Chapitre 4

Fonctions continues

4.1 Introduction

On a vu que la valeur qu'une fonction f prend un un point x_0 peut n'avoir aucun lien avec la valeur de sa limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Pour certaines fonctions, pourtant, la limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ est égale à la valeur $f(x_0)$ de f en x_0. Ces fonctions sont dites *continues*.

Définition 4.1. Si f est définie en $x_0 \in \mathbb{R}$ et dans son voisinage, et si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,,$$

on dit que f est **continue en** x_0. Sinon, f est dite **discontinue en** x_0.

La définition de continuité comporte implicitement trois exigences :

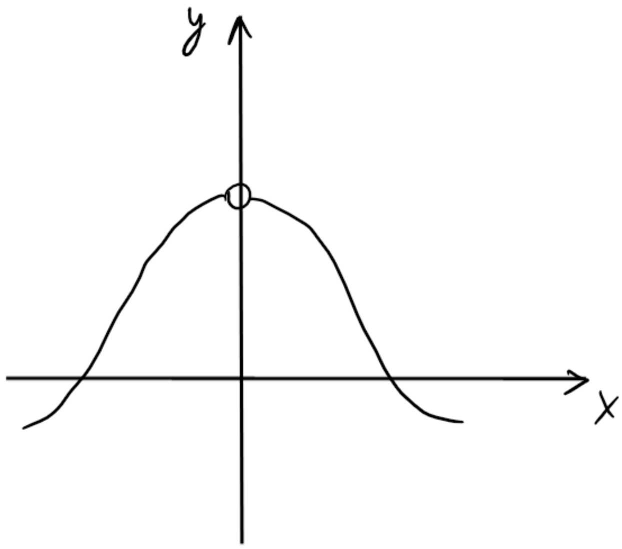
- $f(x_0)$ existe, c'est-à-dire $x_0 \in D_f$,
- $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, et
- cette limite $L = f(x_0)$.

Exemple 4.2. La fonction $f(x) = x^2$ est continue en 2, puisque $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ (voir section précédente), et $f(2) = 2^2 = 4$, donc $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. ◇

On remarque qu'il est donc très facile de calculer les limites des fonctions continues : pour trouver $\lim_{x\to x_0} f(x)$, on doit simplement évaluer la fonction f en x_0.

Considérons quelques exemples de fonctions discontinues :

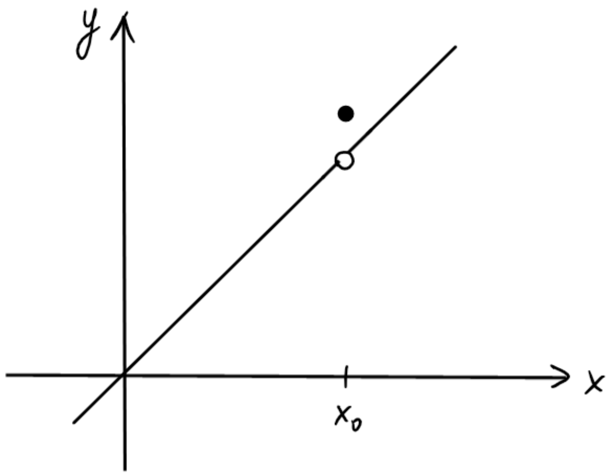
- Discontinuité de type "trou" : $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe mais f n'est pas définie en x_0. Par exemple, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ en $x_0 = 0$.



- Discontinuité de type “trou-saut” : $f(x_0)$ existe, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe aussi, mais $f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x)$. Par exemple, si

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 5, \\ 6 & \text{si } x = 5\,, \end{cases}$$

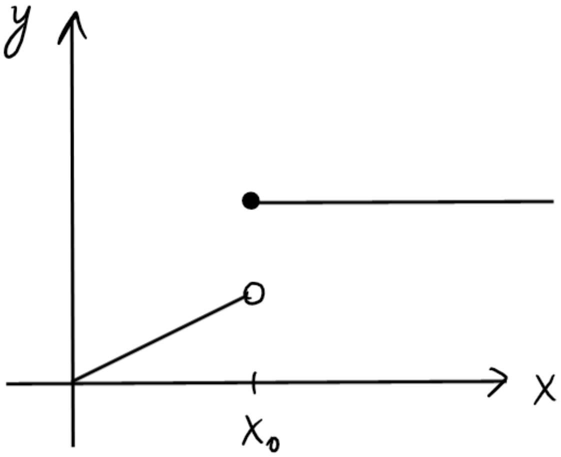
alors avec $x_0 = 5$ on a $f(x_0) = 6$ mais $\lim_{x\to x_0} f(x) = 5$:



- Discontinuité de type “saut” : $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existent mais ne sont pas égales (et donc $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n’existe pas). Par exemple,

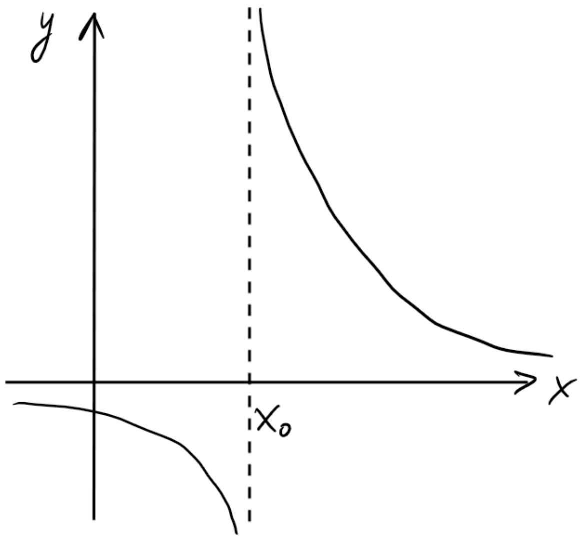
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x < 2, \\ 2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

en $x_0 = 2$:



- Discontinuité de type infini : Au moins une des limites $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ou $\lim_{x\to x_0} f(x)$ est $\pm\infty$.

  Par exemple, $f(x) = \frac{1}{x-2}$ est discontinue en $x_0 = 2$.



On peut expliciter la définition de la continuité en remplaçant la limite par sa définition : f est **continue en** x_0 si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que

$$|x - x_0| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Remarquons que pour la continuité, on s'intéresse justement à ce qui se passe en x_0, et on remplace donc la condition "$0 < |x-x_0| \leqslant \delta$", dans la définition de limite, par "$|x-x_0| \leqslant \delta$".

Définition 4.3. Soit I un intervalle ouvert. Une fonction f est dite **continue sur** I si elle est continue en x_0 pour tout $x_0 \in I$.

L'ensemble de toutes les fonctions continues sur I est noté $C^0(I)$.

Intuitivement, une fonction est continue sur I si on peut y tracer son graphe "sans lever le crayon".

Exemple 4.4. Montrons que $f(x) = x^2$ est continue en tout x_0. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. On a

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| \\
&= |(x - x_0) \cdot (x + x_0)| \\
&= |x - x_0| \cdot |x + x_0| \\
&= |x - x_0| \cdot |x - x_0 + x_0 + x_0| \\
&\leqslant |x - x_0| \cdot (|x - x_0| + |2x_0|) \\
&= |x - x_0|^2 + |2x_0| \cdot |x - x_0|.
\end{aligned}$$

On doit donc choisir $\delta > 0$ tel que

$$|x - x_0| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |x - x_0|^2 + |2x_0| \cdot |x - x_0| \leqslant \varepsilon\,.$$

On a

$$|x - x_0| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |x - x_0|^2 + |2x_0| \cdot |x - x_0| \leqslant \delta^2 + |2x_0| \cdot \delta\,.$$

On peut donc prendre $\delta > 0$ tel que $\delta^2 + |2x_0| \cdot \delta \leqslant \varepsilon$. En exigeant que $\delta \leqslant 1$, on a $\delta^2 + |2x_0| \cdot \delta = \delta(\delta + |2x_0|) \leqslant \delta(1 + 2|x_0|)$, et donc il suffit de prendre $\delta > 0$ tel que $\delta(1 + 2|x_0|) \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$.

Ainsi, en prenant $0 < \delta \leqslant \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\}$, on a

$$|x - x_0| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\,.$$

◇

Exemples 4.5.

- Soit $f(x) = \sin(x)$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point fixé. Montrons que f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. On remarque pour commencer que

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |\sin(x) - \sin(x_0)| \\
&= \left|2\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right| \\
&= 2\left|\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right| \cdot \left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right| \\
&\leqslant 2\left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right| \\
&\leqslant 2\frac{|x - x_0|}{2} \\
&= |x - x_0|.
\end{aligned}$$

  Prenons maintenant un δ tel que $0 < \delta \leqslant \varepsilon$. On a alors, pour ce δ, que

$$\begin{aligned}
|x - x_0| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| &\leqslant |x - x_0| \\
&\leqslant \delta \\
&\leqslant \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

  Ceci montre que f est continue en x_0. On a donc montré que $f \in C^0(\mathbb{R})$.

- En utilisant l'identité

$$\cos(x) - \cos(x_0) = -2\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right),$$

on prouve de même que $\cos(x)$ est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

◇

Proposition 4. *Soient f et g continues en x_0. Alors les fonctions suivantes sont aussi continues en x_0 :*
- *λf pour $\lambda \in \mathbb{R}$,*
- *$|f|$,*
- *$f \pm g$,*
- *$f \cdot g$,*
- *$\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$).*

Ces propriétés sont conséquences des propriétés des limites. Par exemple, f et g sont continues en $x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. On a donc $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0)$, et donc $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = (f+g)(x_0)$, d'où $f+g$ est continue en x_0.

Exemples 4.6.
- En utilisant ces propriétés, la preuve de la continuité de $f(x) = x^2$ devient immédiate : comme la fonction identité $g(x) = x$ est continue (puisque pour tout x_0, on a $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0 = g(x_0)$), on a que $f(x) = g(x)^2 = g(x)g(x)$ est continue en x_0, étant donné que c'est un produit de fonctions continues en x_0.
- De même, comme les fonctions constantes sont continues, on en déduit que les polynômes sont des fonctions continues en tout x_0, puisque ce sont des sommes de produits de fonctions continues.
- Il en découle aussi que les fonctions rationnelles (de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes) sont continues sur leur domaine.
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est continue sur son domaine puisqu'elle est donnée par le quotient de deux fonctions continues.
- $\exp(x)$ et $\log(x)$ sont continues sur leurs domaines de définitions respectifs (on ne le démontre pas).

◇

Théorème 4.7. *Soit f définie sur un voisinage épointé de x_0 telle que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, et soit g continue au point L. Alors*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = g(L).$$

Le théorème ci-dessus dit qu'on peut "passer les limites à l'intérieur d'une fonction continue".

Exemple 4.8. Considérons la limite

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{1+\sin(x)}\,.$$

On peut écrire $\sqrt{1+\sin(x)} = g(f(x))$, où $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = 1 + \sin(x)$. On sait que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, et puisque g est continue en 1, on peut "rentrer la limite dans g" :

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{1+\sin(x)} = \sqrt{\lim_{x\to 0}(1+\sin(x))} = \sqrt{1} = 1\,.$$

◇

Une conséquence du théorème :

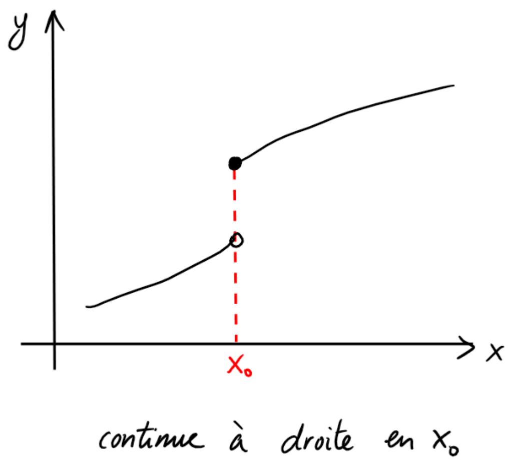
Corollaire 2. *Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors la composition $g \circ f$ est continue en x_0.*

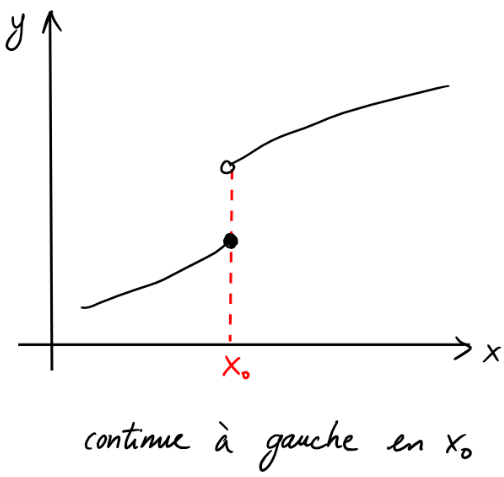
La caractérisation par les suites implique la caractérisation suivante de la continuité.

Théorème 4.9. *f est continue en x_0 $\iff$ pour toute suite (x_n) telle que $x_n \to x_0$, on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

On peut utiliser ce théorème pour montrer qu'une fonction n'est pas continue.

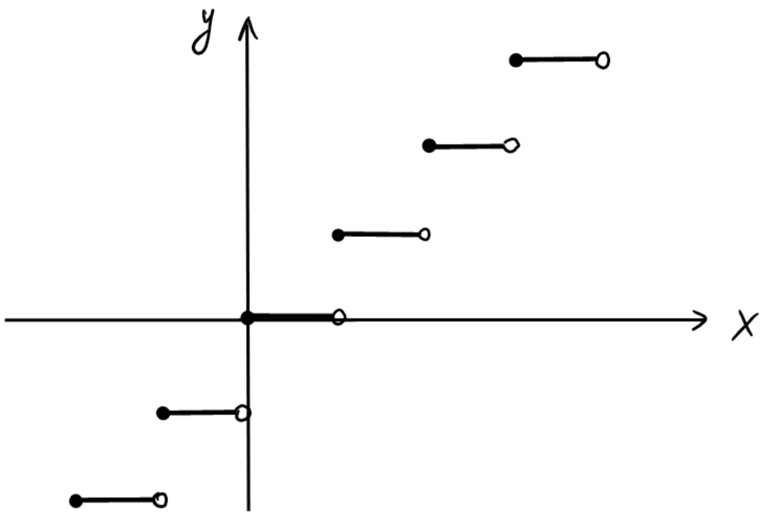
Définition 4.10.
- Si $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, la fonction f est dite **continue à droite**.
- Si $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, la fonction f est dite **continue à gauche**.





Exemples 4.11.
- $f(x) = E(x)$ est continue à droite et discontinue à gauche en tout $x_0 \in \mathbb{Z}$. En effet, si $x_0 \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x\to x_0^-} E(x) = E(x_0) - 1 = x_0 - 1 \neq x_0 = E(x_0)\,.$$



- Soit $f : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2} & \text{si } x < 2, \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 2 \\ 2x^2 - 4 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Discutons de la continuité de f en $x_0 = 2$. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\left(\sqrt{2+x}-2\right)\left(\sqrt{2+x}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{2+x}+2\right)} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{2+x}+2\right)} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt{2+x}+2} = \frac{1}{4}, \text{ et} \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} 2x^2 - 4 = 4. \end{aligned}$$

On a $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{4} = f(2)$ et la fonction est donc continue à gauche en 2. Par contre, puisque $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$, la fonction n'est pas continue à droite.

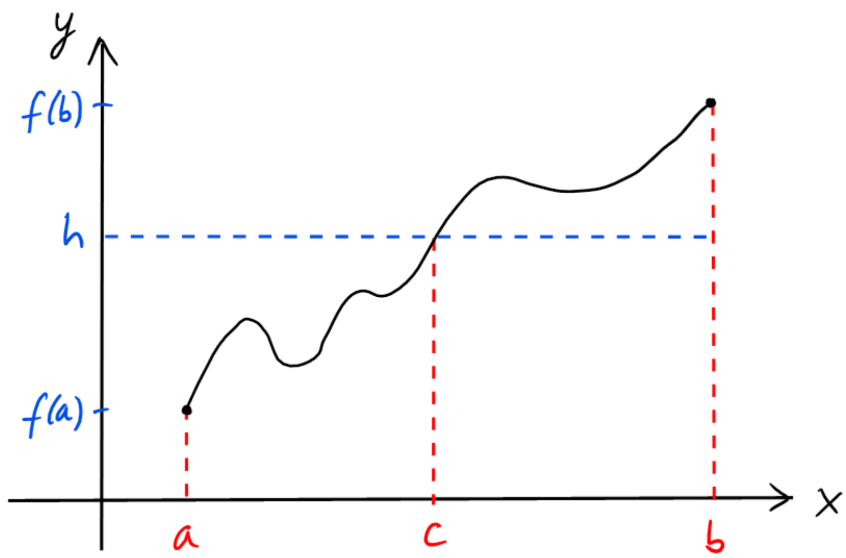
◇

4.2 Théorème de la valeur intermédiaire

Définition 4.12. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite **continue** si

- f est continue en tout $x_0 \in]a, b[$,
- f est continue à droite en a, et
- f est continue à gauche en b.

Théorème 4.13 (Théorème de la valeur intermédiaire (TVI))**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(a) < f(b)$. Alors pour tout $h \in]f(a), f(b)[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = h$.*



Démonstration. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(a) < f(b)$, et soit $h \in]f(a), f(b)[$. On va utiliser un algorithme de bissection pour construire $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = h$ comme une limite de suites. On procède par étapes :

Etape 1 : Soit $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On considère le milieu $\frac{a_0+b_0}{2}$ de $[a_0, b_0]$.

- Si $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) = h$, on a trouvé $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = h$. Sinon,
- si $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) < h$, on pose $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_0 = b$
- si $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) > h$, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

Dans les deux derniers cas, on s'est ramené à un intervalle $[a_1, b_1]$ de longueur $\frac{b-a}{2}$, avec $f(a_1) < h$ et $f(b_1) > h$.

Etape 2 : On considère le milieu de l'intervalle $[a_1, b_1]$: soit on obtient un $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = h$, soit on se ramène à un intervalle $[a_2, b_2]$ de longueur $\frac{b-a}{4}$, avec $f(a_2) < h$ et $f(b_2) > h$.

On répète cette procédure de telle sorte qu'à l'issue de l'étape n, si on n'a pas encore trouvé un $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = h$, on a défini un intervalle $[a_n, b_n] \subset [a,b]$, de longueur $\frac{b-a}{2^n}$, avec $f(a_n) < h$ et $f(b_n) > h$.

On obtient ainsi :

- Une suite (a_n) croissante et majorée par b
- Une suite b_n décroissante et minorée par a.

Ces deux suites convergent, et on a de plus que

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0\,,$$

donc $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. On définit

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

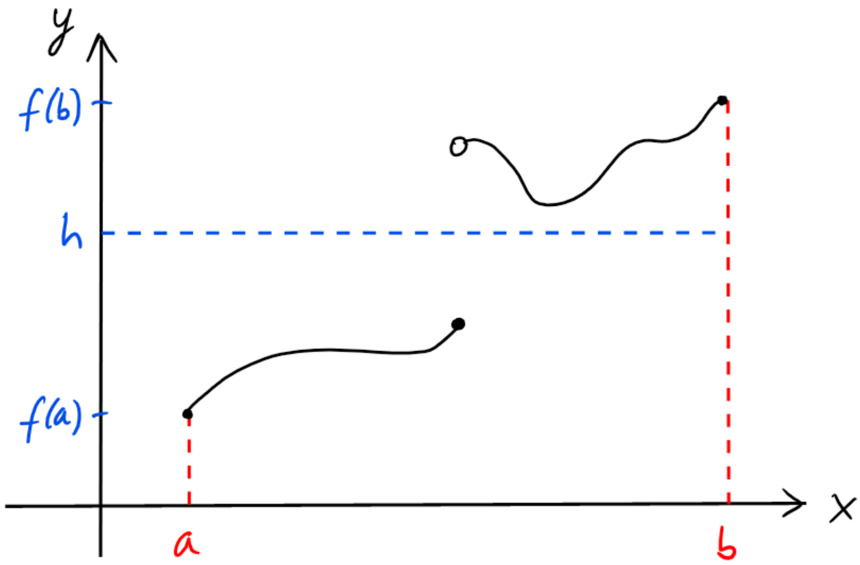
Il nous reste à prouver que $f(c) = h$. Par la continuité de f et puisque $a_n \to c$, le théorème de caractérisation de la continuité par les suites nous permet de dire que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c)$. De même, $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$.

Or pour tout n, $f(a_n) < h$, donc $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant h$. De même, pour tout n, $f(b_n) > h$, donc $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \geqslant h$. Donc $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ implique que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = h$$

et enfin que $f(c) = h$. □

On remarque que sans l'hypothèse de continuité, le résultat n'est plus vrai en général.



Exemple 4.14. On peut utiliser le TVI pour fournir une solution approximative d'une équation (et, en particulier, montrer qu'une solution existe). Considérons l'équation $x^5 = 1 - x$. On pose $f(x) = x^5 + x - 1$, une fonction continue. Sur l'intervalle $[0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} f(0) &= -1, \\ f(1) &= 1. \end{aligned}$$

On prend $h := 0$. Par le TVI, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = h = 0$. Ce c satisfait $f(c) = c^5 + c - 1 = 0$, il est donc solution de $f(x) = 0$. On remarque que la longueur de l'intervalle $[0, 1]$ est 1.

Comme $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{-15}{32} < 0$, on peut maintenant considérer $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, un intervalle de longueur $\frac{1}{2}$. De nouveau par le TVI pour $h = 0$, il existe $c \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tel que $f(c) = h = 0$.

On continue de cette manière pour réduire à chaque fois la longueur de l'intervalle dans lequel se trouve la solution c. Ainsi, on obtient une bonne approximation de cette solution, sans la connaître exactement. ◇

La preuve du TVI utilise la même idée d'un algorithme de bissection.
On remarque qu'on peut utiliser le TVI pour localiser un point d'intersection de deux courbes à un certain degré de précision. Si les deux courbes sont données par $y = g(x)$ et $y = h(x)$, alors on considère la fonction $f(x) = g(x) - h(x)$ et on étudie les points où $f(x)$ s'annule en utilisant le TVI.

Corollaire 3. *Un polynôme de degré impair possède toujours une racine.*

Démonstration. Considérons un polynôme de degré impair,

$$p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_0\,,$$

avec $a_{2n+1} \neq 0$.

Si $a_{2n+1} > 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$. On a donc $M > 0$ tel que $p(M) > 0$ et $N < 0$ tel que $p(N) < 0$. En appliquant le TVI sur l'intervalle $[N, M]$, on a qu'il existe $c \in]N, M[$ tel que $p(c) = 0$.

Si $a_{2n+1} < 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$, et on peut adapter le même argument. □

Théorème 4.15. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

- *Si f est strictement croissante, alors $\mathrm{Im}(f) = [f(a), f(b)]$, et $f : [a, b] \to \mathrm{Im}(f)$ est bijective.*
- *Si f est strictement décroissante, alors $\mathrm{Im}(f) = [f(b), f(a)]$, et $f : [a, b] \to \mathrm{Im}(f)$ est bijective.*

Démonstration. Considérons le premier cas, dans lequel f est strictement croissante. Dans ce cas, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ pour tout $x \in [a, b]$, et donc $\mathrm{Im}(f) \subset [f(a), f(b)]$. Puis, si on fixe une valeur intermédiaire h, $f(a) < h < f(b)$, le Théorème de la valeur intermédiaire garantit l'existence d'un $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = h$, ce qui implique que $h \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi, $]f(a), f(b)[\subset \mathrm{Im}(f)$. Puisque $f(a), f(b) \in \mathrm{Im}(f)$, on a aussi $[f(a), f(b)] \subset \mathrm{Im}(f)$. On conclut donc que $\mathrm{Im}(f) = [f(a), f(b)]$.

On sait maintenant que $f : [a, b] \to \mathrm{Im}(f)$ est surjective. Mais étant strictement croissante, elle est également injective. Elle est donc bijective. □