Chapitre 6

Courbes paramétrées dans le plan

6.1 Introduction

Définition 6.1. Soit $D \subset \mathbb{R}$. Une **courbe paramétrée** (ou **arc paramétré**) est une fonction

$$\begin{aligned} M : D &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto M(t) = (x(t), y(t)) . \end{aligned}$$

On pensera souvent à une courbe paramétrée comme à la description de la position d'une particule en fonction du temps ; on interprétera alors $M(t) \in \mathbb{R}^2$ comme étant la *position de la particule au temps t*.

La position $M(t)$ peut également se décrire à l'aide du **rayon vecteur**, défini par

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

L'ensemble de tous les points visités par la particule sera noté

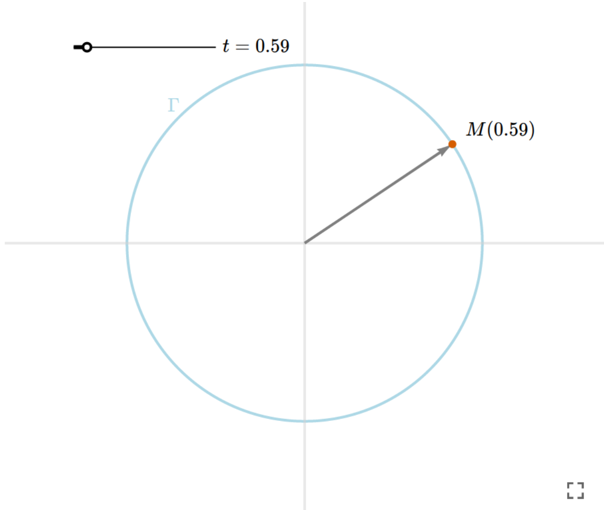
$$\Gamma := \{M(t) : t \in D\} .$$

On appelle Γ le **tracé** de la courbe.

Exemple 6.2. La courbe paramétrée

$$\begin{aligned} M : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto M(t) = (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

décrit un point se déplaçant sur le cercle unité centré à l'origine.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

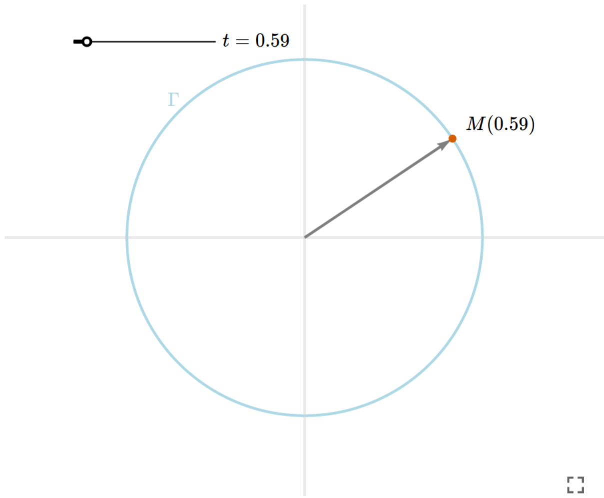
◇

Remarquons que deux courbes paramétrées distinctes peuvent avoir le même tracé.

Exemple 6.3. La courbe

$$\begin{aligned} \widetilde{M} : [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \widetilde{M}(t) = (\sin(t), \cos(t)) \end{aligned}$$

est n'est pas la même que celle de l'exemple précédent ; par exemple, $M(0) = (0, 0)$ alors que $\widetilde{M}(0) = (0, 1)$. Pourtant, son tracé est le même :



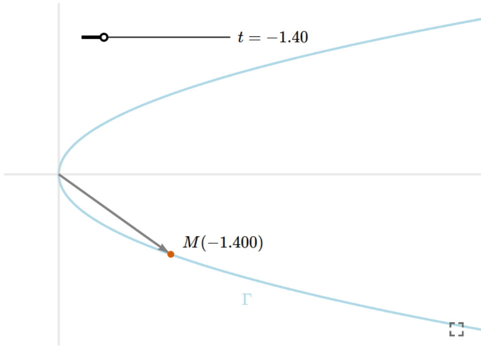
Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

◇

On voit sur ces deux premiers exemples qu'en général, le tracé d'une courbe paramétrée n'est pas le graphe d'une fonction (il peut y avoir une droite verticale qui intersecte le tracé plus qu'une fois).

Exemple 6.4.

$$\begin{aligned} M : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto M(t) = \left(t^2, t\right) \end{aligned}$$

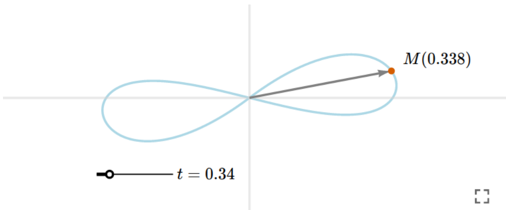


Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

◇

Exemple 6.5.

$$\begin{aligned} M : [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto M(t) = \big(t(t-1)(t-2), t(t-\tfrac{1}{2})(t-1)(t-\tfrac{3}{2})(t-2)\big) \end{aligned}$$



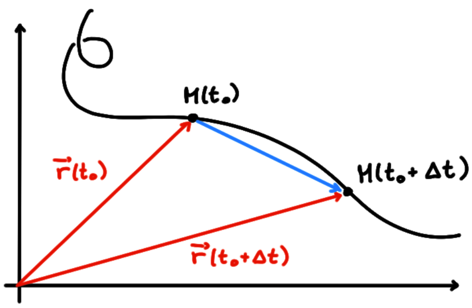
Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

◇

L'étude des courbes paramétrées s'annonce donc plus dificile que celle des simples fonctions $f(x)$ d'une variable.

6.2 Vecteur tangent

L'utilisation du rayon-vecteur permet de comparer les positions en deux instants $t_0 < t_0+\Delta t$, à l'aide du **déplacement** $\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)$:



On s'attend à ce que si les instants t_0 et $t_0+\Delta t$ sont très rapprochés, le déplacement devienne aussi petit. Si on divise ce vecteur par la durée de l'intervalle $[t_0, t_0+\Delta t]$, le quotient

$$\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

doit être interprété comme une *vitesse* sur cet intervalle.

Dans la limite où $\Delta t \to 0$, on fait ainsi apparaître les dérivées des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ par rapport au temps :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \\ \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$$

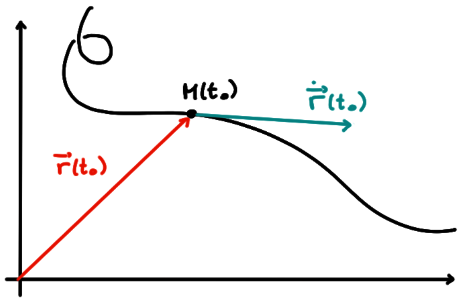
Remarque 6.6. Dans ce chapitre, on utilise le "point" $\dot{x}$ au lieu du "prime" x'. C'est une convention souvent adoptée dans les ouvrages traitant de cinématique, où le "point" indique une dérivée par rapport au temps. ◇

Définition 6.7. Lorsque $x(t_0)$ et $y(t_0)$ sont dérivables au temps t_0, le vecteur

$$\dot{\vec{r}}(t_0) := \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$$

est appelé le **vecteur tangent** de la courbe paramétrée M au temps t_0.

S'il ne s'annule pas, le vecteur tangent donne en particulier la direction de la tangente à la courbe en au point $M(t_0)$:



Mais il donne plus d'informations que ça, puisqu'il doit être interprété comme le vecteur de **vitesse instantanée** de la particule à l'instant t_0 ; il donne aussi le sens du déplacement.

L'étude des signes de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ renseigne donc sur la direction et le sens de déplacement de la particule à l'instant t :

	$\dot{x}(t) > 0$	$\dot{x}(t) < 0$
$\dot{y}(t) > 0$		
$\dot{y}(t) < 0$		

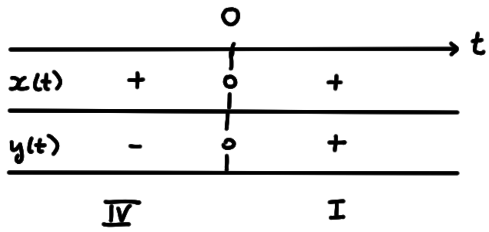
En particulier,

- si $\dot{x}(t) \neq 0$ et $\dot{y}(t) = 0$, la courbe possède un point de tangence horizontale en $M(t)$,
- si $\dot{x}(t) = 0$ et $\dot{y}(t) \neq 0$, la courbe possède un point de tangence verticale en $M(t)$.

Exemple 6.8. Considérons la courbe

$$\begin{aligned} M : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto M(t) = \left(t^2, t\right) . \end{aligned}$$

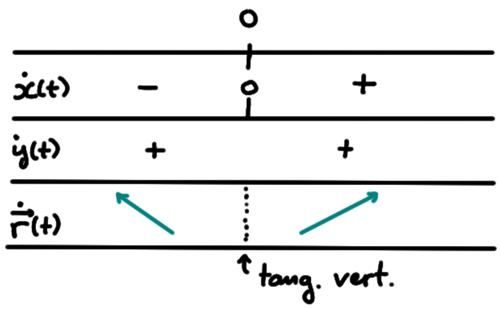
L'étude des signes de $x(t) = t^2$ et $y(t) = t$ nous dit déjà à quel quadrant appartient $M(t)$, en fonction du temps t :



Ensuite,

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} , \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} .$$

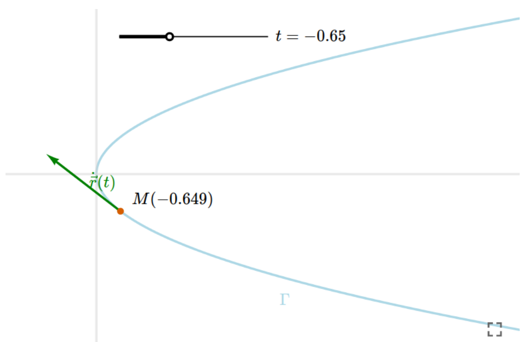
Les signes de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ donnent la direction dans laquelle pointe $\dot{\vec{r}}(t)$:



Le point $M(0) = (0, 0)$ est un point de tangence verticale puisque

$$\dot{\vec{r}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

On peut maintenant tracer la courbe :

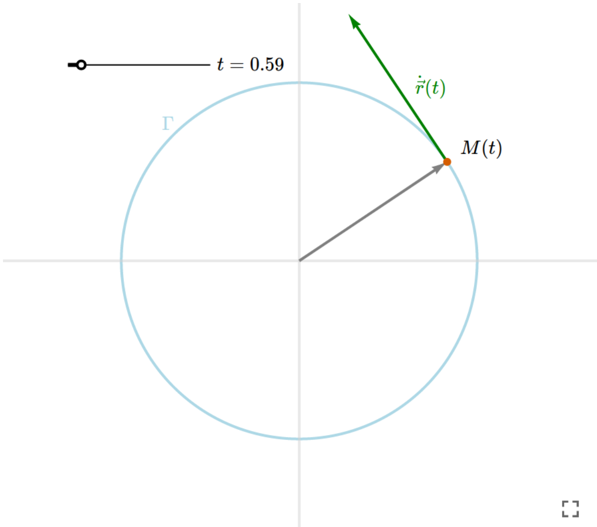


Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

◇

Exemple 6.9. Si on reprend la courbe paramétrée décrivant un cercle, on a

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

(On remarque que $\vec{r}(t) \perp \dot{\vec{r}}(t)$ pour tout t, une caractéristique spécifique au mouvement circulaire.) ◇

6.2.1 Points stationnaires

Considérons un cas où le vecteur tangent peut s'*annuler*.

Exemple 6.10. Pour $t \in \mathbb{R}$, considérons la courbe décrite par

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6/2 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 3t^5 \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$\dot{\vec{r}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le vecteur tangent à l'instant $t = 0$ ne donne aucune information sur l'allure de la courbe au voisinage de ce point (tangence, sens de déplacement, etc.). Comment faire, donc, pour étudier la courbe au voisinage de $M(0) = (0, 0)$?

Ce qu'il faut remarquer c'est que $t = 0$ est l'unique instant où $\dot{\vec{r}}(t)$ s'annule. Or tant qu'il n'est pas nul, même très petit, il contient quand même de l'information.

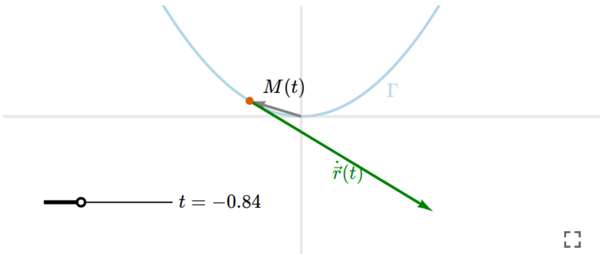
On peut par exemple considérer la *pente* du vecteur tangent en un temps $t \neq 0$, donnée par

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{3t^5}{3t^2} = t^3.$$

Au voisinage de $t = 0$, le vecteur tangent a donc une pente qui est négative si $t < 0$, positive si $t > 0$, et dans la limite $t \to 0$ tend vers

$$\lim_{t\to 0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to 0} t^3 = 0.$$

Ceci signifie que la courbe doit possèder en $t = 0$ une tangente horizontale.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

Remarquons qu'on aurait pu obtenir la même information en remarquant que $t^6 = (t^3)^2$, et donc $y(t) = x(t)^2/2$, ce qui signifie que tous les points $M(t) = (x(t), y(t))$ de la courbe sont sur la parabole $y = x^2/2$. En particulier, le point $M(0) = (0, 0)$ est forcément un point de tangence horizontale.

◇

Définition 6.11. $M(t_0)$ est un **point stationnaire** de Γ si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour étudier Γ au voisinage d'un point stationnaire, on pourra procéder comme dans l'exemple précédent :

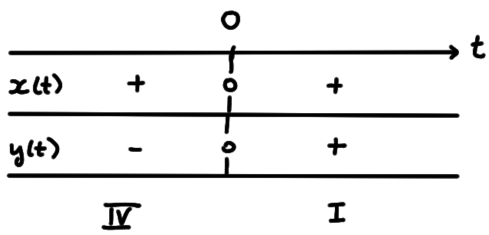
- en étudiant les signes de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ pour $t < t_0$ et $t > t_0$,
- étudier la pente de $\dot{\vec{r}}(t)$, donnée par $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ lorsque $t \to t_0^{\pm}$.

Exemple 6.12. Considérons, pour $t \in \mathbb{R}$, la courbe

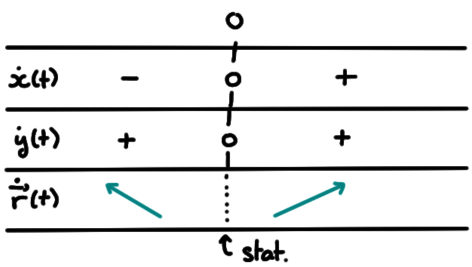
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\dot{\vec{r}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M(0) = (0, 0)$ est un point stationnaire. Etudions l'allure de la courbe au voisinage de ce point.

Les signes de $x(t)$ et $y(t)$ renseignent sur le quadrant :



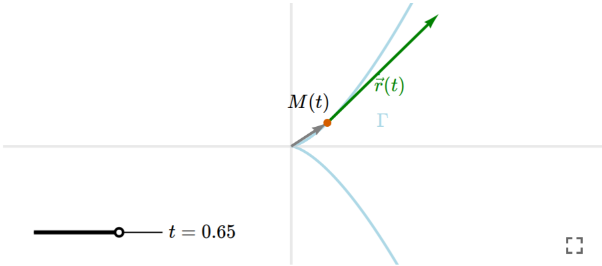
Puis, les signes de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ renseignent sur la direction dans laquelle pointe $\dot{\vec{r}}(t)$:



De plus, à l'approche du point stationnaire, la pente de $\dot{\vec{r}}(t)$ tend vers

$$\lim_{t\to 0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{3t}{2} = 0\,.$$

On en déduit que le point stationnaire $M(0) = (0,0)$ est un "point de rebroussement", puisque la particule arrive depuis IV, avec la pente du vecteur tangent proche de zéro, puis repart dans I, avec la pente du vecteur tangent toujours proche de zéro.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

◇

6.3 Branches infinies

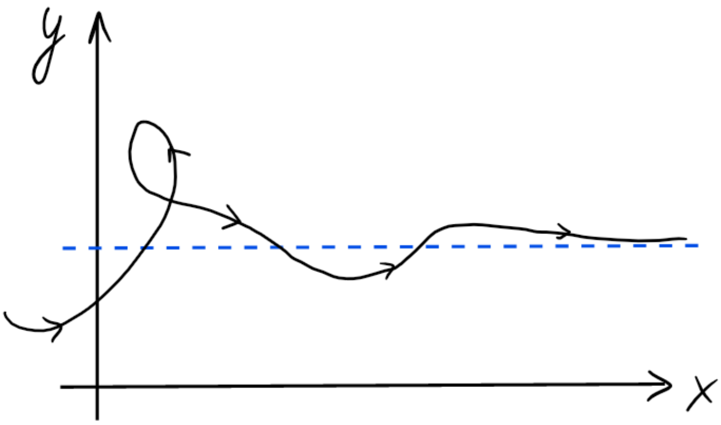
Comme pour les fonctions, l'étude d'une courbe pourra inclure l'analyse des *branches infinies*, à savoir les parties de la courbe (s'il y en a) qui contiennent des points situés arbitrairement loin de l'origine.

Une cours paramétrée

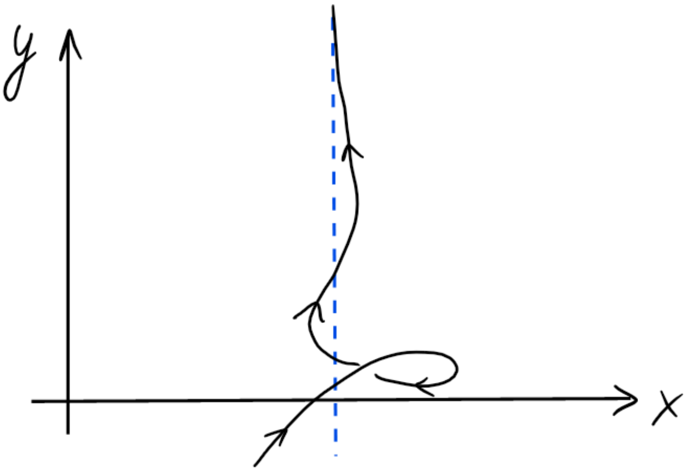
$$\begin{aligned} M : D &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto M(t) = (x(t), y(t))\,. \end{aligned}$$

possède une branche infinie s'il existe une région du domaine D dans laquelle au moins une des fonctions, ($x(t)$ ou $y(t)$) prend des valeurs arbitrairement grandes. Cette région sera soit au voisinage d'un point, soit lorsque $t \to \pm\infty$ lorsque c'est possible.

- Si $x(t) \to \pm\infty$ et $y(t) \to L$, alors la droite horizontale $y = L$ est une **asymptote horizontale**.



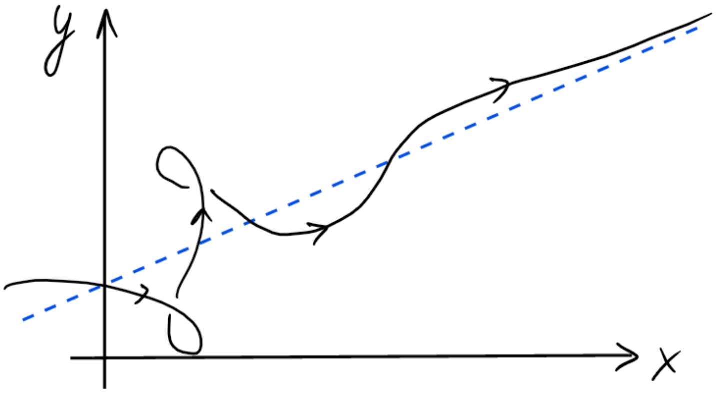
- Si $x(t) \to L$ et $y(t) \to \pm\infty$, alors la droite verticale d'équation $x = L$ est une **asymptote verticale**.



- Si $x(t) \to \pm\infty$ et $y(t) \to \pm\infty$, et si

$$m := \lim \frac{y(t)}{x(t)} \in \mathbb{R}\,, \quad \text{et}$$
$$h := \lim(y(t) - m \cdot x(t)) \in \mathbb{R},$$

alors la droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote oblique**.



Si $\lim[y(t) - m \cdot x(t)] = \pm\infty$, il s'agit d'une **branche parabolique** de pente m.

6.4 Exemples

Exemple 6.13. Sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, considérons la courbe paramétrée $M(t) = (x(t), y(t))$, où

$$x(t) = \frac{1}{1-t}\,, \qquad y(t) = \frac{t^2}{1-t}\,.$$

Etude des branches infinies : La courbe peut admettre des branches infinies aux bornes de son domaine : en $\pm\infty$ et en 1.

- Lorsque $t \to -\infty$,

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0\,, \qquad \lim_{t\to-\infty} y(t) = +\infty\,.$$

La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$. Remarquons que $x(t) > 0$ pour $t < 1$ et en particulier au voisinage de $-\infty$; la courbe reste donc à droite de son asymptote lorsque $t \to -\infty$.

- Lorsque $t \to +\infty$,

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0\,, \qquad \lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty\,.$$

La courbe admet donc la même asymptote verticale d'équation $x = 0$, avec $x(t) < 0$ au voisinage de $+\infty$; la courbe reste donc à gauche de son asymptote lorsque $t \to +\infty$.

- Lorsque $t \to -1^-$,

$$\lim_{t\to-1^-} x(t) = \lim_{t\to-1^-} y(t) = +\infty\,.$$

Pour détecter une potentielle asymptote oblique lorsque t tend vers -1 par la gauche, on calcule

$$\lim_{t\to-1^-} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-1^-} t^2 = 1, \qquad \lim_{t\to-1^-} y(t) - 1\cdot x(t) = \lim_{t\to-1^-} -(t+1) = -2\,.$$

La courbe admet donc une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$ lorsque $t \to -1^-$.

De plus, on peut vérifier que $y(t) - (x(t) - 2) = -t + 1$ est positif pour $t < 1$, en particulier pour t tendant vers 1 par la gauche ; donc on sait que la courbe reste au-dessus de la droite $y = x - 2$ lorsque $t \to -1^-$.

- Lorsque $t \to -1^+$, un calcul similaire nous permet d'obtenir la même asymptote oblique d'équation $y = x - 2$ et de vérifier que la courbe reste au-dessous de cette asymptote.

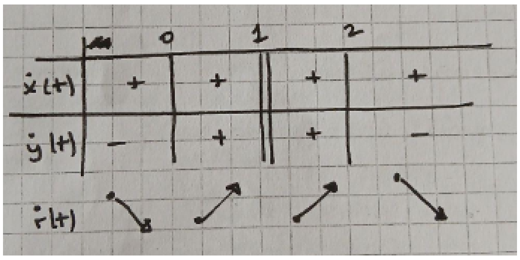
Etudions ensuite le vecteur tangent. On a

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(1-t)^2} \\ \dfrac{2t - t^2}{(1-t)^2} \end{pmatrix}.$$

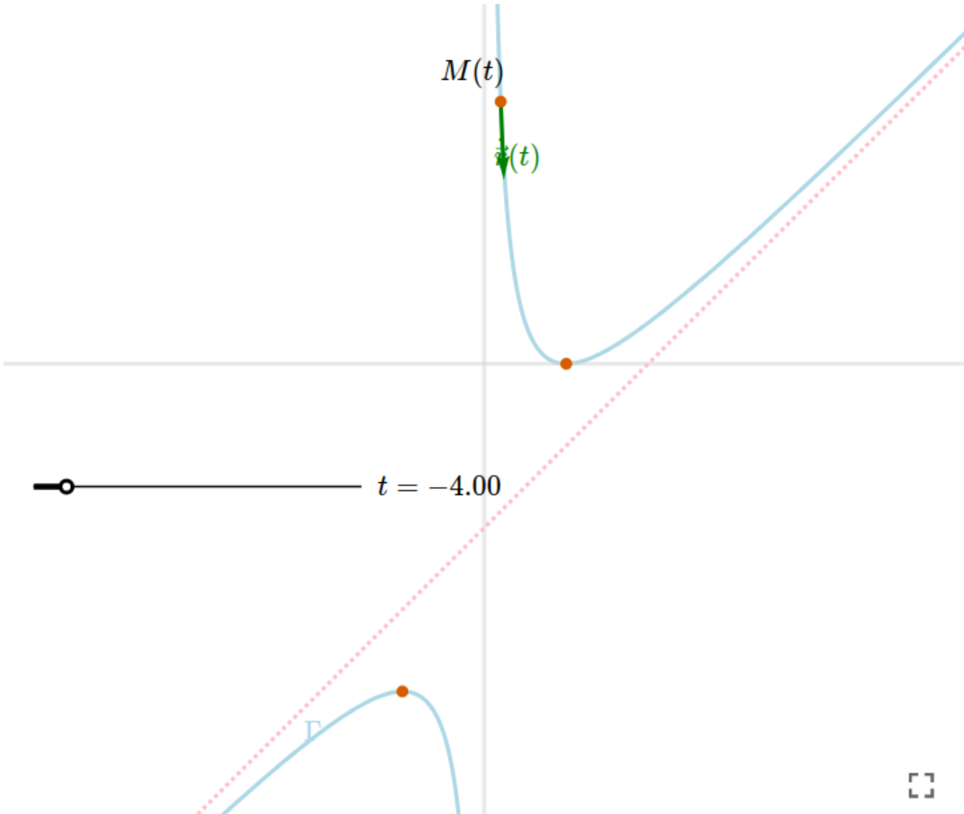
$\dot{x}(t) > 0$ pour tout $t \in D$, et

$$\dot{y}(t) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2t - t^2 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad t = 0 \text{ ou } t = 2\,.$$

La courbe admet donc deux points à tangente horizontale : $M(0) = (1, 0)$ et $M(2) = (-1, -4)$. De plus :



En mettant ensemble toutes ces informations, on peut esquisser le tracé de la courbe dans le plan :



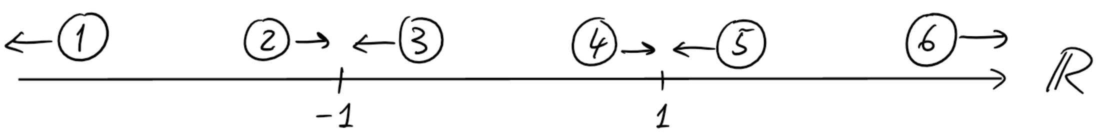
Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

◇

Exemple 6.14. Sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, considérons la courbe $M(t) = (x(t), y(t))$, où

$$x(t) = \frac{1}{t^2 - 1}\,, \qquad y(t) = \frac{t^2}{t-1}\,.$$

Il y a a priori six régions de D dans lesquelles au moins une des fonctions prend des valeurs grandes : proche de $\pm\infty$ et proche de $t = \pm 1$ (à gauche ou à droite dans chaque cas). On va donc séparer l'analyse en considérant les six limites suivantes :



1. Lorsque $t \to -\infty$,

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0\,, \qquad \lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty\,,$$

et donc la droite $x = 0$ est une asymptote verticale. (Se souvenir pour plus tard : pour des temps t très éloignés dans le passé, $x(t)$ est proche de zéro, $y(t)$ est grand, négatif.)

2. Lorsque $t \to -1^-$,

$$\lim_{t\to-1^-} x(t) = +\infty\,, \qquad \lim_{t\to-1^-} y(t) = -\frac{1}{2}\,,$$

et donc la droite $y = -\frac{1}{2}$ est asymptote horizontale. (Se souvenir pour plus tard : pour des temps t peu avant $t = -1$, $x(t)$ est très grand, positif, et $y(t)$ est proche de $-\frac{1}{2}$.)

3. Lorsque $t \to -1^+$,

$$\lim_{t\to -1^+} x(t) = -\infty\,, \qquad \lim_{t\to -1^+} y(t) = -\frac{1}{2}\,,$$

et donc la droite $y = -\frac{1}{2}$ est asymptote horizontale. (Se souvenir pour plus tard : pour des temps t peu après $t = -1$, $x(t)$ est très grand, négatif, et $y(t)$ est proche de $-\frac{1}{2}$.)

4. Lorsque $t \to 1^-$,

$$\lim_{t\to 1^-} x(t) = -\infty\,, \qquad \lim_{t\to 1^-} y(t) = -\infty\,.$$

On peut donc tester l'existence d'une asymptote oblique. Commençons par

$$\begin{aligned} m = \lim_{t\to 1^-} \frac{y(t)}{x(t)} &= \lim_{t\to 1^-} \frac{t^2(t^2-1)}{t-1} \\ &= \lim_{t\to 1^-} \frac{t^2(t-1)(t+1)}{t-1} = 2\,. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} h = \lim_{t\to 1^-} (y(t) - 2x(t)) &= \lim_{t\to 1^-} \left(\frac{t^2}{t-1} - 2\frac{1}{t^2-1} \right) \\ &= \lim_{t\to 1^-} \frac{t^3+t^2-2}{t^2-1} = \frac{5}{2}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, la droite d'équation $y = 2x + \frac{5}{2}$ est asymptote oblique. (Se souvenir pour plus tard : pour des temps t peu avant $t = 1$, $x(t)$ et $y(t)$ sont tous deux grands, négatifs, et $M(t)$ est proche de cette asymptote.)

5. Lorsque $t \to 1^+$,

$$\lim_{t\to 1^+} x(t) = \infty\,, \qquad \lim_{t\to 1^+} y(t) = \infty\,.$$

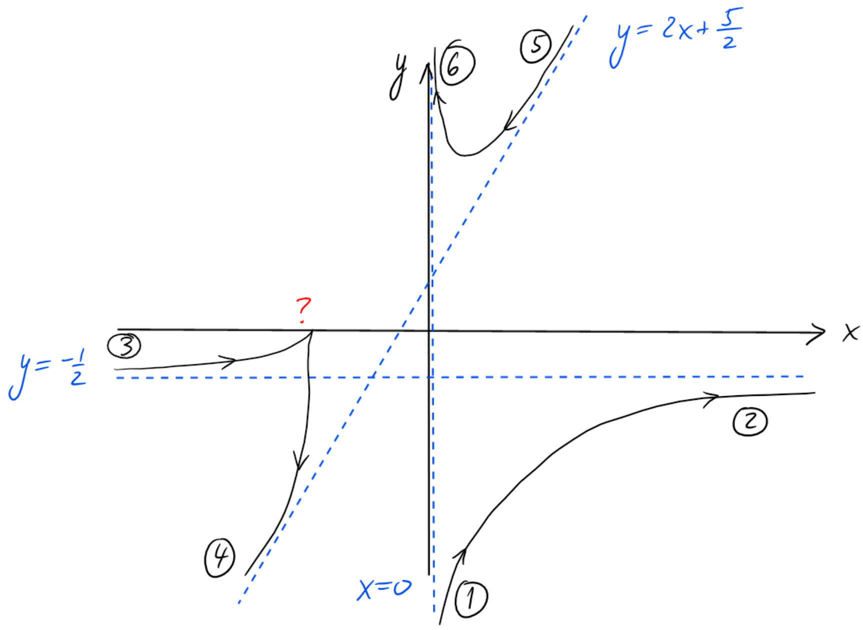
Les mêmes calculs que ceux du point précédent montrent que la même droite $y = 2x + \frac{5}{2}$ est asymptote oblique. (Se souvenir pour plus tard : pour des temps t peu après $t = 1$, $x(t)$ et $y(t)$ sont tous deux grands, positifs, et $M(t)$ est proche de cette asymptote.)

6. Lorsque $t \to +\infty$,

$$\lim_{t\to +\infty} x(t) = 0\,, \qquad \lim_{t\to +\infty} y(t) = +\infty\,,$$

et donc $x = 0$ est asymptote verticale. (Se souvenir pour plus tard : pour des temps t très éloignés dans le futur, $x(t)$ est proche de zéro, $y(t)$ est grand, positif.)

L'étude des branches infinies permet déjà de faire une première esquisse :



Rendons l'analyse plus précise en étudiant le vecteur tangent.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2-1} \\ \frac{t^2}{t-1} \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{-2t}{(t^2-1)^2} \\ \frac{t(t-2)}{(t-1)^2} \end{pmatrix}.$$

On a donc

- un point de tangence horizontale en $t = 2$, $M(2) = (\frac{1}{3}, 4)$,
- un point stationnaire en $t = 0$, $M(0) = (-1, 0)$

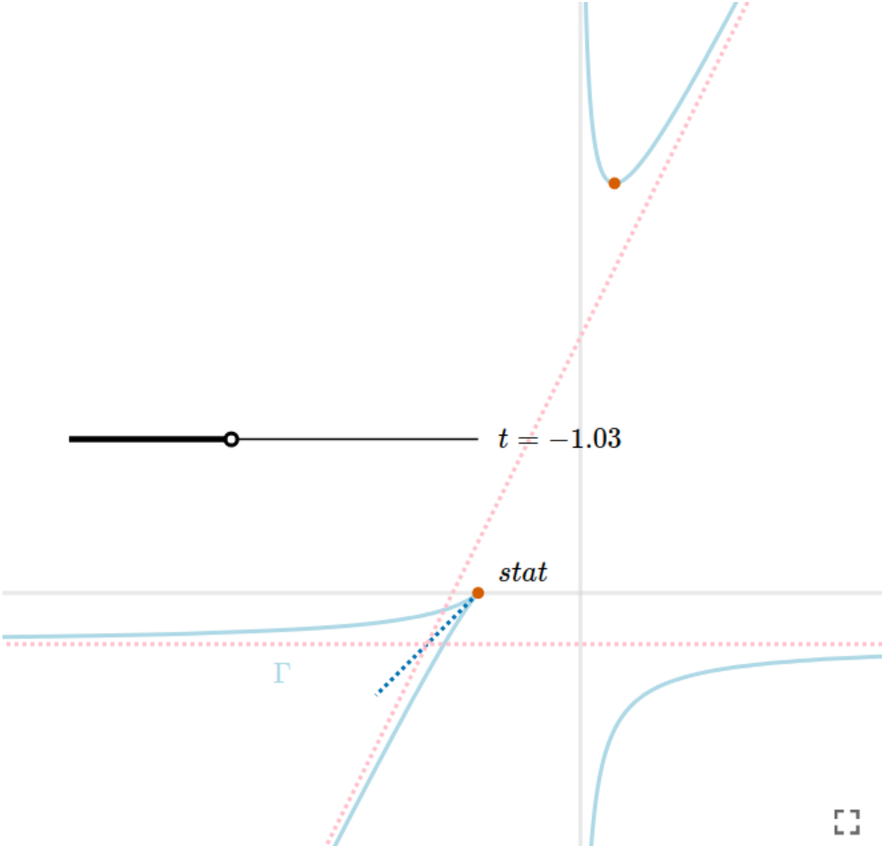
L'étude des signes révèle le comportement du vecteur tangent sur le reste du domaine :

		-1		0		1		2	
$\dot{x}(t)$	$+$		$+$		$-$		$-$		$-$
$\dot{y}(t)$	$+$		$+$		$-$		$-$		$+$
$\dot{\vec{r}}(t)$	$\nearrow$		$\nearrow$	stat.	$\swarrow$		$\swarrow$		$\nwarrow$

Regardons ce qui se passe au voisinage du point stationnaire :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{t(t-2)(t^2-1)^2}{(t-1)^2(-2t)} = 1\,.$$

Le point stationnaire est donc un "point de rebroussement", proche duquel la courbe a une pente proche de 1, indiquée en traitillé sur l'animation ci-dessous.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

◇

Exemple 6.15. Considérons la **courbe de Lissajous** définie par

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [-\pi, \pi].$$

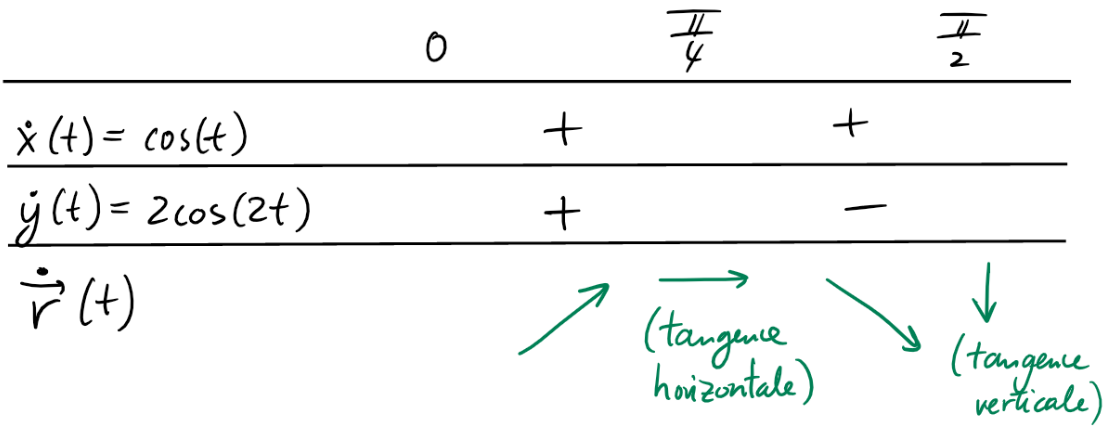
Avant de commencer, deux remarques :

- $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions impaires, donc la partie de la courbe pour $t \in [-\pi, 0]$ s'obtient à partir de la partie de la courbe pour $t \in [0, \pi]$, par une rotation de $180°$ autour de l'origine.
- De plus, on peut remarquer que pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$x(\tfrac{\pi}{2} - s) = x(s + \tfrac{\pi}{2}), \qquad y(\tfrac{\pi}{2} - s) = -y(\tfrac{\pi}{2} + s),$$

  et donc la partie de la courbe avec $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ s'obtient à partir de la partie avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, par une réflexion à travers Ox.

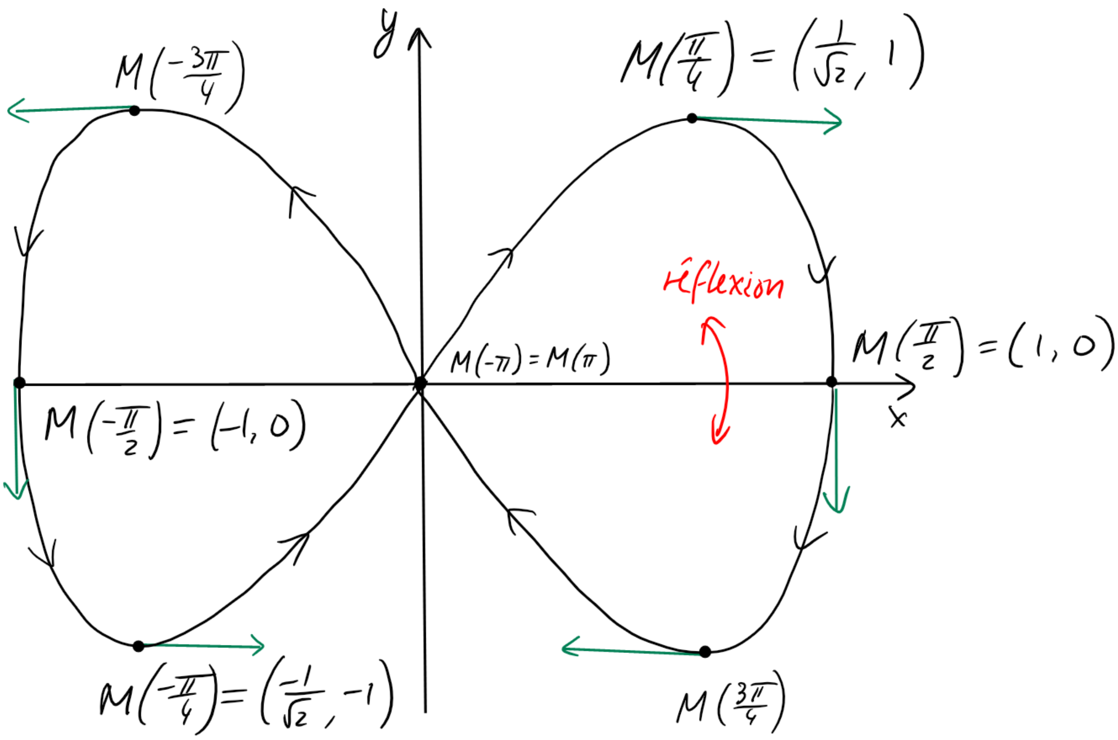
On peut donc se concentrer sur $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Sur cet intervalle, on a $x(t) \geqslant 0$, $y(t) \geqslant 0$, et les signes des dérivées $\dot{x}(t) = \cos(t)$, $\dot{y}(2) = 2\cos(2t)$ sont donnés par :



Remarquons aussi que $M(0) = (0,0)$, $M(\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, $M(\frac{\pi}{2}) = (1,0)$, et

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Ces informations permettent d'esquisser le tracé pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, de le réfléchir à travers Ox, puis d'effectuer une rotation du tout, de $180°$ autour de l'origine :

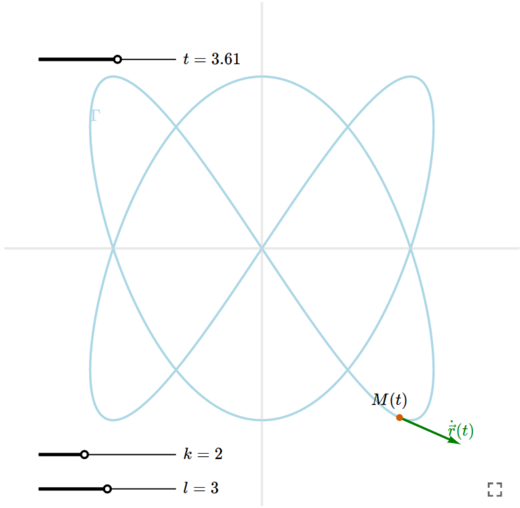


◇

La courbe de ce dernier exemple est un cas particulier d'un type de courbe plus général,

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(kt) \\ \sin(\ell t) \end{pmatrix} , \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

où $k, \ell \in \mathbb{N}$ sont des paramètres :



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

Exemple 6.16. Le **Folium de Descartes** est défini comme

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - 3xy + y^3 = 0\}\,.$$

Remarquons que si $(x, y) \in \Gamma$, alors $(y, x) \in \Gamma$.

Cherchons des points $(x, y) \in \Gamma$, de la forme $y = tx$. En injectant dans la condition qui définit Γ, on obtient $x^3 - 3x(tx) + (tx)^3 = 0$, c'est-à-dire

$$x^2(x - 3t + t^3 x) = 0\,.$$

On a donc deux possibilités :
- $x = 0$, qui entraîne $y = t0 = 0$, ou
- $x = \frac{3t}{1+t^3}$, qui entraîne $y = tx = \frac{3t^2}{1+t^3}$.

On peut donc étudier Γ à l'aide de la paramétrisation

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}\,, \qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}\,, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,.$$

		-1		0	
$x(t)$	$+$		$-$		$+$
$y(t)$	$-$		$+$		$+$

Les dérivées sont

$$\dot{x}(t) = 3\frac{1 - 2t^3}{(1+t^3)^2}\,, \qquad \dot{y}(t) = 3\frac{t(2 - t^3)}{(1+t^3)^2}\,,$$

et l'étude des signes :

t		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$\sqrt[3]{2}$	
$\dot{x}(t)$	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\dot{y}(t)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\dot{\vec{r}}(t)$	$\searrow$		$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nwarrow$	3	$\swarrow$

On a donc

1. un point de tangence horizontale en $M(0) = (0, 0)$,
2. un point de tangence verticale en $M(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = (2^{2/3}, \sqrt{2})$,
3. un point de tangence horizontale en $M(\sqrt[3]{2}) = (\sqrt{2}, 2^{2/3})$ (le symétrique de $M(\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ à travers la diagonale),
4. aucun point stationnaire.

Etudions les branches infinies.

Lorsque $t \to -1$,

$$\lim_{t\to-1^{\mp}} x(t) = \pm\infty, \qquad \lim_{t\to-1^{\mp}} y(t) = \mp\infty$$

On peut alors regarder

$$m = \lim_{t\to-1^{\mp}} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-1^{\mp}} \frac{3t^2}{1+t^3} \cdot \frac{1+t^3}{3t} = -1\,,$$

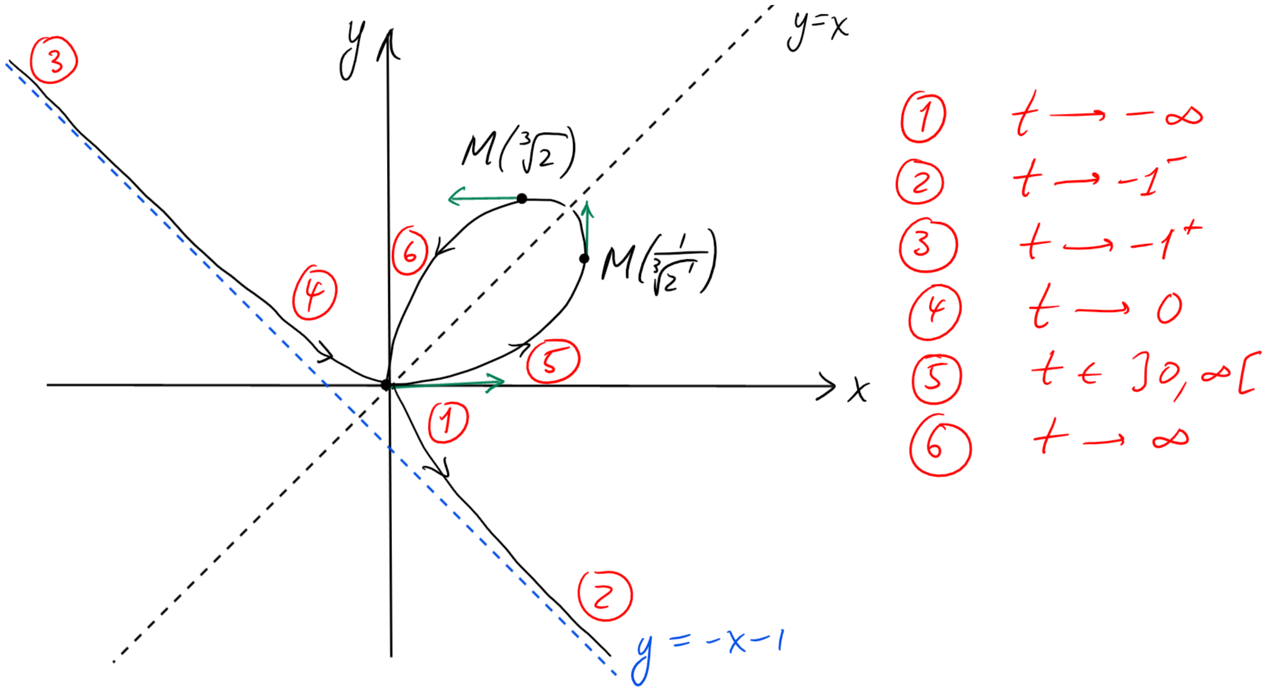
puis

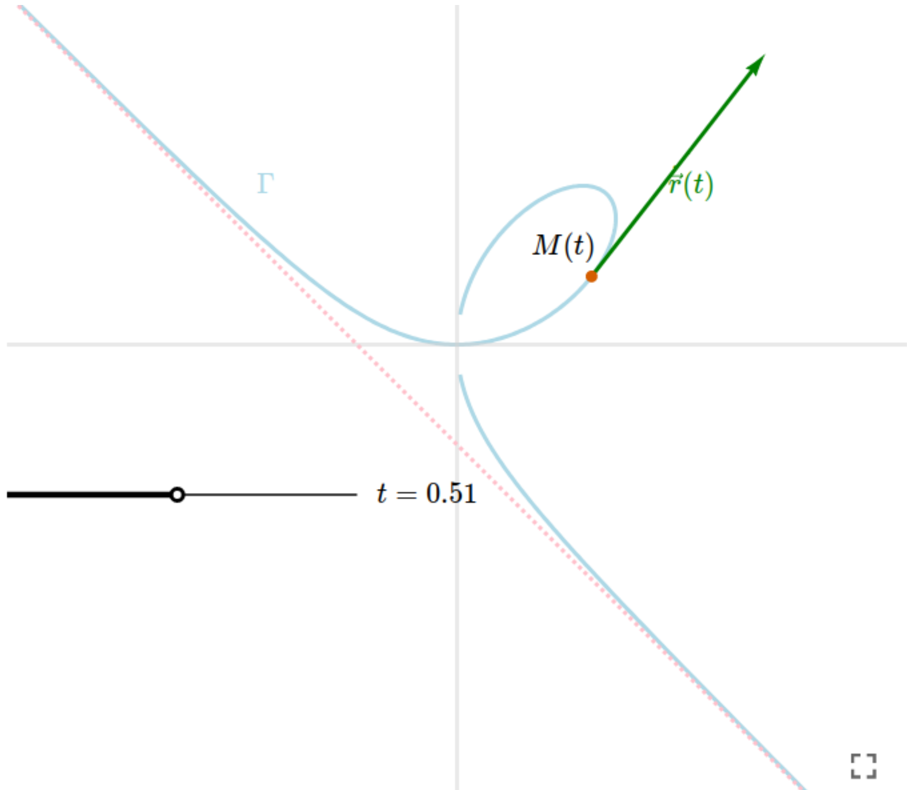
$$\begin{aligned} h &= \lim_{t\to-1^{\mp}} [y(t) - (-1)x(t)] \\ &= \lim_{t\to-1^{\mp}} \left(\frac{3t^2}{1+t^3} + \frac{3t}{1+t^3}\right) \\ &= \lim_{t\to-1^{\mp}} \frac{3t(t+1)}{1+t^3} \\ &= \lim_{t\to-1^{\mp}} \frac{3t(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} \\ &= \frac{-3}{3} = -1. \end{aligned}$$

et donc $y = -x - 1$ est une asymptote oblique lorsque $t \to -1^{\mp}$.

On remarque que $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = 0$.

Tracé :





Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

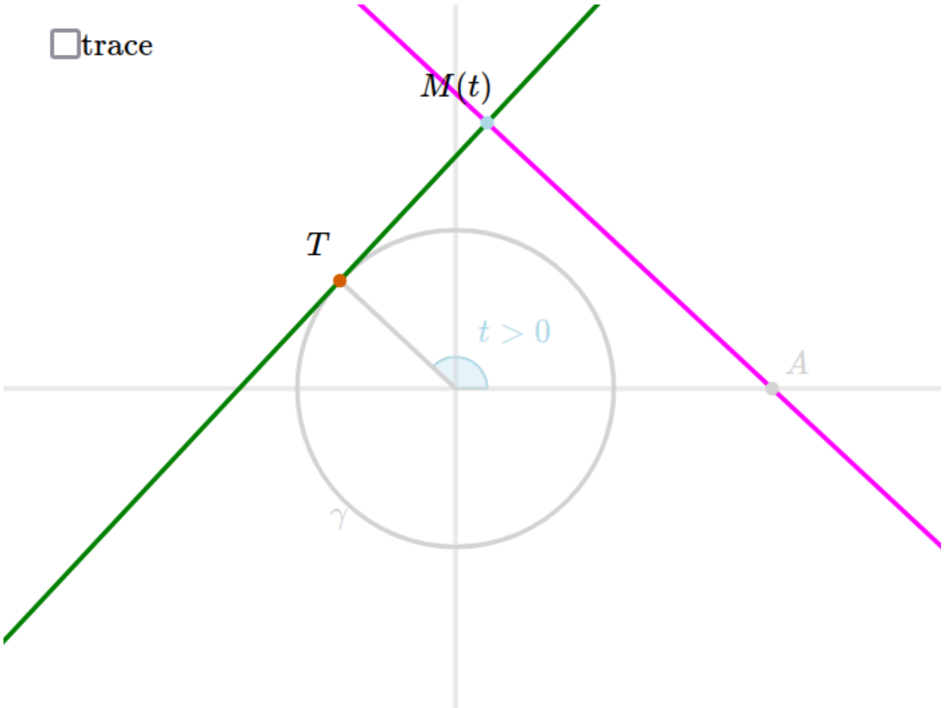
(On a aussi représenté la droite $y = tx$.) ◇

Exemple 6.17. Soient

- γ le cercle de rayon 1 centré à l'origine,
- $A = (2, 0)$,
- $T \in \gamma$ (un point qui va bouger)
- d la tangente à γ en T,
- p la droite perpendiculaire à d passant par A,

- M le point d'intersection de p avec d.

La trajectoire de M, lorsque T se déplace sur γ, est appelée le **Limaçon de Pascal** :



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

Introduisons le paramètre $t \in [-\pi, \pi]$ pour localiser T sur le cercle :

$$\overrightarrow{OT(t)} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} .$$

Puisque la tangente d est perpendiculaire à $\overrightarrow{OT(t)}$, elle est dirigée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} .$$

Pour une valeur fixée de t, les expressions paramétriques de d et p sont

$$\begin{aligned} d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ p : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Puisque $M(t)$ est le point d'intersection de ces deux droites, on pose

$$\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} ,$$

que l'on résout pour trouver

$$\begin{aligned} \lambda &= -2\sin(t) \\ \mu &= 1 - 2\cos(t). \end{aligned}$$

On a donc le point d'intersection $M(t) = (x(t), y(t))$, où

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t) + 2\sin^2(t), \\ y(t) &= \big(1 - 2\cos(t)\big)\sin(t). \end{aligned}$$

On étudie le Limaçon ainsi paramétré, pour $t \in [-\pi, \pi]$.

Les dérivées sont

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\sin(t)\big(1 - 4\cos(t)\big), \\ \dot{y}(t) &= -4\cos^2(t) + \cos(t) + 2, \end{aligned}$$

et on a

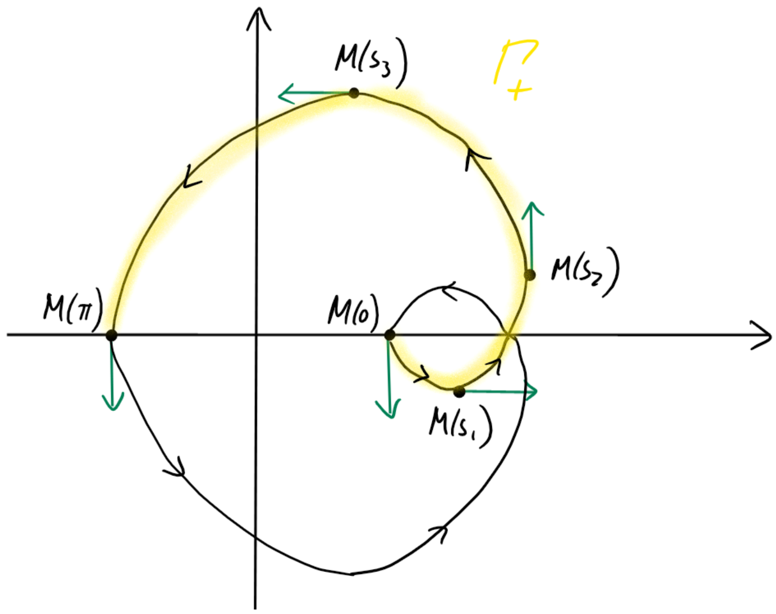
- $\dot{x}(t) = 0$ si et seulement si $\sin(t) = 0$ ou $\cos(t) = \frac{1}{4}$, ce qui implique $t = 0$, $t = \pm\pi$, ou $t = \pm s_2$, où
$$s_2 := \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \approx 75.6^\circ$$
- $\dot{y}(t) = 0$ si et seulement si $\cos(t) = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ ce qui implique $t = s_1$ ou s_3, où
$$\begin{aligned} s_1 &:= \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{33}}{8}\right) \approx 32^\circ\,, \\ s_3 &:= \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right) \approx 126.3^\circ \end{aligned}$$

	$-\pi$		0		s_1		s_2		s_3		π
$\dot{x}(s)$			0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$\dot{y}(s)$				$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\dot{\vec{r}}(s)$		(par symétrie)	$\downarrow$ T.V.	$\searrow$	$\rightarrow$ T.H.	$\nearrow$	$\uparrow$ T.V.	$\nwarrow$	$\leftarrow$ T.H	$\swarrow$	$\downarrow$ T.V.

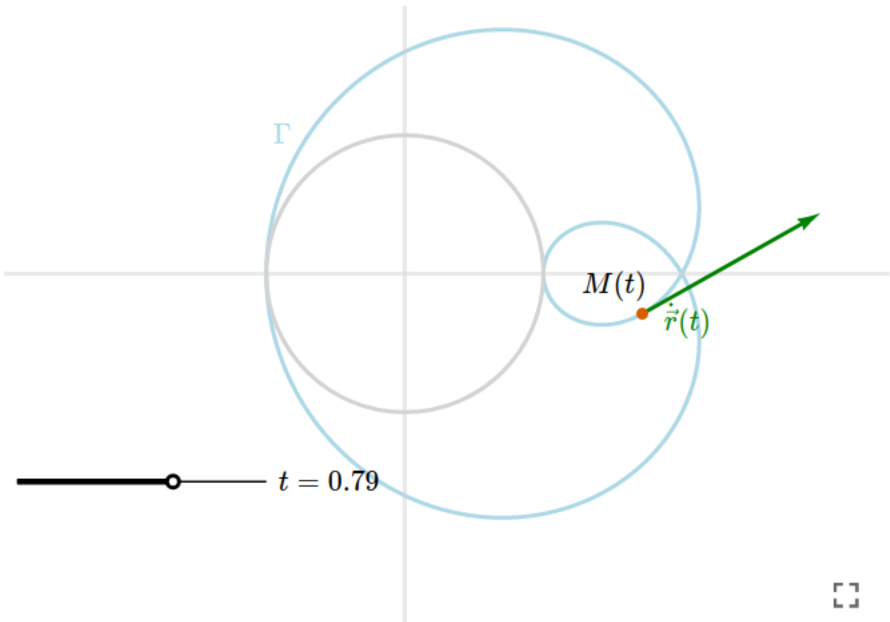
T.V. – tangence verticale

T.H. – tangence horizontale

On remarque que $x(t)$ est paire et $y(t)$ est impaire, donc la partie $t \in [-\pi, 0]$ s'obtient à partir de la partie $t \in [0, \pi]$ par réflexion à travers Ox.



$$M(0) = (1,0)$$
$$M(s_1) \simeq (1.42, -0.37)$$
$$M(s_2) \simeq (2, 0.4)$$
$$M(s_3) \simeq (0.72, 1.76)$$
$$M(\pi) = (-1,0)$$



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-B

◇