dont le volume est maximal.





Utilisons la variable $x \in [0, R]$ visible ci-dessus ; x représente le rayon du cylindre inscrit. Volume pour un x donné,

$$V(x) = \text{ aire de la base } \cdot \text{ hauteur } = \pi x^2 \cdot h(x)\,.$$

On a $x^2 + \left(\frac{h(x)}{2}\right)^2 = R^2$, d'où $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$.
On cherche donc le maximum global de

$$\begin{aligned} V : [0, R] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto V(x) = 2\pi x^2 \sqrt{R^2 - x^2} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} V'(x) &= 2\pi \left(2x\sqrt{R^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right) \\ &= 2\pi \frac{2x(R^2 - x^2) - x^3}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\ &= 2\pi \frac{x(2R^2 - 3x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,. \end{aligned}$$

On a donc, sur $]0, R[$, que

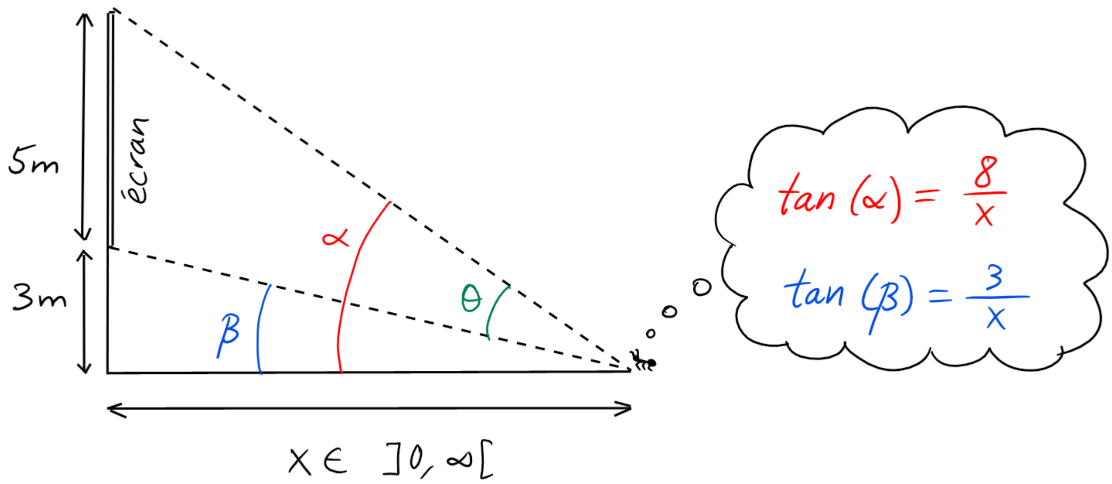
$$V'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{2}{3}}R\,.$$

En ce point,

$$V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 > 0\,,$$

alors que sur le bord, $V(0) = V(R) = 0$. On conclut donc que V possède un maximum global en $x = \sqrt{\frac{2}{3}}R$. Le cylindre correspondant a un volume égale à $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\ldots$ fois celui de la sphère. ◇

Exemple 5.48. Une fourmi au cinéma cherche à maximiser l'angle sous lequel elle voit l'écran :



Repérons la position de la fourmi à l'aide de $x \in]0, \infty[$, la distance (en mètres) entre la fourmi et le mur.

Lorsqu'elle est à distance x du mur, elle voit l'écran sous un angle

$$\theta(x) = \alpha(x) - \beta(x) = \arctan\left(\frac{8}{x}\right) - \arctan\left(\frac{3}{x}\right)$$

On cherche donc le maximum global de

$$\begin{aligned} \theta :]0, \infty[&\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \theta(x) = \arctan\left(\frac{8}{x}\right) - \arctan\left(\frac{3}{x}\right) \end{aligned}$$

Remarquons que sur les bords du domaine,

$$\lim_{x \to 0^+} \theta(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} \theta(x) = 0\,.$$

Ensuite, sur $]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{8}{x}\right)^2} \cdot \frac{-8}{x^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{x}\right)^2} \cdot \frac{-3}{x^2} \\ &= \frac{-8}{x^2 + 64} + \frac{3}{x^2 + 9} \\ &= \frac{-8x^2 - 72 + 3x^2 + 192}{(x^2 + 64)(x^2 + 9)} \\ &= \frac{120 - 5x^2}{(x^2 + 64)(x^2 + 9)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\theta'(x) = 0 \iff x = \sqrt{24}$, et

		$\sqrt{24}$	
signe θ'	$+$	0	$-$
variation	$\nearrow$	max local	$\searrow$

Puisque $\theta(\sqrt{24}) > 0$, on a donc un maximum global en $x = \sqrt{24}$. Pour maximiser l'angle sous lequel elle voit l'écran, la fourmi doit donc s'asseoir à $\sqrt{24}$ mètres de l'écran. $\diamond$

5.10 Études de fonctions

Généralement, l'*étude* d'une fonction f signifie décrire les principales caractéristiques de la dépendence de $f(x)$ en fonction de x, qu'elles soient *locales* ou *globales*, autant du point de vue *quantitatif* que *qualitatif*.

Les sections précédentes ont montré comme la dérivée se présente comme un outil puissant pour l'analyse *locale*.

Avant de passer en revue les principaux éléments que peuvent constituer une étude de fonction, introduisons certaines notions additionnelles.

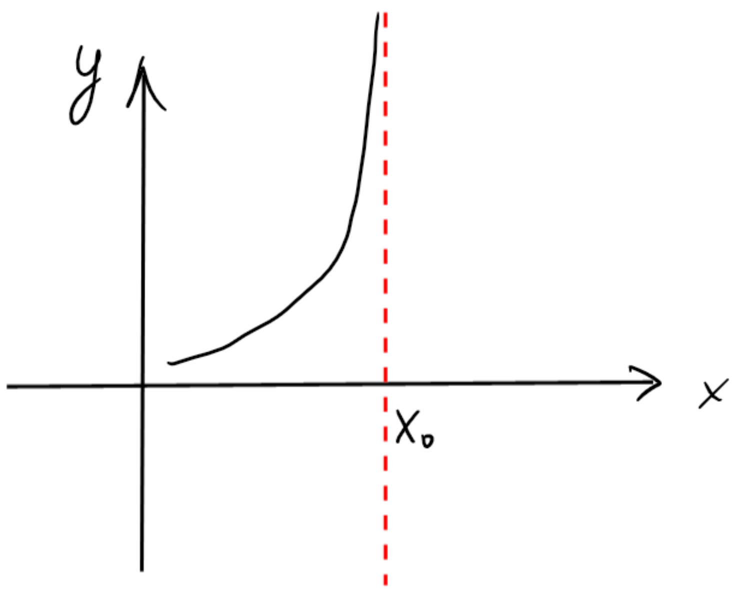
5.10.1 Branches infinies

Parmi les propriétés globales caractéristiques d'une fonction, on peut considérer les portions de son graphe, s'il y en a, qui contiennent des points arbitrairement éloignées de l'origine. On parle alors de **branches infinies**.

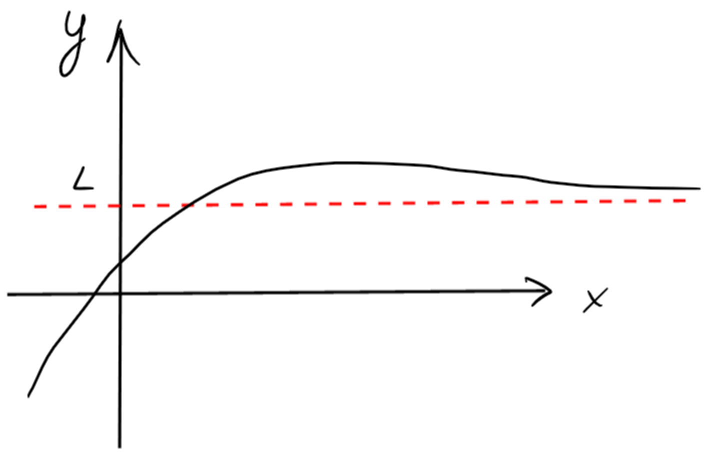
Commençons par les branches infinies données par directement par l'étude simple de limites à l'infini, ou proche d'un point x_0.

Définition 5.49. Si au moins une des limites $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ est $\pm\infty$, on dit que la droite verticale d'équation $x = x_0$ est une **asymptote verticale** pour le graphe de f.

Si une fonction possède une asymptote verticale, cela signifie qu'il existe au moins une portion de son graphe qui, infiniment loin de l'origine, s'approche de plus en plus de son asymptote :

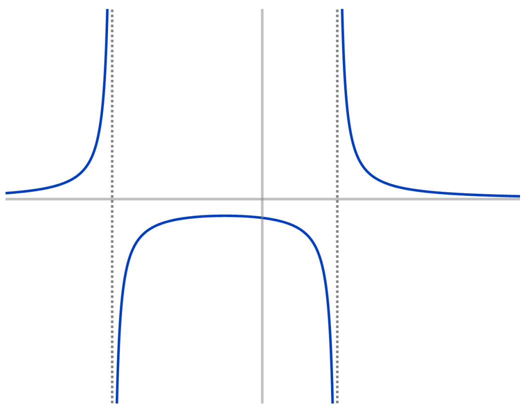


Définition 5.50. Si au moins une des limites $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, existe et vaut L, on dit que la droite horizontale d'équation $y = L$ est une **asymptote horizontale** pour le graphe de f.



Exemple 5.51. Étudions les asymptotes de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$, sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

— Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, la droite $y = 0$ est asymptote horizontale.
— Puisque $\lim\limits_{x\to-2^\pm} f(x) = \mp\infty$, la droite $x = -2$ est asymptote verticale.
— Puisque $\lim\limits_{x\to1^\pm} f(x) = \pm\infty$, la droite $x = 1$ est asymptote verticale.



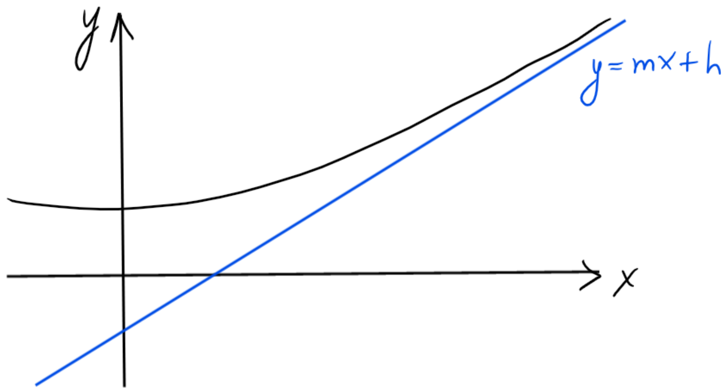
◇

Si $f(x)$ n'a pas de limite lorsque $x \to \pm\infty$, c'est qu'il n'y a pas d'asymptote horizontale. Mais cela n'empêche pas que f possède des portions infiniment loin de l'origine, proches d'une droite *oblique* (c'est-à-dire de pente non-nulle).

Définition 5.52. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ et s'il existe $m, h \in \mathbb{R}$ tels que $m \neq 0$ et

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - (mx + h)| = 0,$$

la droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote oblique** pour le graphe de f. (On a une définition semblable si $x \to -\infty$.)



Si on sait que $y = mx + h$ est asymptote oblique, comment trouver m et h ?

Remarquons que si on a à la fois

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} |f(x) - (mx + h)| = 0\,,$$

avec $m \neq 0$, alors la limite $\lim_{x\to\infty} f(x) - (mx+h)$ représente une indétermination "$\infty - \infty$". Mais puisque cette limite est nulle, on peut réécrire

$$0 = \lim_{x\to\infty} |f(x) - (mx + h)| = \lim_{x\to\infty} |x| \cdot \left| \frac{f(x)}{x} - \left(m + \frac{h}{x}\right) \right| .$$

Puisque $|x| \to \infty$, on doit donc nécessairement avoir que

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{x} - \left(m + \frac{h}{x}\right) \right| = 0\,.$$

Mais comme $\frac{h}{x} \to 0$, on a

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{x} - m \right| = 0$$

et donc

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}\,,$$

ce qui fixe la valeur de m.

En connaissant m on peut alors trouver h, puisque

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - (mx + h)| = 0 \quad \Longrightarrow \quad h = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx).$$

Exemple 5.53. Étudions les asymptotes du graphe de $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$, définie sur $D_f = [-1, 0]$. Remarquons que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2 + x} = \lim_{x\to\pm\infty} |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty\,,$$

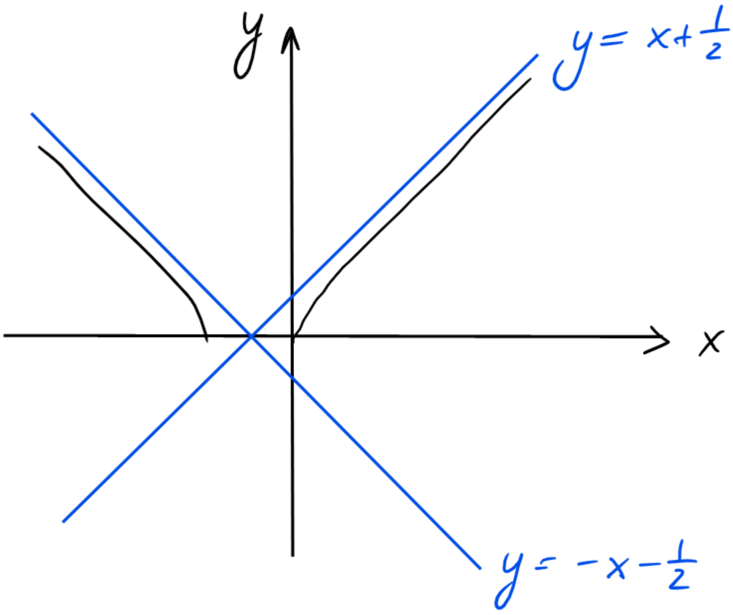
donc il n'y a pas d'asymptotes horizontales. Pour voir s'il peut y en avoir des obliques, étudions les limites

$$\begin{aligned} m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \pm 1\,. \end{aligned}$$

On peut donc passer à

$$\begin{aligned} h = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (\pm 1)x) &= \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+x} \mp x) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} \pm x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\pm x\sqrt{1+\frac{1}{x}} \pm 1} \\ &= \pm\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a donc l'asymptote oblique $y = x + \frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$ et l'asymptote oblique $y = -x - \frac{1}{2}$ lorsque $x \to -\infty$.



◇

La procédure présentée ci-dessus a montré que l'existence d'une asymptote oblique $y = mx + h$ procède comme suit : on trouve la pente m (si la limite qui la définit existe), et ensuite on trouve l'ordonnée à l'origine h, si la limite qui la définit existe.

Or il se pourrait très bien que m existe mais que $f(x) - mx$ n'ait pas de limite.

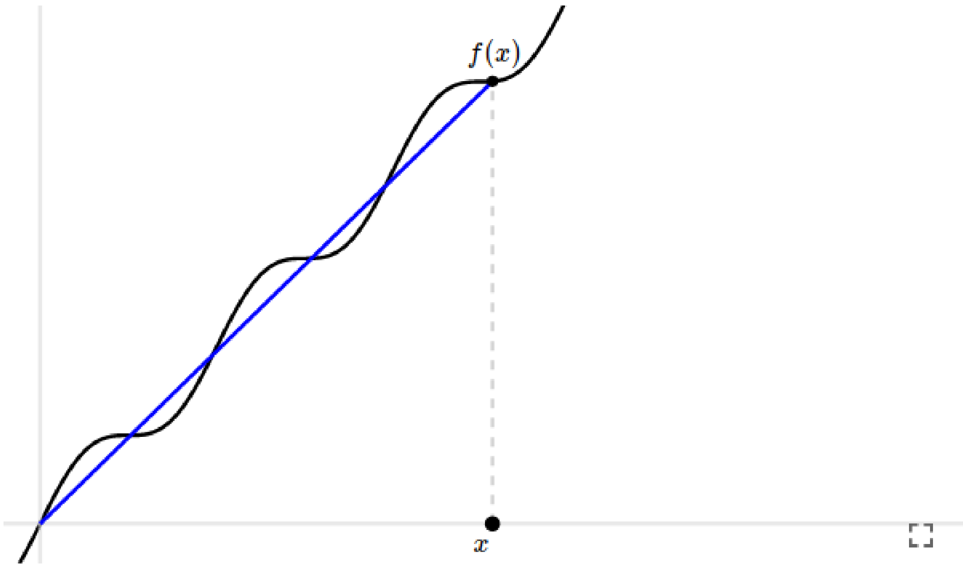
Exemple 5.54. Si $f(x) = x + \sin(x)$, alors

$$\begin{aligned} m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin(x)}{x} \\ &= 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,, \end{aligned}$$

mais h n'existe pas puisque $f(x) - 1x = \sin(x)$, qui n'a pas de limite lorsque $x \to \infty$. Donc il n'existe aucune droite $y = x + h$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - (x+h)| = 0\,,$$

donc il n'y a pas d'asymptote oblique pour le graphe de f.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

◇

Que se passe-t-il, alors, dans le cas où la limite qui définit h est infinie ?

Définition 5.55. Si $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe mais

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \pm\infty\,,$$

on dit que f admet une **branche parabolique (de direction de pente** m**)**. (On a une définition semblable si $x \to -\infty$.)

Expliquons le pourquoi de cette terminologie sur un exemple.

Exemple 5.56. Considérons $f(x) = \sqrt{x}$, sur $\mathbb{R}_+$. On a que

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty\,,$$

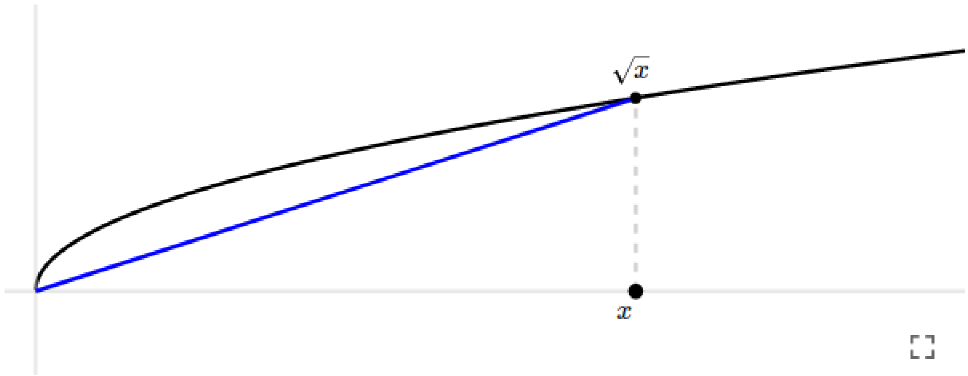
et

$$\begin{aligned} m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0\,, \end{aligned}$$

alors que

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-0x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\infty\,,$$

donc le graphe de f possède une branche parabolique de direction horizontale $m=0$. (Sans pour autant posséder d'*asymptote horizontale*!)



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

◇

Dans certains cas où m n'existe pas, on peut quand-même avoir une information sur le comportement de la fonction loin de l'origine :

Définition 5.57. (Le cas "$m=\pm\infty$".) Si

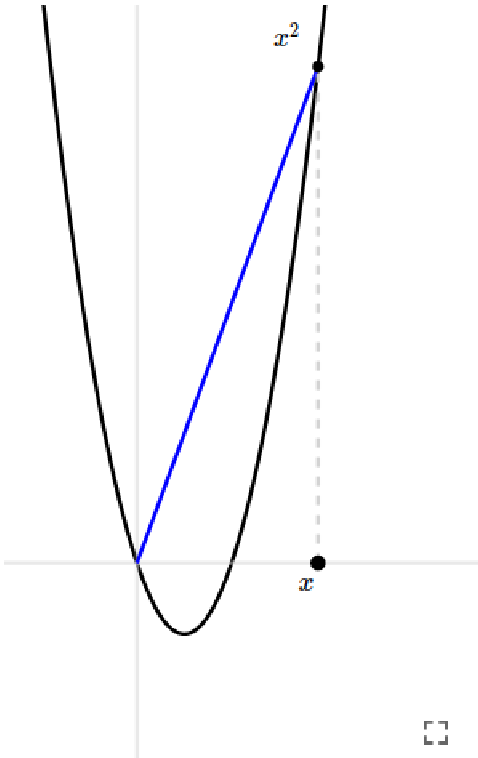
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty\,,$$

on dit que f admet une **branche parabolique** de direction verticale. (On a une définition semblable si $x\to-\infty$.)

Exemple 5.58. Si $f(x)=x^2-3x$, alors

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(x-3)=\pm\infty\,,$$

donc le graphe de f possède une branche parabolique verticale.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

◇

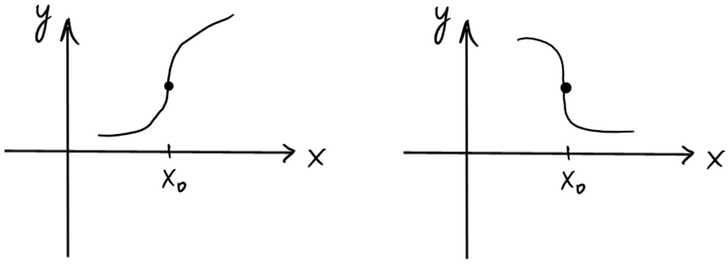
5.10.2 Elements de l'étude d'une fonction

Regroupons maintenant certaines des étapes que l'on pourra, lorsque c'est possible, inclure dans l'étude d'une fonction réelle f définie sur son domaine D_f.

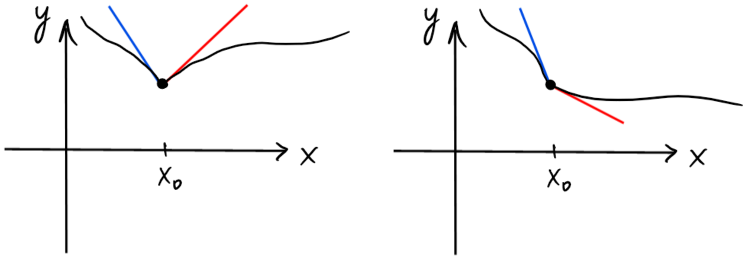
- Si D_f est symétrique ($x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$), il sera utile de tester la parité de f. Cas échéant, cette parité devra se retrouver plus tard dans la représentation graphique de f.
- Lorsque c'est possible, l'étude du signe de f pourra aussi renseigner sur la position du graphe de f relativement à Ox.
- La recherche des points de continuité/discontinuité de f.
- Sur les parties de de D_f où f est dérivable, l'analyse du signe de f' renseignera sur la variation de f, et mènera dans certains cas à la détermination des extrema locaux de f. Lorsqu'il y en a, on pourra déterminer les extrema globaux de f.
- Si D_f le permet et s'il y en a, étudier la nature des branches infinies de f (asymptotes horizontales, verticales, obliques ou paraboliques).
- Enfin, tracer un graphe contenant les principales informations obtenues dans l'étude analytique.

Remarquons qu'une fonction peut présenter un comportement intéressant proche de certains points. Par exemple, lorsque f est dérivable dans un voisinage épointé de x_0, on dira que f possède

- un point de **tangence verticale** en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$ ou $-\infty$,



- un **point anguleux** en x_0 si $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ et $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ existent et sont distinctes,

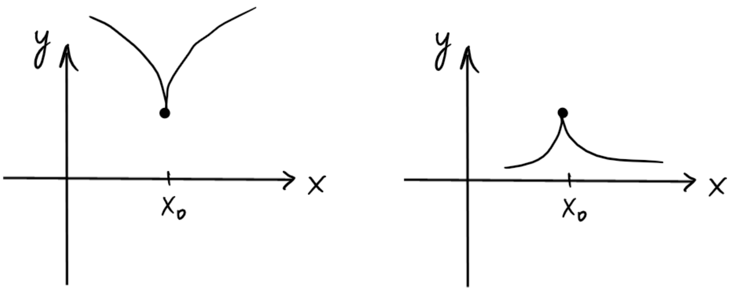


- un **point de rebroussement** en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = +\infty\,,$$

ou

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = -\infty\,,$$



Si la fonction est continue en ces points, ils correspondent donc à des extrema locaux.

Exemple 5.59. Sur $D_f = \mathbb{R}$, étudions

$$f(x) = \sqrt[5]{x^4(x-1)}$$

Le signe de f est régi par celui de $x-1$:

		0		1	
signe f	$-$	0	$-$	0	$+$

Étant un produit de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}$. Calculons ensuite

$$f'(x) = \left((x^4(x-1))^{1/5}\right)' = \frac{5x-4}{5\sqrt[5]{x}\sqrt[5]{(x-1)^4}}\,.$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en $x=0$ et en $x=1$, et $f'(\frac{4}{5})=0$.

		0		$4/5$		1	
signe f'	$+$	pas dér.	$-$	0	$+$	pas dér.	$+$

Donc f possède un minimum local en $x=\frac{4}{5}$, au point $(\frac{4}{5}, f(\frac{4}{5}))$.

Remarquons aussi que

- $\lim_{x\to 0^\mp} f'(x) = \pm\infty$, donc f possède un point de rebroussement en $x=0$, qui implique que $(0,0)$ est un maximum local
- $\lim_{x\to 1} f'(x) = +\infty$, donc f possède un point de tangence verticale en $x=1$.

Passons à l'étude des branches infinies. Pour commencer,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[5]{x^5\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[5]{1-\frac{1}{x}} = \pm\infty\,,$$

ce qui implique que f ne possède pas d'extrema globaux.

Ensuite,

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[5]{1-\frac{1}{x}} = 1\,,$$

et

$$h = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-(1)x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\sqrt[5]{x^4(x-1)} - x\right].$$

En posant $a = \sqrt[5]{x^4(x-1)}$ et $b=x$, on peut utiliser

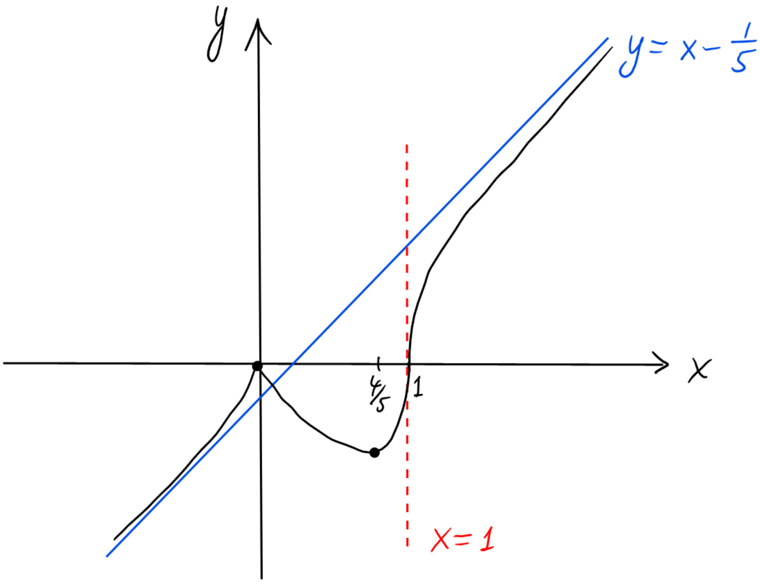
$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4).$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} \left[\sqrt[5]{x^4(x-1)} - x\right] \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} (a-b) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a^5-b^5}{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4(x-1)-x^5}{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}} + \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}} + \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} + 1} \\
&= -\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

On a donc l'asymptote oblique $y = x - \frac{1}{5}$ lorsque $x\to\pm\infty$.

On peut maintenant tracer le graphe de f :


y
x
$y = x - \frac{1}{5}$
4/5
1
x = 1

◇