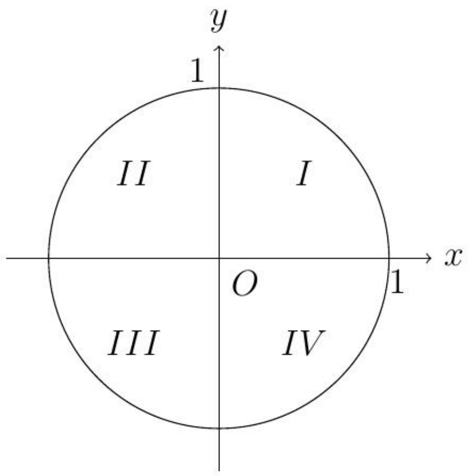
Chapitre 3

Trigonométrie circulaire

3.1 Le cercle trigonométrique

Le **cercle trigonométrique** est le cercle de rayon 1 centré en l'origine $O(0,0)$ du plan $\mathbb{R}^2$.

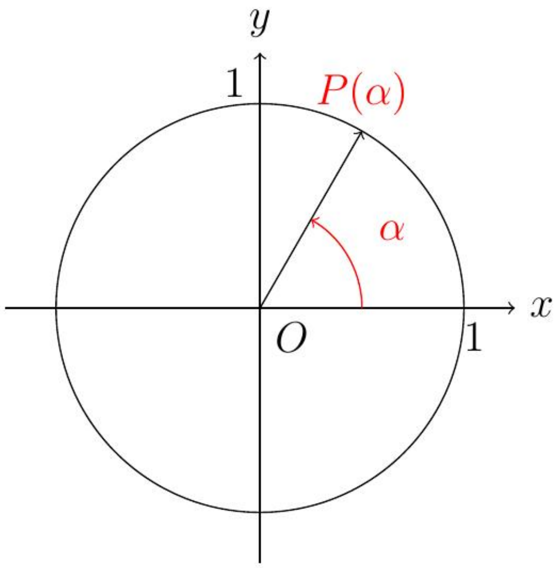


Il est partagé en quatre quadrants, notés I, II, III, IV.

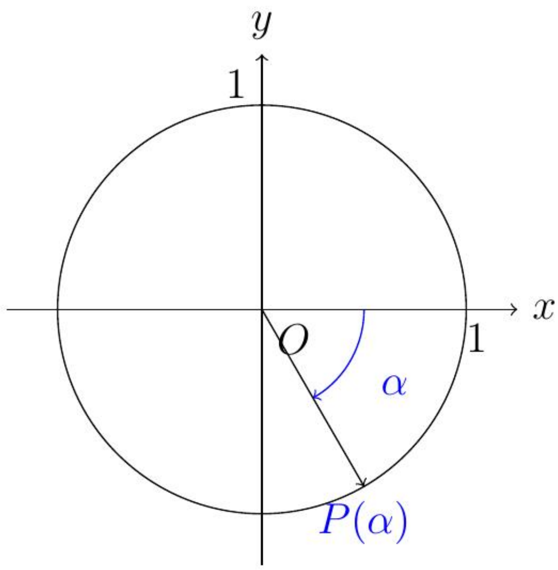
Un angle trigonométrique $\alpha \in \mathbb{R}$ positif se dessine dans le cercle trigonométrique dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ; un angle négatif se dessine dans le sens des aiguilles d'une montre.

Dans ce cours, les angles seront mesurés en **radians**. La mesure d'un angle en radians correspond à la longueur de l'arc de cercle (sur le cercle trigonométrique) sous-tendu par cet angle. Une ouverture maximale correspond donc à 2π.

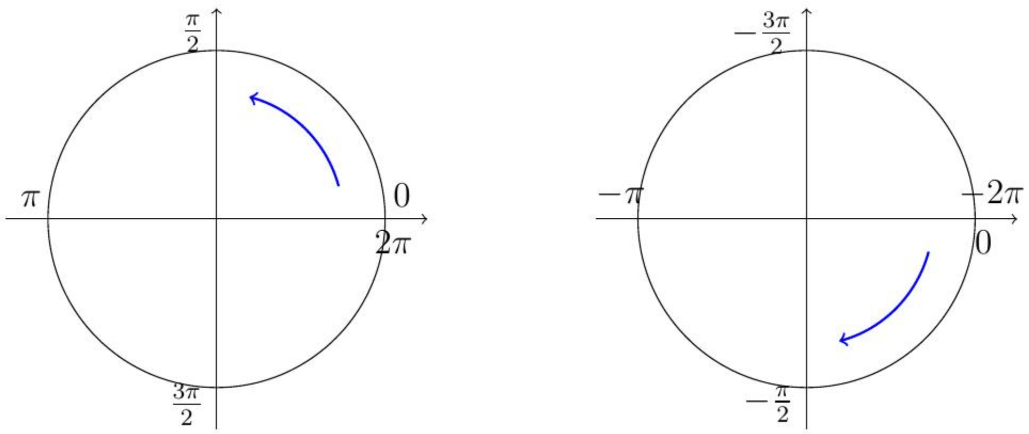
A chaque angle α on peut associer un unique point $P(\alpha)$ sur le cercle.
Angle trigonométrique positif $\alpha > 0$:

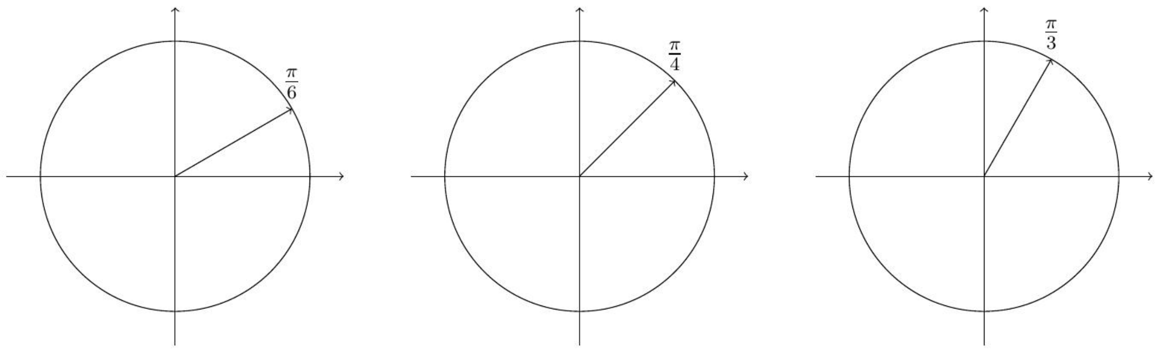


Angle trigonométrique négatif $\alpha < 0$:



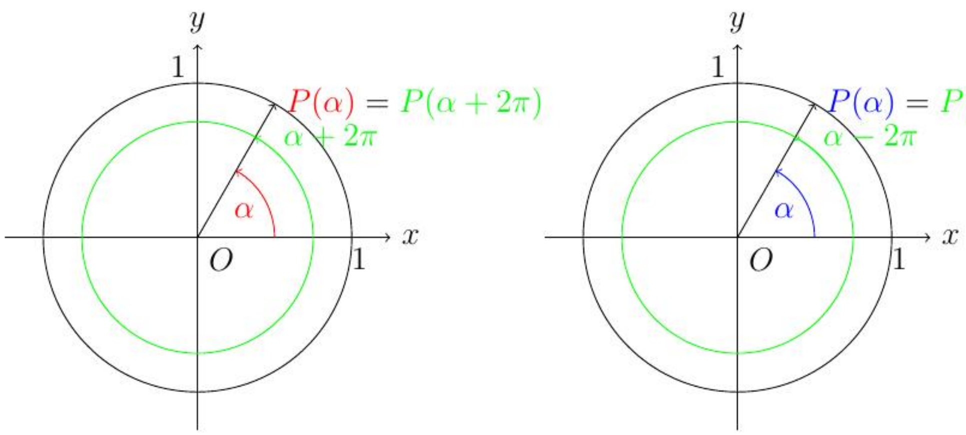
Représentons quelques angles importants et leurs points associés :





On constate que le point associé à l'angle $\alpha + 2\pi$ ou à l'angle $\alpha - 2\pi$ est le même que le point associé α, on a donc $P(\alpha) = P(\alpha + 2\pi) = P(\alpha - 2\pi)$. Plus généralement,

$$P(\alpha + k2\pi) = P(\alpha), \forall k \in \mathbb{Z}.$$



Remarque 3.1.
- Attention : si $P(\alpha) = P(\beta)$, i.e. deux points associés sont les mêmes, cela n'implique pas forcément que les angles sont identiques, mais qu'ils peuvent différer d'un multiple entier de tours :

$$P(\alpha) = P(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta + k2\pi, \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z}.$$

- Ces relations entre angles et points associés auront un impact déterminant sur la nature des fonctions trigonométriques.

◇

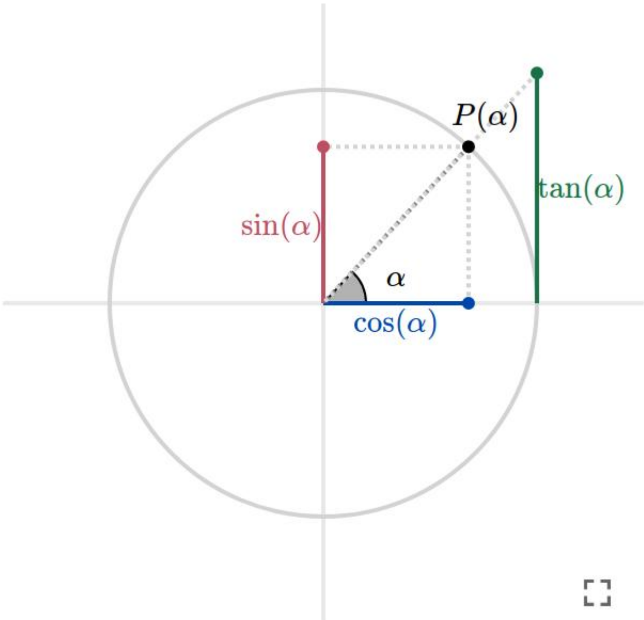
3.2 Les fonctions trigonométriques

3.2.1 Sinus, cosinus

Définition 3.2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ un angle trigonométrique, et soit $P(\alpha)$ son point associé, de coordonnées (x, y).

1. On définit le **cosinus** de α, noté $\cos(\alpha)$, comme l'abcisse de $P(\alpha)$:
$$\cos(\alpha) = x.$$
2. On définit le **sinus** de α, noté $\sin(\alpha)$, comme l'ordonnée de $P(\alpha)$:
$$\sin(\alpha) = y.$$

L'animation ci-dessous permet d'illustrer ces fonctions, pour des angles $\alpha \in [0, 2\pi[$:



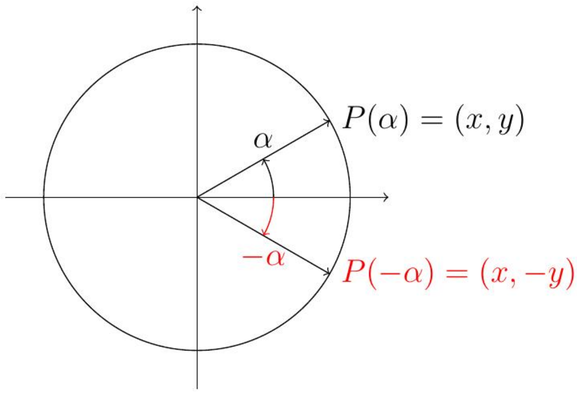
Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

Les propriétés suivantes sont conséquences directes des définitions du sinus et du cosinus. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$, $\sin(\alpha) \in [-1, 1]$
2. $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
3. Si $P(\alpha) \in I$, $\cos(\alpha) \geqslant 0$, $\sin(\alpha) \geqslant 0$.
4. Si $P(\alpha) \in II$, $\cos(\alpha) \leqslant 0, \sin(\alpha) \geqslant 0$.
5. Si $P(\alpha) \in III$, $\cos(\alpha) \leqslant 0$, $\sin(\alpha) \leqslant 0$.
6. Si $P(\alpha) \in IV$, $\cos(\alpha) \geqslant 0, \sin(\alpha) \leqslant 0$.
7. Comme $P(\alpha + k2\pi) = P(\alpha)\ \forall k \in \mathbb{Z}$, on a que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos(\alpha)\,,$$
$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin(\alpha)\,.$$
On dit que ces fonctions sont **périodiques**, de **période** 2π. Elles ne sont donc ni monotones, ni injectives.

De plus, les propriétés et les symétries du cercle trigonométrique impliquent les relations suivantes :

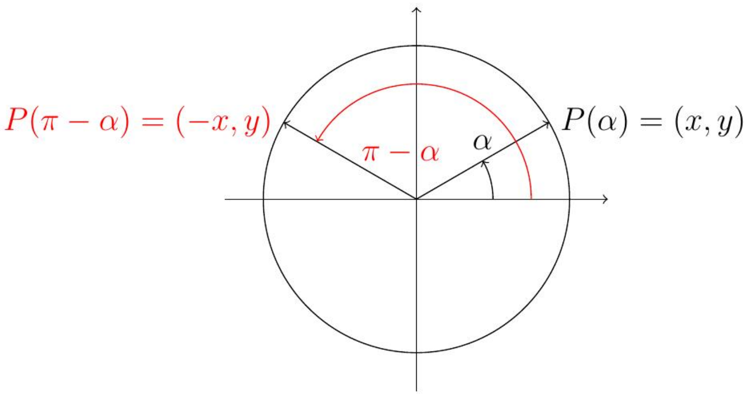
1. Angles opposés (symétrie axiale d'axe Ox) :



$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \qquad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

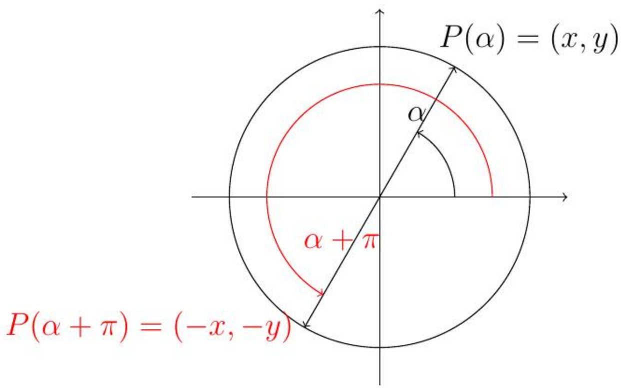
En d'autres termes : $x \mapsto \cos(x)$ est une fonction paire, et $x \mapsto \sin(x)$ est une fonction impaire.

2. Angles supplémentaires (symétrie axiale d'axe Oy) :



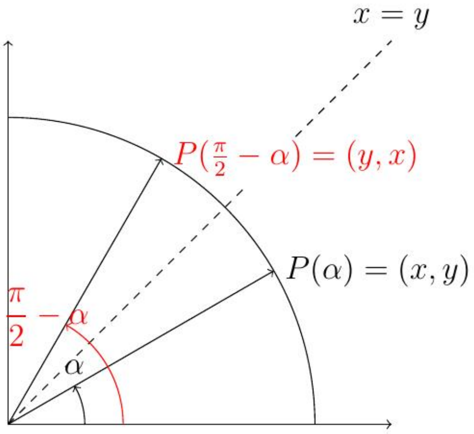
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

3. Angles diamétralement opposés (symétrie centrale) :



$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$$

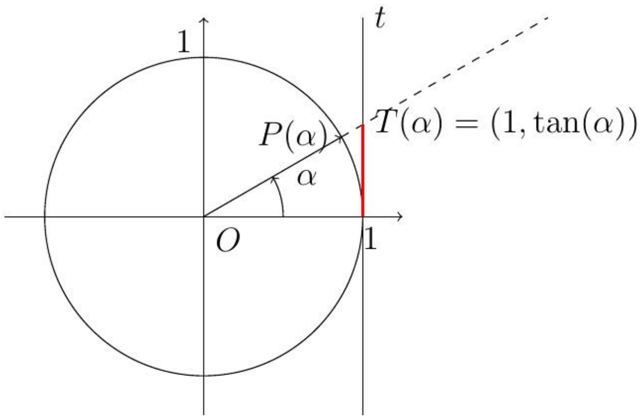
4. Angles complémentaires (symétrie axiale d'axe $x = y$) :



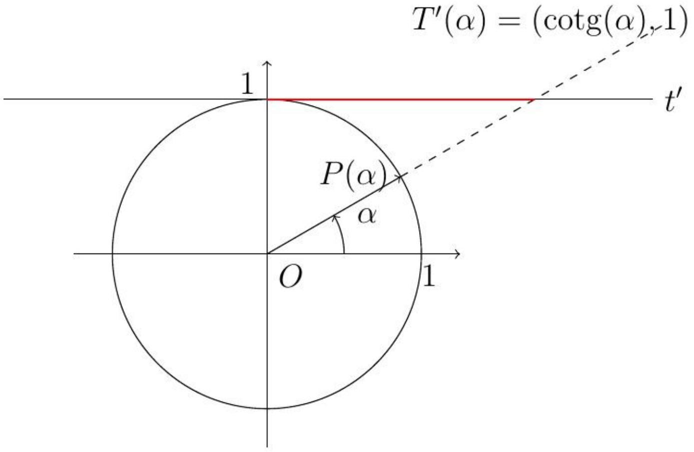
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

3.2.2 Tangente et cotangente

Définition 3.3. Soit t la droite perpendiculaire à l'axe Ox en $(1, 0)$, soit α un angle trigonométrique et $P(\alpha)$ son point associé sur le cercle. Soit $T(\alpha) = (1, y)$ le point d'intersection de t avec la droite $OP(\alpha)$. La **tangente** de l'angle α, notée $\tan(\alpha)$, est définie comme l'ordonnée du point $T(\alpha)$.

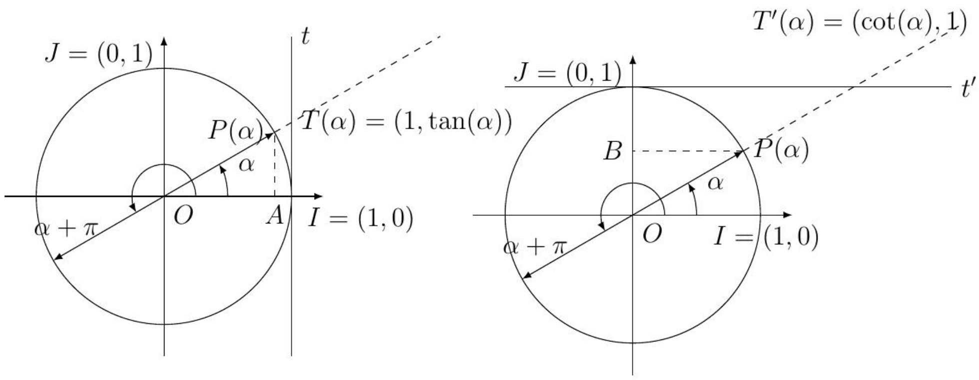


Définition 3.4. Soit t' la droite perpendulaire à l'axe Oy en $(0, 1)$, soit α un angle trigonométrique et $P(\alpha)$ son point associé sur le cercle. Soit $T'(\alpha) = (x, 1)$ le point d'interesection de t' avec la droite $OP(\alpha)$. La **cotangente** de l'angle α, notée $\mathrm{cotg}(\alpha)$, est définie comme l'abcisse du point $T'(\alpha)$.



On a les propriétés suivantes :

1. La tangente n'est pas définie pour $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$. Donc son domaine de définition est $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. La cotangente n'est pas définie pour $\alpha = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$. Donc son domaine de définition est $D_{\mathrm{cotg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
$$\begin{aligned} \tan(\alpha + k\pi) &= \tan(\alpha) \qquad \forall \alpha \in D_{\tan} \\ \mathrm{cotg}(\alpha + k\pi) &= \mathrm{cotg}(\alpha) \qquad \forall \alpha \in D_{\mathrm{cotg}} \,. \end{aligned}$$
Ces fonctions sont **périodiques**, de période π.



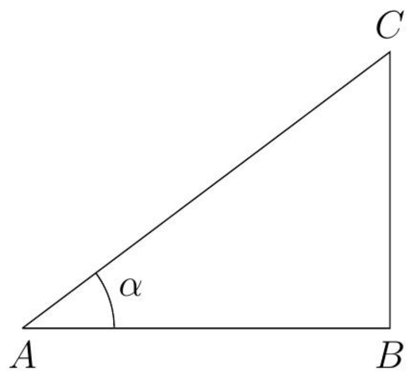
4. Sur $D_{\tan}$,
$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \,.$$
5. Sur D_{cotg},
$$\mathrm{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)} \,.$$
6. Ces fonctions sont impaires :
$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)\,, \qquad \mathrm{cotg}(-\alpha) = -\mathrm{cotg}(\alpha)\,.$$

On a aussi les symétries suivantes :

1. $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$, $\mathrm{cotg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{cotg}(\alpha)$.
2. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{cotg}(\alpha)$ et $\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan(\alpha)$.

3.2.3 Fonctions trigonométriques pour des angles remarquables

Les fonctions trigonométriques, à l'origine, sont faites pour résoudres des problèmes de géométrie élémentaire.

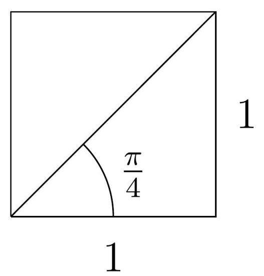


Si on considère un triangle rectangle, on remarque que les fonctions trigonométriques représentent la proportionnalité constante existant entre les longueurs de certaines paires de côtés :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{AC}$$
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{BC}{AC}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AB}$$

Ceci permet de calculer les valeurs des fonctions trigonométriques, pour des angles particuliers, dits **remarquables**.

- Pour l'angle $\frac{\pi}{4}$, considérons un carré de côté 1 :



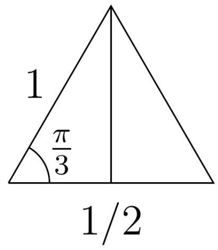
Par le Théorème de Pythagore, la diagonale de ce carré vaut $\sqrt{2}$, et donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(Dans la dernière égalité, on a multiplié la fraction par $1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.) Aussi,

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\,.$$

- Pour l'angle $\frac{\pi}{3}$, considérons un triangle équilatéral de côté 1 :



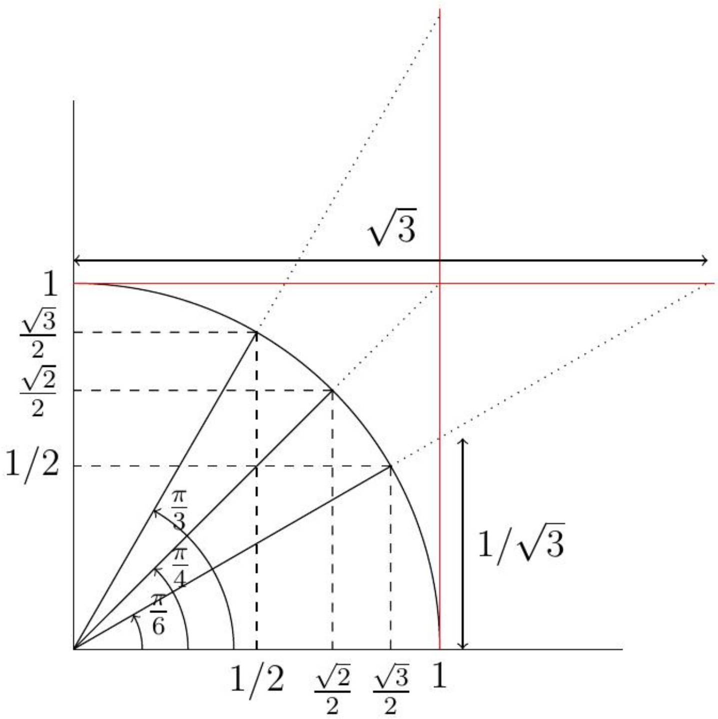
La hauteur de ce triangle est de longueur $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et elle intersecte le côté horizontal en son milieu. On a donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}\,.$$

On peut obtenir les valeurs des fonctions trigonométriques pour l'angle $\frac{\pi}{6}$ de la même façon. Résumons ce qu'on a obtenu jusqu'à présent dans le tableau suivant.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$//$
$\mathrm{cotg}(\alpha)$	$//$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Représentation et construction géométrique des angles remarquables dans le premier quadrant :



3.3 Les 4 équations élémentaires

On va présenter la résolution de chacune des quatre équations trigonométriques élémentaires, qui sont :

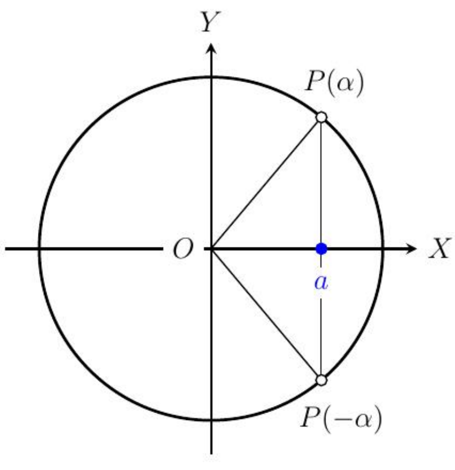
$$\cos(x) = a, \quad \sin(x) = a, \quad \tan(x) = a, \quad \operatorname{cotg}(x) = a.$$

- A l'avenir quand nous traiterons des équations plus complexes, la stratégie sera toujours de se ramener à l'une de ces équations élémentaires.
- La résolution est basée sur la nature du cercle trigonométrique qui implique que des angles différents peuvent avoir des cosinus et sinus identiques. (Par exemple, deux angles supplémentaires ont le même sinus, deux angles opposés ont le même cosinus.)

3.3.1 L'équation $\cos(x) = a$

1. L'équation possède des solutions si $a \in [-1, 1]$.
2. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. On cherche un angle α tel que $\cos(\alpha) = a$ (par exemple parmi les valeurs remarquables).
4. On doit donc résoudre $\cos(x) = \cos(\alpha)$. Deux cosinus sont égaux si les angles sont les mêmes ou sont opposés, le tout à 2π près.
5. Solution :

$$\cos(x) = \cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

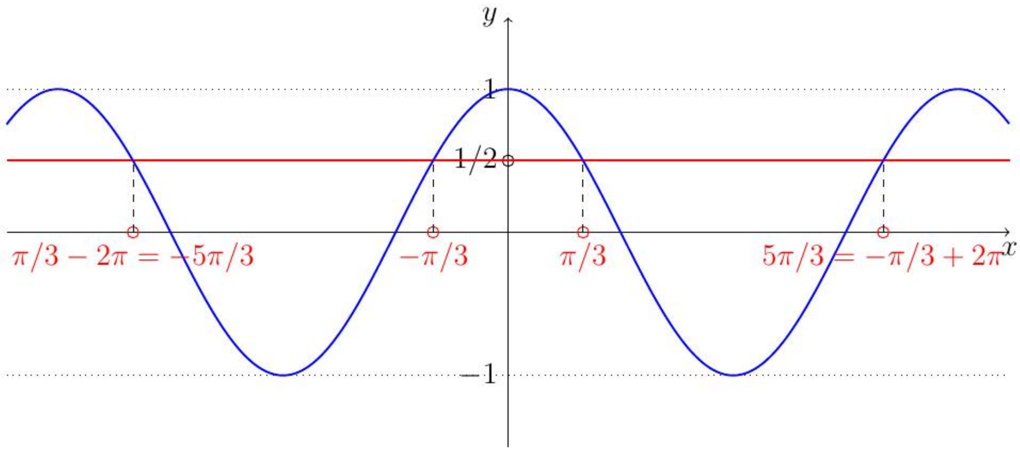


Exemple 3.5. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x) = \frac{1}{2}$. On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. On résout donc $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et on a deux familles de solutions :

$$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Et donc

$$S = \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}\,.$$

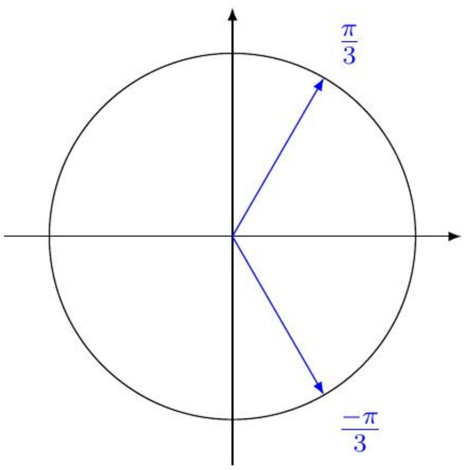


◇

Exemple 3.6. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$: $\cos(2x) = \frac{1}{2}$. On pose $y = 2x$ et on commence par résoudre $\cos(y) = \frac{1}{2}$. On trouve deux familles de solutions

$$y_1 = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{ou} \quad y_2 = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Chaque famille génère un point associé sur le cercle.



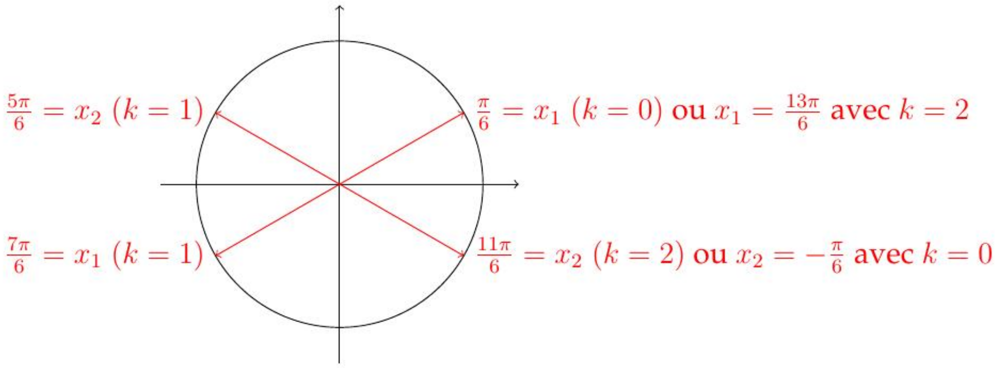
En repassant dans la variable x, on trouve donc

$$2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et donc

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{ou} \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Afin de visualiser, représentons certaines solutions sur le cercle. On peut par exemple prendre les solutions x_1 et x_2, pour $k = 0, 1, 2$.



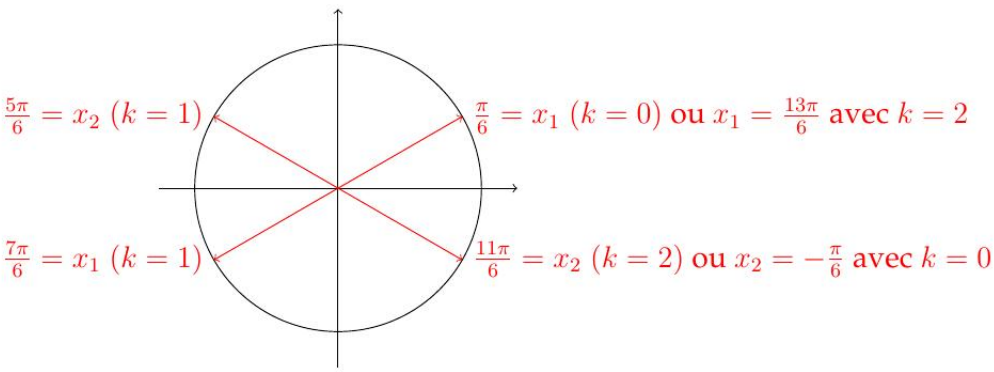
On voit que les deux familles de solutions génèrent ici 4 points associés, et non plus seulement deux. Chaque famille génère en fait un couple de points diamétralement opposés (à cause du $k\pi$, qui représente des demi-tours supplémentaires). ◇

Exemple 3.7. Résoudre pour $x \in [0, 2\pi]$: $\cos(2x) = \frac{1}{2}$. L'équation est la même qu'avant, mais la contrainte "$x \in [0, 2\pi]$" impose de garder seulement les solutions appartenant à cet intervalle.

1. On résout tout d'abord le problème pour $x \in \mathbb{R}$. Par ce qui précède, on a trouvé que

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad \text{ou} \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

2. On résout maintenant sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Il faut chercher k pour que x_1 et x_2 appartiennent à cet intervalle. On procède en s'aidant de la représentation : on se place en zéro et on tourne dans le sens trigonométrique jusqu'à atteindre 2π et on capture au passage tous les angles qui nous intéressent.



On peut donc choisir x_1 avec $k = 0, 1$ et x_2 avec $k = 1, 2$. Pour les autres k, on sort de l'intervalle $[0, 2\pi]$.

On conclut donc que $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$. ◇

Exemple 3.8. Résoudre pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $\cos(2x) = \frac{1}{2}$. Comme avant on résout tout d'abord le problème pour $x \in \mathbb{R}$ et on trouve

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad \text{ou} \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

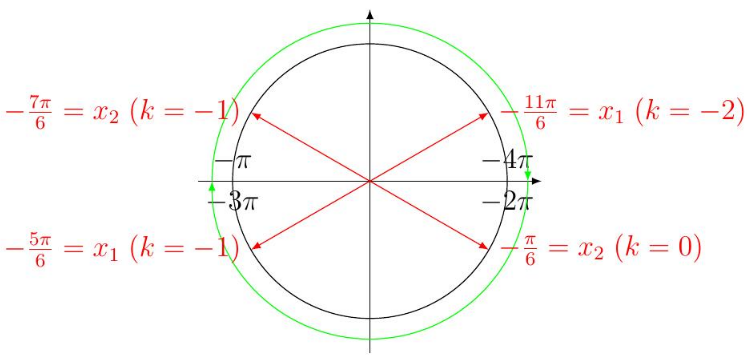
Cette fois, on ne garde que les angles compris dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On procède par visualisation

- La solution $x = \frac{\pi}{6}$ et la solution $x = -\frac{\pi}{6}$ sont dans le bon intervalle ($k = 0$)
- L'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est l'union des quadrants IV et I. Des angles dont les points associés seront dans $II \cup III$ seront à exclure.
- L'ensemble des angles solutions de l'équation donnent 4 points associés sur le cercle. Tous les angles qui génèrent les deux points associés dans le demi-cercle de gauche sont à exclure. Par conséquent, on doit juste s'intéresser aux solutions dans le demi-cercle de droite. Comme on a déjà les deux solutions $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = -\frac{\pi}{6}$ qui sont dans le bon intervalle, tous les autres angles qui envoient sur ces mêmes points seront soit strictement plus petit que $\frac{-\pi}{2}$ soit strictement plus grand que $\frac{\pi}{2}$.

On conclut donc que $S = \left\{\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$. ◇

Exemple 3.9. Résoudre pour $x \in [-4\pi, -3\pi]$: $\cos(2x) = \frac{1}{2}$. Même exemple que le précédent mais cette fois on cherche les x dans un autre intervalle. On voit que cette fois on doit prendre des points dans le quadrant I ou II. Pour s'aider, on représente les points sur un tour de cercle entre -2π et 0. On rappelle les solutions

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ ou } x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Il faut choisir le bon nombre de demi-tours/tours à faire pour être dans le bon intervalle. Ici on peut prendre x_1 avec $k = -4$ et x_2 avec $k = -3$. En effet, $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ et donc en faisant 2 tours dans le sens anti-trigonométrique (i.e -4π) on arrive dans l'intervalle $[-4\pi, -3\pi]$. De même, $\frac{-\pi}{6} \in [-\pi, 0]$. En faisant trois demi-tours dans le sens horaire (i.e -3π), on arrive dans le bon intervalle. Comme on a trouvé deux angles dans $[-4\pi, -3\pi]$ qui génèrent les deux points du demi-supérieur, on les a tous trouvé.

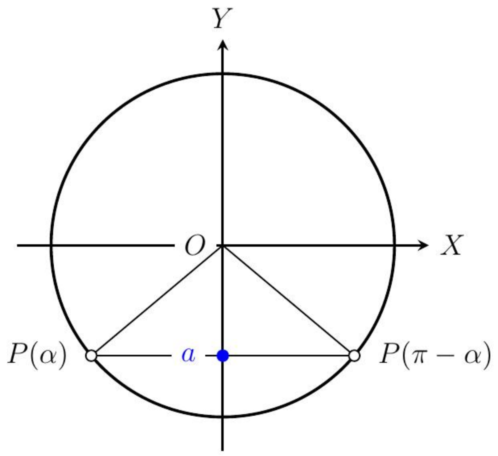
On prend alors comme solution $\frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{23\pi}{6}$ et $\frac{-\pi}{6} - 3\pi = -\frac{19\pi}{6}$, et donc $S = \left\{-\frac{19\pi}{6}, -\frac{23\pi}{6}\right\}$. ◇

3.3.2 L'équation $\sin(x) = a$

1. L'équation possède des solutions si $a \in [-1, 1]$.
2. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. On cherche un angle α tel que $\sin(\alpha) = a$ (par exemple parmi les valeurs remarquables).
4. On doit donc résoudre $\sin(x) = \sin(\alpha)$. Deux sinus sont égaux si les angles sont les mêmes ou sont supplémentaires, le tout à 2π près.

5. Solution :

$$\sin(x) = \sin(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

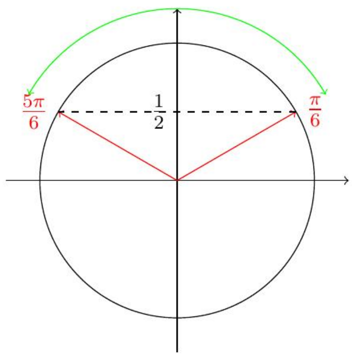


Exemple 3.10. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x) \geqslant \frac{1}{2}$.

On cherche α tel $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$. On peut choisir par exemple $\alpha = \frac{\pi}{6}$. On doit donc résoudre

$$\sin(x) \geqslant \sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

L'erreur serait de dire que $x \geqslant \frac{\pi}{6}$ mais attention, les fonctions trigonométriques ne sont pas monotones. Il est utile de considérer ce qui se passe sur le cercle trigonométrique. On représente dans le cercle des angles supplémentaires pour lequel le sinus vaut $\frac{1}{2}$.



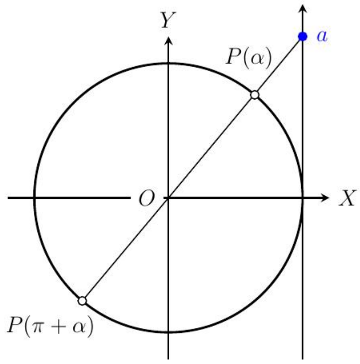
Les points situés sur la partie verte du cercle ont des ordonnées plus grandes que $\frac{1}{2}$, donc les angles associés ont leur sinus plus grand que $\frac{1}{2}$. On doit donc choisir

$$\frac{\pi}{6} + k2\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

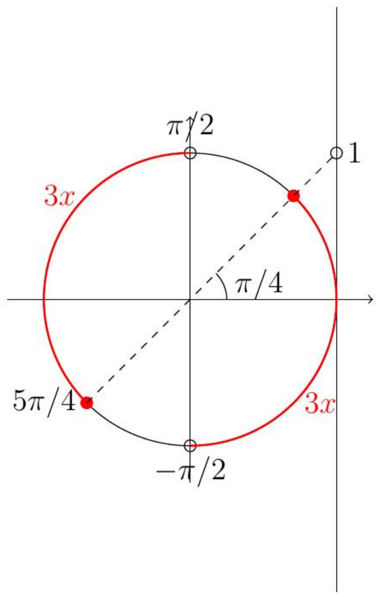
On a donc $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi\right]$. ◇

3.3.3 L'équation $\tan(x) = a$

1. L'équation possède des solutions $\forall a \in \mathbb{R}$.
2. Le domain de définition est $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
3. On cherche un angle α tel que $\tan(\alpha) = a$ (par exemple parmi les valeurs remarquables).
4. On doit donc résoudre $\tan(x) = \tan(\alpha)$. Deux tangentes sont égales si les angles sont les mêmes ou diffèrent d'un demi-tour.
5. Solution :
$$\tan(x) = \tan(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Exemple 3.11. 1. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$: $\tan(3x) \leqslant 1$. Considérons encore une fois le cercle trigonométrique. On pose d'abord $y = 3x$ et on résout $\tan(y) \leqslant 1$.



Les angles associés aux points situés sur les portions rouges auront des tangentes inférieures à 1. On a donc
$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < y \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi.$$
Notez que le $+k\pi$ permet de considérer les deux zones rouges d'un coup (l'une étant la rotation d'un demi-tour de l'autre) ainsi que tous les demi-tours supplémentaires.

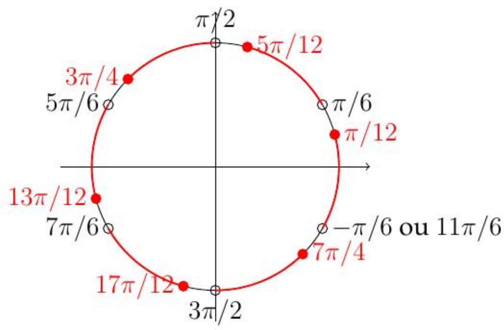
Notez aussi l'inégalité stricte à gauche car $\frac{-\pi}{2} + k\pi$ n'est pas dans le domaine de définition de la tangente.
On a donc finalement

$$-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} < x \leqslant \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$$

et

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}\right] .$$

Représentons certains de ces angles (par exemple pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$) :



2. Résoudre pour $x \in [0, 2\pi]$: $\tan(3x) \leqslant 1$. On prend les solutions obtenues précédemment, et on "filtre" les intervalles pour qu'ils appartiennent tous à $[0, 2\pi]$. On réfléchit géométriquement. On se place en 0 dans le cercle trigonométrique et on tourne jusqu'à 2π. On a donc

$$S = \left[0, \frac{\pi}{12}\right] \cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{12}\right] \cup \left]\frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{12}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right] .$$

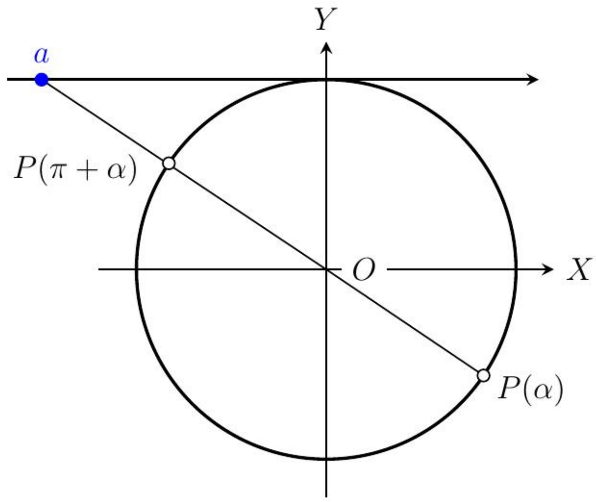
On doit faire attention au fait que l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{12}\right]$ n'est pas entièrement contenu dans $[0, 2\pi]$. Il faut donc "exploser" l'intervalle en prenant chaque partie dans le bon tour du cercle trigonométrique.

◇

3.3.4 L'équation $\operatorname{cotg}(x) = a$

1. L'équation possède des solutions $\forall a \in \mathbb{R}$.
2. Le domain de définition est $D_{\text{cot}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
3. On cherche un angle α tel que $\operatorname{cotg}(\alpha) = a$ (par exemple parmi les valeurs remarquables).
4. On doit donc résoudre $\operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(\alpha)$. Deux cotangentes sont égales si les angles sont les mêmes ou diffèrent d'un demi-tour.
5. Solution :

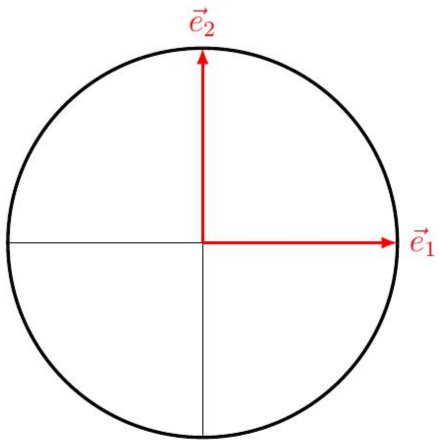
$$\operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



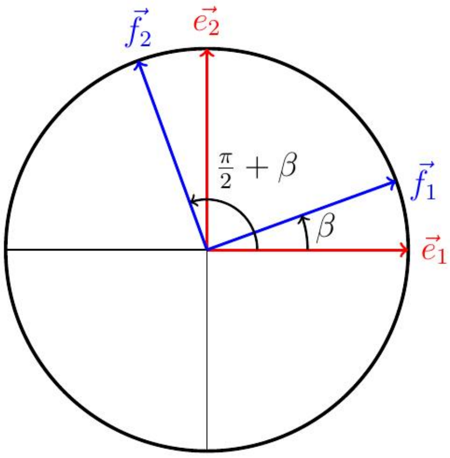
3.4 Formules trigonométriques

3.4.1 Préparation : une rotation dans le plan

Considérons le cercle trigonométrique dans le repère orthonormé canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:



Si on fait tourner le repère d'un angle β, on obtient deux nouveaux vecteurs $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$:



Ces derniers s'écrivent

$$\vec{f_1} = \cos(\beta)\vec{e}_1 + \sin(\beta)\vec{e}_2\,,$$

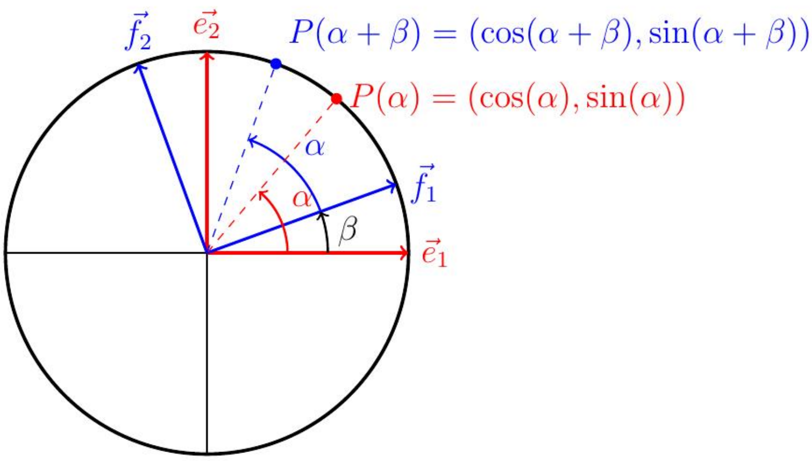
et

$$\vec{f_2} = \cos(\tfrac{\pi}{2} + \beta)\vec{e}_1 + \sin(\tfrac{\pi}{2} + \beta)\vec{e}_2 = -\sin(\beta)\vec{e}_1 + \cos(\beta)\vec{e}_2\,.$$

Prenons maintenant un angle $\alpha \in \mathbb{R}$, et son point associé $P(\alpha)$ sur le cercle. Relativement au repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$,

$$\overrightarrow{OP(\alpha)} = \cos(\alpha)\vec{e}_1 + \sin(\alpha)\vec{e}_2\,.$$

Après une rotation d'angle β, $P(\alpha)$ devient $P(\alpha + \beta)$:



Relativement à $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$,

$$\overrightarrow{OP(\alpha + \beta)} = \cos(\alpha + \beta)\vec{e}_1 + \sin(\alpha + \beta)\vec{e}_2\,.$$

Mais, relativement à $(\vec{f_1}, \vec{f_2})$,

$$\overrightarrow{OP(\alpha + \beta)} = \cos(\alpha)\vec{f_1} + \sin(\alpha)\vec{f_2}\,,$$

et en utilisant les relations données plus haut, exprimant les vecteurs de $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ en fonction de ceux de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, et en réarrangeant, cette dernière devient

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OP(\alpha+\beta)}\\
&= \cos(\alpha)\big(\cos(\beta)\vec{e}_1 + \sin(\beta)\vec{e}_2\big) + \sin(\alpha)\big(-\sin(\beta)\vec{e}_1 + \cos(\beta)\vec{e}_2\big)\\
&= \big(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\big)\vec{e}_1 + \big(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\big)\vec{e}_2.
\end{aligned}$$

Comme les composantes de $\overrightarrow{OP(\alpha+\beta)}$ relativement au repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sont uniques, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)
\end{aligned}$$

3.4.2 Conséquence : formules d'addition

L'argument algébrique/géométrique de la section précédente nous a amené aux **formules d'addition** :

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\,.
\end{aligned}$$

Celles-ci impliquent aussi une formule d'addition pour la tangente, puisque

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}\\
&= \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)}\\
&= \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}\,.
\end{aligned}$$

(Dans la troisième ligne on a divisé numérateur et dénominateur par $\cos(x)\cos(y)$.)

En remplaçant y par $-y$ dans les formules d'addition et en utilisant les propriétés de parité, on obtient aussi

$$\begin{aligned}
\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)\\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)\\
\tan(x-y) &= \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}
\end{aligned}$$

D'autres expressions utiles se déduisent des formules d'addition.

- **Formules pour le double d'un angle ou Formules de duplication**. En prenant $x = y$ dans les formules d'addition, on a d'une part que

  $$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)\,,$$

  et d'autre part que

  $$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$$

- **Formules de bissection**. En remplaçant x par $x/2$ dans les formules du double d'un angle :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{2}$$
$$\cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos(x)}{2}$$
$$\tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

- **Formules de transformation produit-somme**.

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$
$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\tfrac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$$
$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \tfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$

  (On démontre ces formules en partant du terme de droite, auquel on applique les formules du haut.)

- **Formules de transformation somme-produit**. En remplaçant x par $\frac{x+y}{2}$ et y par $\frac{x-y}{2}$ dans les formules de produit-somme,

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2})$$
$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

  et

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2})$$
$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

- **Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de** $\tan(\frac{x}{2})$. À partir des formules de bissections et de double d'un arc,

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$$
$$\cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$$
$$\tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

3.4.3 Application : dérivées des fonctions trigonométriques

A l'aide des formules de transformation somme-produit, on peut obtenir les expressions des dérivées des fonctions trigonométriques :

$$(\sin(x))' = \cos(x),$$
$$(\cos(x))' = -\sin(x),$$
$$(\tan(x))' = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\,.$$

En effet,

$$\begin{aligned}(\sin(x))' &= \lim_{y\to x}\frac{\sin(y)-\sin(x)}{y-x}\\ &= \lim_{y\to x}\frac{2\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}{y-x}\\ &= \left(\lim_{y\to x}\cos\left(\tfrac{y+x}{2}\right)\right)\left(\lim_{y\to x}\frac{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}{\frac{y-x}{2}}\right) = \cos(x)\cdot 1 = \cos(x)\,.\end{aligned}$$

On en déduit, par la formule de la dérivation d'une composée, que

$$(\cos(x))' = \left(\sin(\tfrac{\pi}{2}-x)\right)' = \cos(\tfrac{\pi}{2}-x)\cdot(-1) = -\sin(x)\,,$$

et par la formule de dérivation d'un quotient,

$$\begin{aligned}(\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'\\ &= \frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}\\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)\,.\end{aligned}$$

De même on peut calculer que

$$(\operatorname{cotg}(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1-\operatorname{cotg}^2(x)\,.$$

3.4.4 Application : calcul de valeurs remarquables supplémentaires

Exemple 3.12. 1. Calculons $\cos(\frac{\pi}{12})$. Par la formule de bissection,

$$\cos^2\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos(\pi/6)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}/2}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\,,$$

ce qui implique que $\cos(\frac{\pi}{12})$ est soit $+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, soit $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Comme $\frac{\pi}{12}$ se situe dans le premier quadrant, son cosinus est positif et donc

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

2. Calculons $\sin(-\frac{\pi}{12})$. Par la formule de bissection,

$$\sin^2\left(-\tfrac{\pi}{12}\right) = \frac{1-\cos(-\pi/6)}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}\,.$$

Comme $-\frac{\pi}{6}$ se situe dans le quatrième quadrant son sinus est négatif et donc

$$\sin\left(-\tfrac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

◇

De manière générale, on peut calculer à présent les cosinus et sinus de tout angle de la forme $\frac{\alpha}{2^n}, n\in\mathbb{N}$ pour α une valeur remarquable dans le premier quadrant. On pourra obtenir les cosinus et sinus de ces angles dans les autres quadrants en utilisant les propriétés des cosinus et sinus (symétriques par rapport aux axes et par rapport à l'origine).

3.4.5 Application : factorisation en équations/inéquations plus simples

Exemple 3.13. Résolvons l'équation

$$\sin(5x) - \sin(x) = \cos(3x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

En utilisant une des formules de transformation somme-produit, on peut écrire

$$\sin(5x) - \sin(x) = 2\cos\left(\tfrac{6x}{2}\right)\sin\left(\tfrac{4x}{2}\right) = 2\cos(3x)\sin(2x)\,,$$

et donc l'équation peut s'écrire sous la forme

$$2\cos(3x)\sin(2x) = \cos(3x)\,,$$

c'est-à-dire

$$\cos(3x)\,(2\sin(2x) - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(3x) = 0 \text{ ou } \sin(2x) = \frac{1}{2}\,.$$

Or on a d'une part que

$$\cos(3x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in S_1 = \left\{\tfrac{\pi}{6} + k\tfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}\,,$$

et d'autre part que

$$\sin(2x) = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in S_2 = \left\{\tfrac{\pi}{12} + k\pi, \tfrac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Finalement, on a donc comme ensemble solution :

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{\tfrac{\pi}{6} + k\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{12} + k\pi, \tfrac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\,.$$

◇

3.4.6 Equations et inéquations trigonométriques linéaires

Exemple 3.14. Résolvons l'équation

$$\tfrac{1}{2}\cos(x) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

L'idée est d'utiliser une formule trigonométrique pour récrire le membre de gauche. Or si on remarque que $\frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{6})$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{\pi}{6})$, on peut récrire l'équation comme

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\cos(x) + \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Par la formule d'addition pour $\sin(x+y)$, le membre de gauche est simplement

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\cos(x) + \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\sin(x) = \sin\left(\tfrac{\pi}{6} + x\right)\,.$$

Notre équation se réduit donc à

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{6} + x\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\,,$$

dont les solutions sont

$$\tfrac{\pi}{6} + x = \tfrac{\pi}{4} + k2\pi \quad \text{ou} \quad \tfrac{\pi}{6} + x = \tfrac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Donc

$$S = \left\{\tfrac{\pi}{12} + k2\pi, \tfrac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

◇

Remarque 3.15. Dans ce dernier exemple, on aurait aussi pu décider d'écrire $\frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3})$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\frac{\pi}{3})$, pour avoir

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cos(x) + \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\sin(x) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

qui par la formule pour $\cos(x-y)$ devient

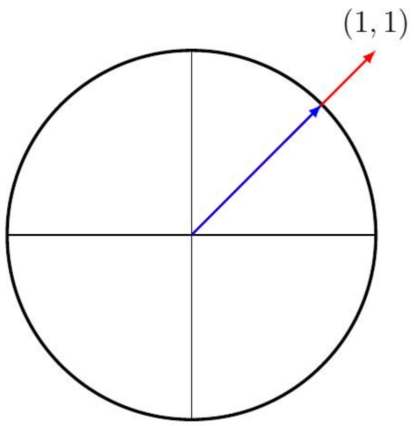
$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\,,$$

qui a le même ensemble solution S. ◇

Exemple 3.16. Résolvons l'inéquation

$$\cos(x) + \sin(x) > 1, \qquad x \in]-4\pi, -\pi[\,.$$

On commence par résoudre le problème sans contrainte (pour $x \in \mathbb{R}$). La stratégie est la même que précédemment. Idéalement, on aimerait un angle α tel que $\sin(\alpha) = \cos(\alpha) = 1$ afin d'écrire le membre de droite comme une seule fonction trigonométrique. On observe cependant qu'un tel angle n'existe pas car le point $(1,1)$ n'appartient pas au cercle trigonométrique.



En considérant le vecteur reliant l'origine à $(1,1)$ et en divisant par sa norme qui vaut $\sqrt{2}$, on obtient un nouveau vecteur de norme 1 dont l'extrémité est le point $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ se trouve sur le cercle trigonométrique et dont les coordonnées peuvent être exprimées comme le cosinus et le sinus d'un angle. On a donc fait une *normalisation*.

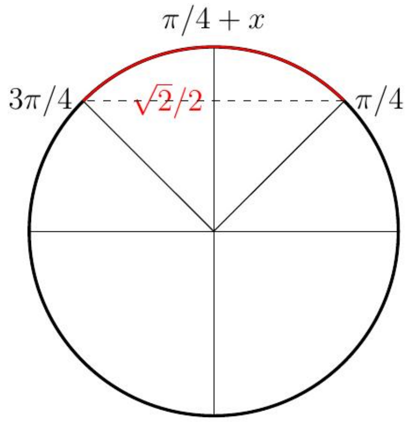
En divisant chaque côté de l'inéquation par $\sqrt{2}$, elle devient

$$\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) > \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

qui puisque $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$ se simplifie encore en

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{4} + x\right) > \sin(\pi/4)\,.$$

On visualise dans le cercle trigonométrique,



pour trouver

$$\tfrac{\pi}{4} + k2\pi < \tfrac{\pi}{4} + x < \tfrac{3\pi}{4} + k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

et donc l'ensemble solution sans contrainte est

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k2\pi, \tfrac{\pi}{2} + k2\pi\right[\,.$$

Finalement, on ne garde que les $x \in E$ qui satisfont la contrainte $x \in]-4\pi, -\pi[$, pour obtenir

$$S = \left]-4\pi, -\tfrac{7\pi}{2}\right[\cup \left]-2\pi, -\tfrac{3\pi}{2}\right[.$$

◇

Dans un cadre plus général, la méthode utilisée dans l'exemple précédent suggère que pour résoudre une équation de la forme

$$a\cos(x) + b\sin(x) = c\,,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, on pourra procéder comme suit :

1. On normalise l'équation en divisant par $\sqrt{a^2+b^2}$ (la norme de $\overrightarrow{OP}$, avec $P = (a, b)$) :
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$
2. Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1, 1]$, on peut résoudre le problème (il faut que ce nombre soit le sinus ou le cosinus d'un angle, un critère simple est de vérifier si $a^2 + b^2 \leqslant c^2 \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1$).
3. On choisit un α tel que (par exemple) $\sin(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
4. On utilise la formule
$$\sin(\alpha)\cos(x) + \cos(\alpha)\sin(x) = \sin(\alpha + x).$$
5. On cherche β tel que (ici on choisit le sinus) $\sin(\beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$
6. Finalement on résout
$$\sin(\alpha + x) = \sin(\beta).$$

La démarche est la même pour une inéquation.

3.5 Fonctions trigonométriques réciproques

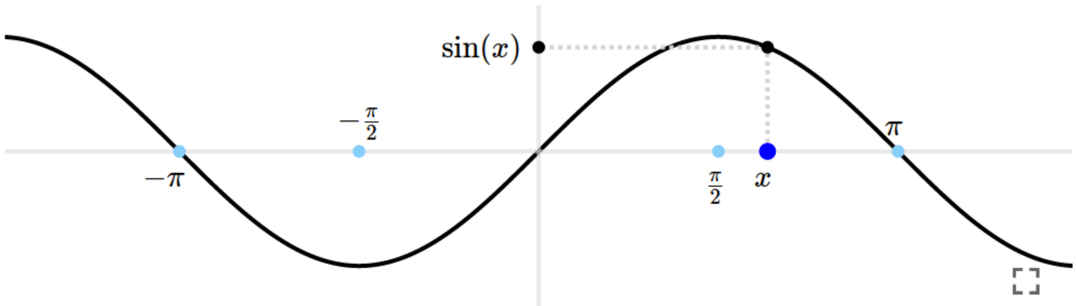
On définit ici les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques, on énonce certaines de leurs propriétés, en particulier on calcule leurs dérivées.

3.5.1 Fonction réciproque du sinus

La fonction sinus, vue comme définie sur tout $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin(x)\,, \end{aligned}$$

est surjective mais pas injective, puisque par exemple des angles supplémentaires ont le même sinus.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

On peut par contre la rendre injective en restreignant son domaine.

En effet, si on se restreint à prendre des angles qui sont dans $IV \cup I$ ou $II \cup III$ (demi-cercle de gauche ou de droite), c'est à dire dans un intervalle du type $\left[\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, alors la fonction

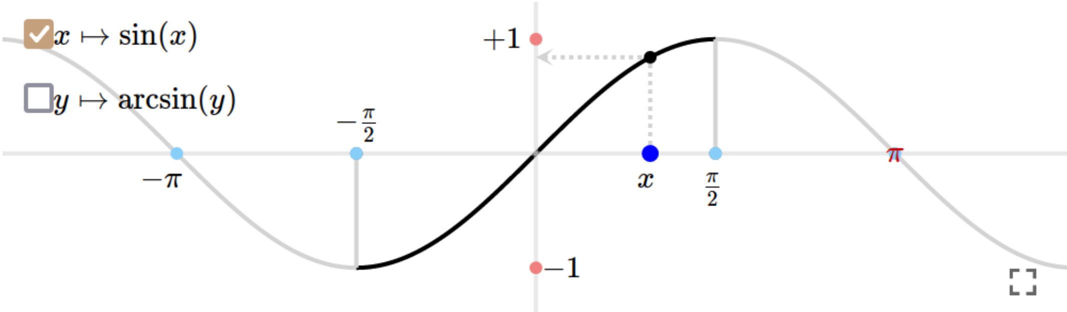
$$\begin{aligned} \sin : \left[-\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \tfrac{\pi}{2} + k\pi\right] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

est

1. injective puisque des angles distincts dans son domaine ont des images distinctes,
2. surjective puisque pour tout $y \in [-1,1]$ il existe un $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ tel que $\sin(x) = y$.

Définition 3.17.
1. Un intervalle du type $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ s'appelle une **détermination du sinus**. Le sinus y est à la fois injectif et surjectif dans $[-1,1]$, et donc bijectif.
2. L'intervalle pour $k = 0$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, s'appelle la **détermination principale du sinus**.

Une détermination est donc un intervalle sur lequel la fonction $\sin$ possède une *réciproque*. La convention est de choisir la détermination *principale* pour définir une fois pour toute une réciproque :



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

Définition 3.18. On définit l'**arc sinus** comme la réciproque de

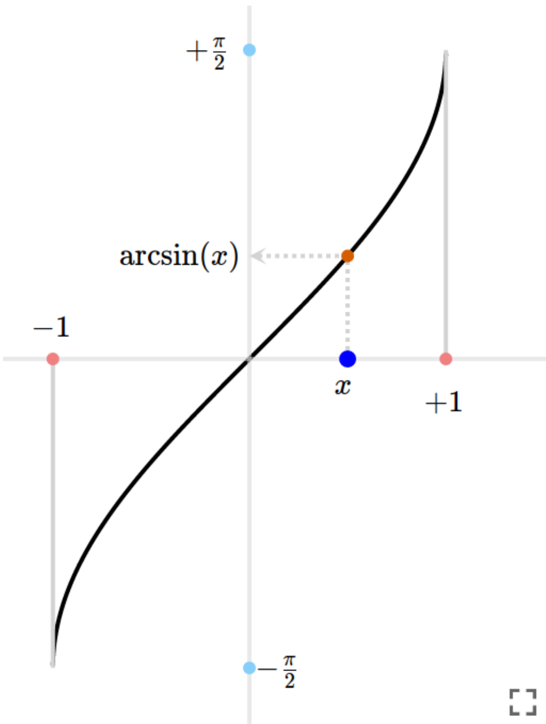
$$\begin{aligned} \sin : \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto y = \sin(x)\,. \end{aligned}$$

On la note

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\to \left[\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \\ y &\mapsto x = \arcsin(y)\,, \end{aligned}$$

où x est l'unique $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(y) = x$.

Comme on sait, le graphe d'une fonction réciproque s'obtient en réfléchissant celui de la fonction à travers la diagonale $y = x$:



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

Par définition,

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin(x)) &= x \qquad \forall x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right], \\ \sin(\arcsin(y)) &= y \qquad \forall y \in [-1, 1]\,. \end{aligned}$$

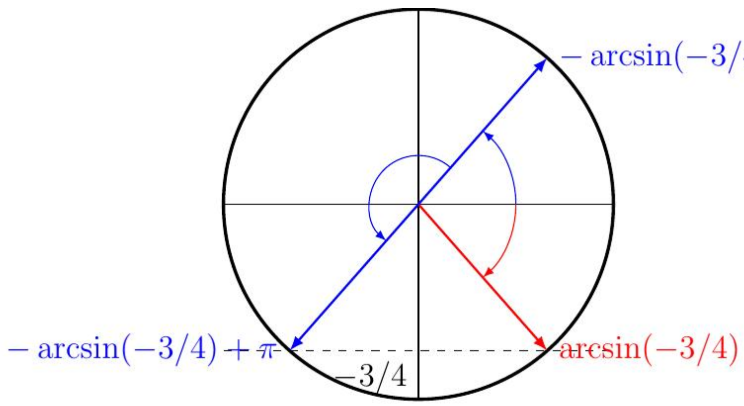
Exemples 3.19.
1. $\sin(\arcsin(\frac{2}{3})) = \frac{2}{3}$
2. $\arcsin(\sin(-\frac{\pi}{7})) = -\frac{\pi}{7}$
3. $\arcsin(\sin(\frac{7\pi}{6})) = ?$ Puisque $\frac{7\pi}{6} \notin \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on doit d'abord trouver l'unique $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que
$$\sin\left(\tfrac{7\pi}{6}\right) = \sin(x)\,.$$
Cet angle est $x = -\frac{\pi}{6}$. Donc
$$\arcsin\left(\sin\left(\tfrac{7\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\right) = -\tfrac{\pi}{6}$$

◇

Avoir une réciproque bien définie pour le sinus permet maintenant de résoudre plus d'équations.

Pour tout $a \in [-1, 1]$, on a
$$\sin(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} \arcsin(a) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\,, \\ \text{ou} \\ \pi - \arcsin(a) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Exemple 3.20. Résolvons
$$\sin(x) = -\tfrac{3}{4}\,, \qquad x \in [\pi, 2\pi]$$

1. On résout d'abord sur $\mathbb{R}$ (sans contrainte). Puisque $-\frac{2}{3} \in [-1, 1]$, on sait que l'angle $\alpha = \arcsin(-\frac{3}{4})$ permet de récrire l'équation :
$$\sin(x) = \sin(\alpha)$$
On a donc comme solutions
$$x_1 = \arcsin\left(-\tfrac{3}{4}\right) + k2\pi \quad \text{ou} \quad x_2 = \pi - \arcsin\left(-\tfrac{3}{4}\right) + k2\pi\,.$$
Plaçons ces solutions sur le cercle trigonométrique.


2. L'arcsinus d'un nombre négatif est négatif, donc $\arcsin(-\frac{3}{4}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Pour sélectionner la solution x_1 qui appartient à $[\pi, 2\pi]$, on doit donc prendre $k = 1$, à savoir
$$x_1 = \arcsin\left(-\tfrac{3}{4}\right) + 2\pi\,.$$
Aussi, puisque $\pi - \arcsin(-\frac{3}{4}) \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \subset [\pi, 2\pi]$, on peut doit prendre la solution x_2 avec $k = 0$.

En résumé, les solutions de l'équation avec contrainte sont :

$$S = \left\{\arcsin\left(-\tfrac{3}{4}\right) + 2\pi, \pi - \arcsin\left(-\tfrac{3}{4}\right)\right\} .$$

$\diamond$

Lemme

1. Sur $[-1,1]$, $\arcsin(x)$ est une fonction impaire.
2. Pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

Démonstration.

1. Si $x \in [-1,1]$, alors $-x \in [-1,1]$, et donc

$$\sin(\arcsin(-x)) = -x = -\sin(\arcsin(x)) = \sin(-\arcsin(x)).$$

Dans la dernière égalité on a utilisé le fait que le sinus est impair. Or sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x)$ est injective, et donc

$$\sin(\arcsin(-x)) = \sin(-\arcsin(x)) \quad \Rightarrow \quad \arcsin(-x) = -\arcsin(x) .$$

2. Par la relation $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, on a que

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$$

Or $\arcsin(x)$ est un angle dans le quadrant I ou IV, et donc son cosinus est positif, ce qui implique

$$\cos(\arcsin(x)) = +\sqrt{1-x^2} .$$

$\square$

Lemme L'arc sinus est dérivable sur $]-1,1[$, et $\forall x \in]-1,1[$,

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démonstration. On ne montrera pas que $\arcsin(x)$ est dérivable. Mais pour savoir ce qu'est sa dérivée, on peut partir de

$$\sin(\arcsin(x)) = x \qquad \forall x \in]-1,1[,$$

et dériver des deux côtés de l'équation, et utiliser la règle de dérivation pour une fonction réciproque,

$$\cos(\arcsin(x)) \cdot (\arcsin(x))' = 1 ,$$

qui donne

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\square$

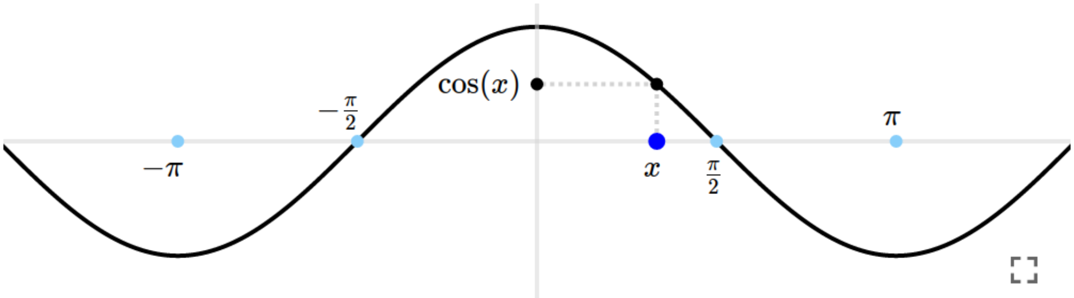
Ce qui vient d'être fait pour le sinus peut être adapté pour les autres fonctions trigonométriques.

3.5.2 Fonction réciproque du cosinus

Vue comme définie sur tout $\mathbb{R}$,

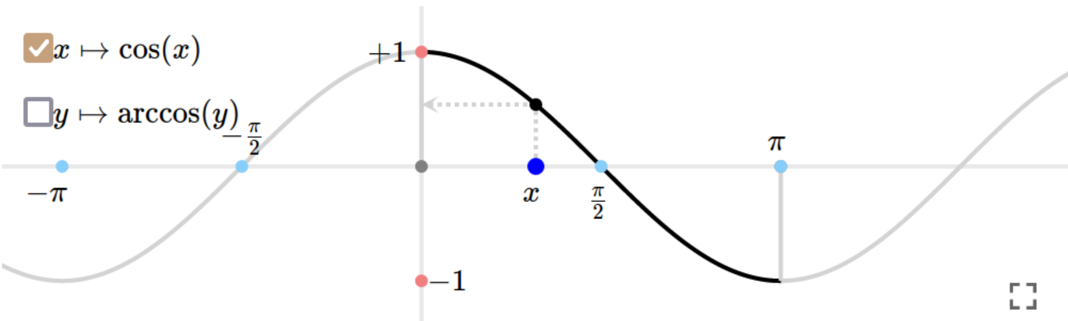
$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \cos(x)\,, \end{aligned}$$

est surjective mais pas injective, puisque par exemple des angles opposés ont le même cosinus.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

Définition 3.21.
1. Un intervalle du type $[k\pi,(k+1)\pi]$ pour $k \in \mathbb{Z}$ s'appelle une **détermination du cosinus**. Les cosinus y est à la fois injectif et surjectif dans $[-1,1]$, et donc bijectif.
2. L'intervalle pour $k = 0$, $[0,\pi]$, s'appelle la **détermination principale du cosinus**.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

Définition 3.22. On définit l'**arc cosinus** comme la réciproque de

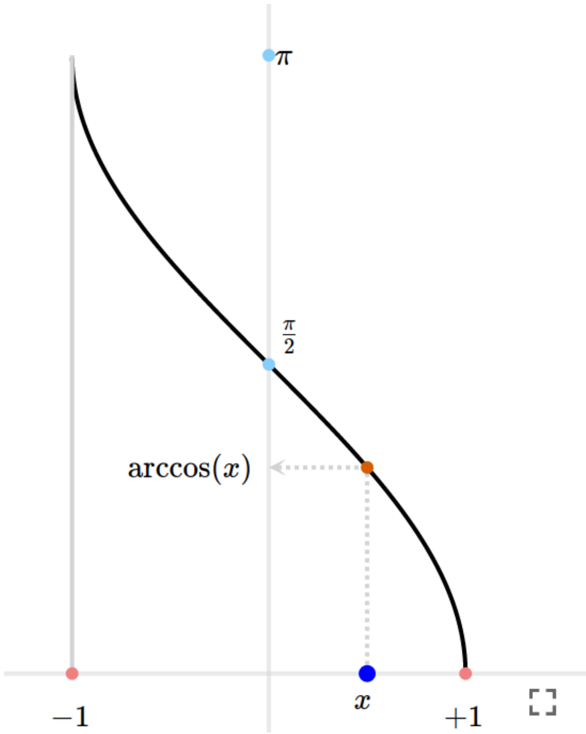
$$\begin{aligned} \cos : [0,\pi] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto y = \cos(x)\,. \end{aligned}$$

On la note

$$\begin{aligned} \arccos : [-1,1] &\to [0,\pi] \\ y &\mapsto x = \arccos(y)\,, \end{aligned}$$

où x est l'unique élément de $[0,\pi]$ tel que $\cos(x) = y$.

Son graphe :



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

Par définition,

$$\begin{aligned}\arccos(\cos(x)) &= x \qquad \forall x \in [0, \pi]\,,\\ \cos(\arccos(y)) &= y \qquad \forall y \in [-1, 1]\,.\end{aligned}$$

Pour tout $a \in [-1, 1]$, on a

$$\cos(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} \arccos(a) + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ -\arccos(a) + k2\pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Exemple 3.23. Résolvons

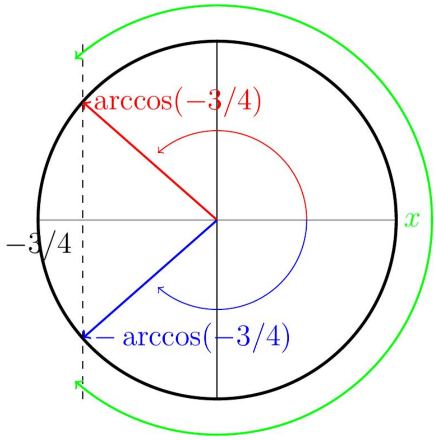
$$\cos(x) \geqslant -\tfrac{3}{4}\,, \qquad x \in \left[\tfrac{-3\pi}{2}, \tfrac{-\pi}{2}\right]$$

1. Commençons par étudier le problème sans contrainte, $x \in \mathbb{R}$. En posant $\alpha = \arccos(-\frac{3}{4})$, l'inéquation devient

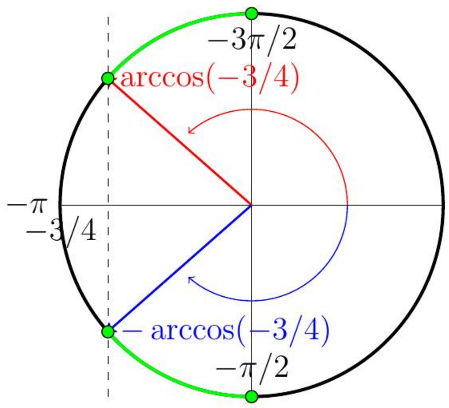
$$\cos(x) \geqslant \cos(\alpha)\,,$$

donc les solutions sont

$$-\arccos(-\tfrac{3}{4}) + k2\pi \leqslant x \leqslant \arccos(-\tfrac{3}{4}) + k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$



2. On doit maintenant choisir les solutions dans l'intervalle $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$. Sur le cercle cela laisse les zones dans les quadrants II et III :



$-\arccos(-3/4) \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \subset \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$, donc l'angle est bien placé. $\arccos(-3/4) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, il faut donc faire un tour du cercle dans le sens anti-trigonométrique pour l'amener dans $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right] \subset \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$. On garde donc les intervalles

$$S = \left[-\tfrac{3\pi}{2}, \arccos(-\tfrac{3}{4}) - 2\pi\right] \cup \left[-\arccos(-\tfrac{3}{4}), -\tfrac{\pi}{2}\right] .$$

◇

Lemme

1. Pour tout $x \in [-1,1]$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.
2. Pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

Démonstration. 1. En effet, si $x \in [-1,1]$, alors $-x \in [-1,1]$, et donc

$$\cos(\arccos(-x)) = -x = -\cos(\arccos(x)) = \cos(\pi - \arccos(x)).$$

Or sur $[0,\pi]$, le cosinus est injectif et donc

$$\cos(\arccos(-x)) = \cos(\pi - \arccos(x)) \quad \Rightarrow \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos(x) .$$

2. Par la relation $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$,

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2 .$$

Or $\arccos(x)$ est un angle dans le quadrant I ou II, et donc son sinus est positif, ce qui implique

$$\sin(\arccos(x)) = +\sqrt{1-x^2}\,.$$

□

Lemme L'arc cosinus est dérivable sur $]-1,1[$, et $\forall x \in]-1,1[$,

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Démonstration. On ne montrera pas que $\arccos(x)$ est dérivable. Mais pour savoir ce qu'est sa dérivée, on peut partir de

$$\cos(\arccos(x)) = x \qquad \forall x \in]-1,1[\,,$$

et dériver des deux côtés de l'équation, et utiliser la règle de dérivation pour une fonction réciproque,

$$-\sin(\arccos(x)) \cdot (\arccos(x))' = 1\,,$$

qui donne

$$(\arcsin(x))' = \frac{-1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

□

Exemple 3.24. Pour $x \in [-1,1]$, donner la valeur de $\alpha = \arcsin(x) + \arccos(x)$.

Pour commencer, on remarque que

- $\arcsin(x) \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et
- $\arccos(x) \in [0,\pi]$.

Par conséquent, $\alpha = \arcsin(x) + \arccos(x) \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

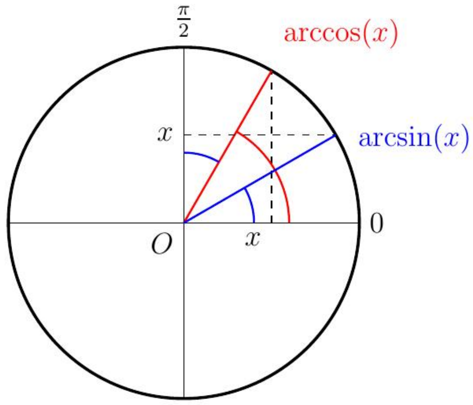
Calculons $\sin(\alpha)$. Les formules d'addition donnent

$$\begin{aligned}
&\sin(\arcsin(x) + \arccos(x)) \\
&\qquad = \sin(\arcsin(x))\cos(\arccos(x)) + \cos(\arcsin(x))\sin(\arccos(x)) \\
&\qquad = x^2 + \sqrt{1-x^2}^{\,2} \\
&\qquad = 1\,.
\end{aligned}$$

On cherche donc un angle $\alpha \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\alpha) = 1$. Le seul angle avec cette propriété est $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent,

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \tfrac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1,+1]\,.$$

En d'autres termes : $\arccos(x)$ et $\arcsin(x)$ sont donc des angles complémentaires, ce qui est évident d'un point de vue géométrique :



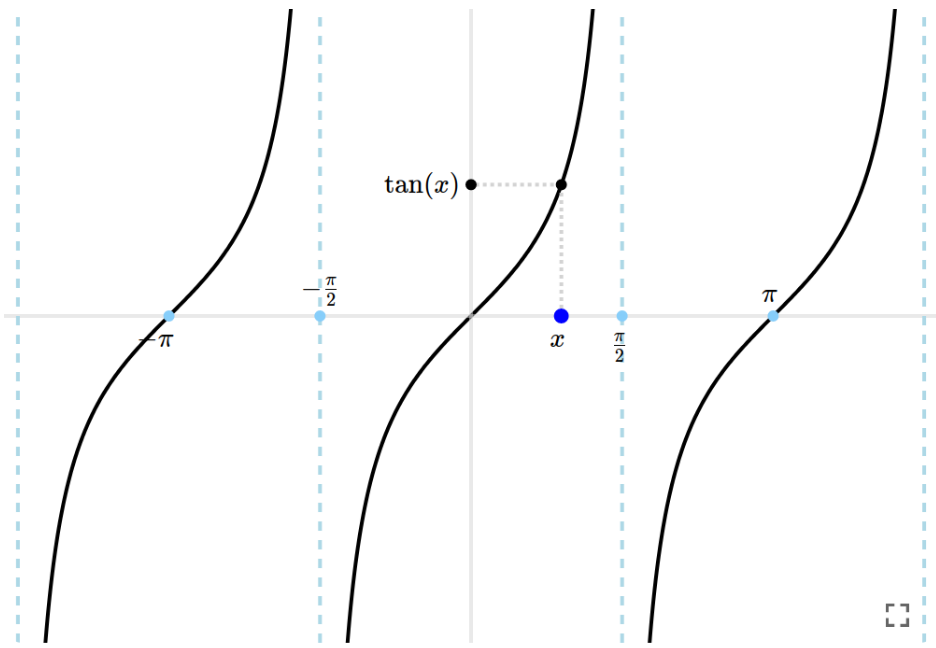
◇

3.5.3 Fonction réciproque de la tangente

La fonction tangente, sur tout son domaine

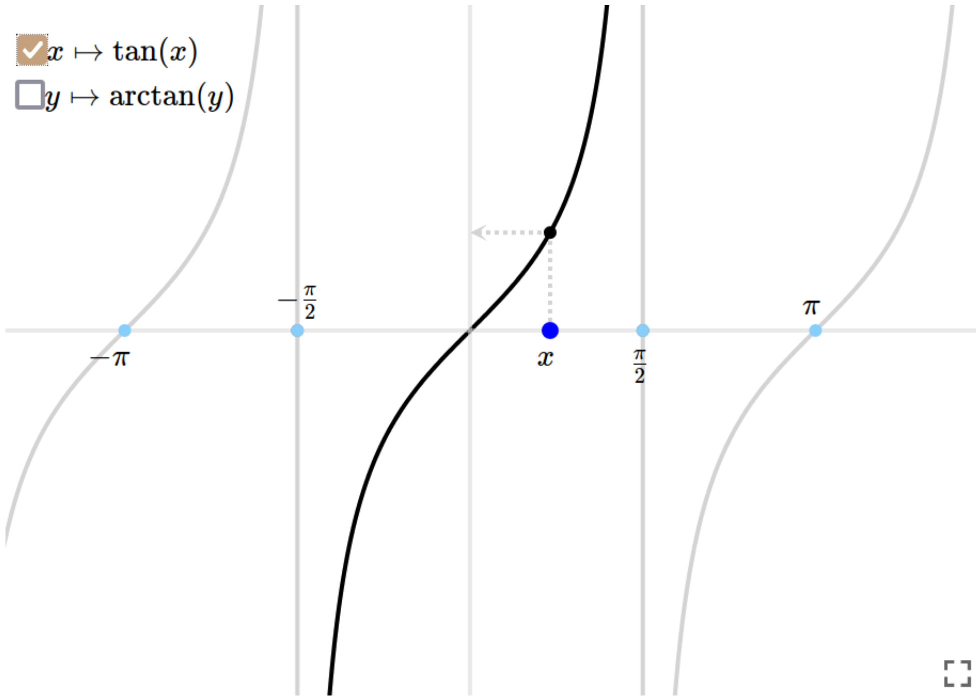
$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \,, k \in \mathbb{Z}\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x)\,, \end{aligned}$$

est surjective mais pas injective puisque périodique.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

Définition 3.25.
1. Un intervalle du type $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ pour $k \in \mathbb{Z}$ est une **détermination de la tangente**. La tangente y est à la fois injective et surjective, et donc bijective.
2. L'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ s'appelle la **détermination principale de la tangente**.

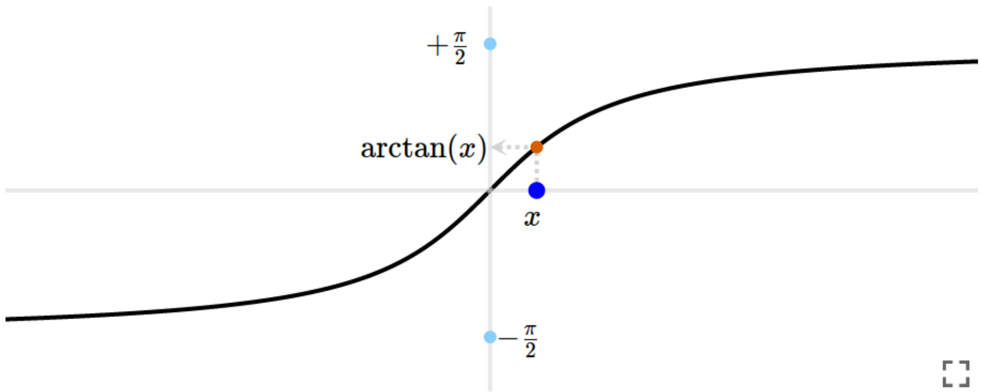


Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

Définition 3.26. On définit l'**arc tangente** comme

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\to]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\\ y &\mapsto x = \arctan(y)\,, \end{aligned}$$

où x est l'unique angle $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(x) = y$.



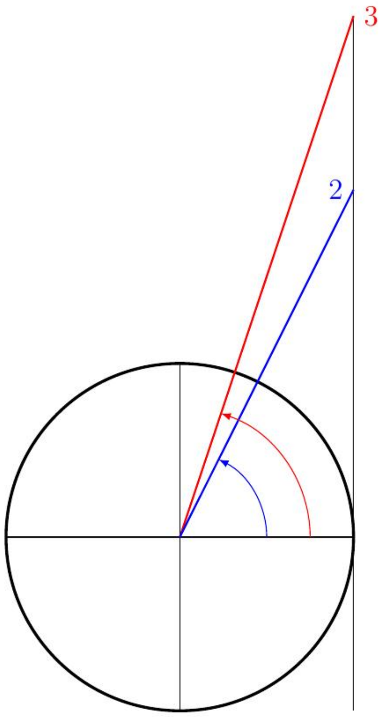
Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

Par définition,

$$\begin{aligned} \arctan(\tan(x)) &= x \qquad \forall x \in]\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\,, \\ \tan(\arctan(x)) &= x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Exemple 3.27. Calculer l'angle $s = \arctan(2) + \arctan(3)$.

1. On localise s. Comme $2, 3 > 0$, on a $\arctan(2), \arctan(3) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc $s \in]0, \pi[$.



2. On calcule $\tan(s)$ à l'aide de la formule d'addition

$$\tan(s) = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1.$$

On cherche donc les solutions de l'équation

$$\tan(s) = -1\,, \qquad s \in]0,\pi[$$

dont l'unique solution est $\frac{3\pi}{4}$. On a donc

$$\arctan(2) + \arctan(3) = \frac{3\pi}{4}.$$

◇

Listons encore quelques propriétés.

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\tan(x) = a \Leftrightarrow x = \arctan(a) + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration. En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\tan(\arctan(x)) = x$. En dérivant des deux côtés de l'équation,

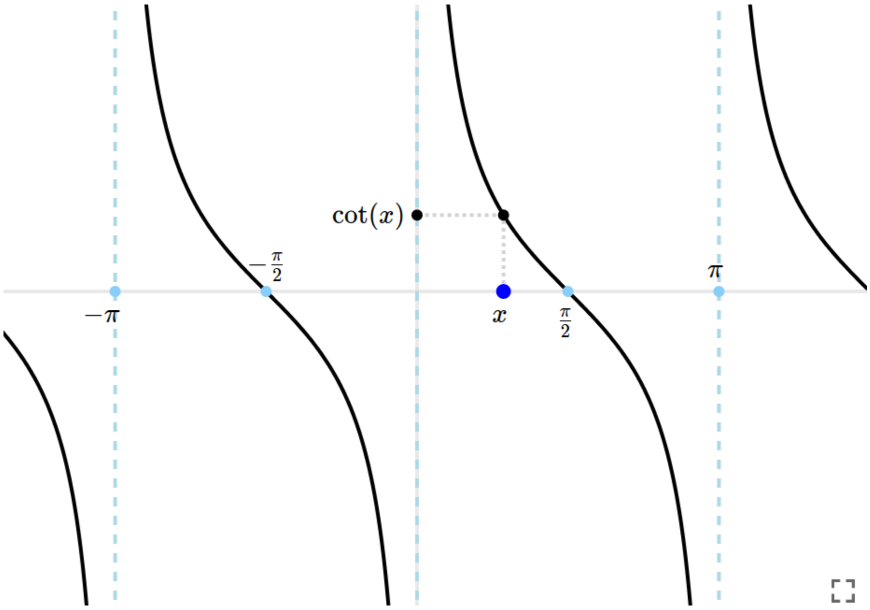
$$(1+\tan^2(\arctan(x)))\cdot(\arctan(x))' = 1 \Leftrightarrow (1+x^2)(\arctan(x))' = 1.$$

□

3.5.4 Fonction réciproque de la cotangente

Pareil pour la cotangente,

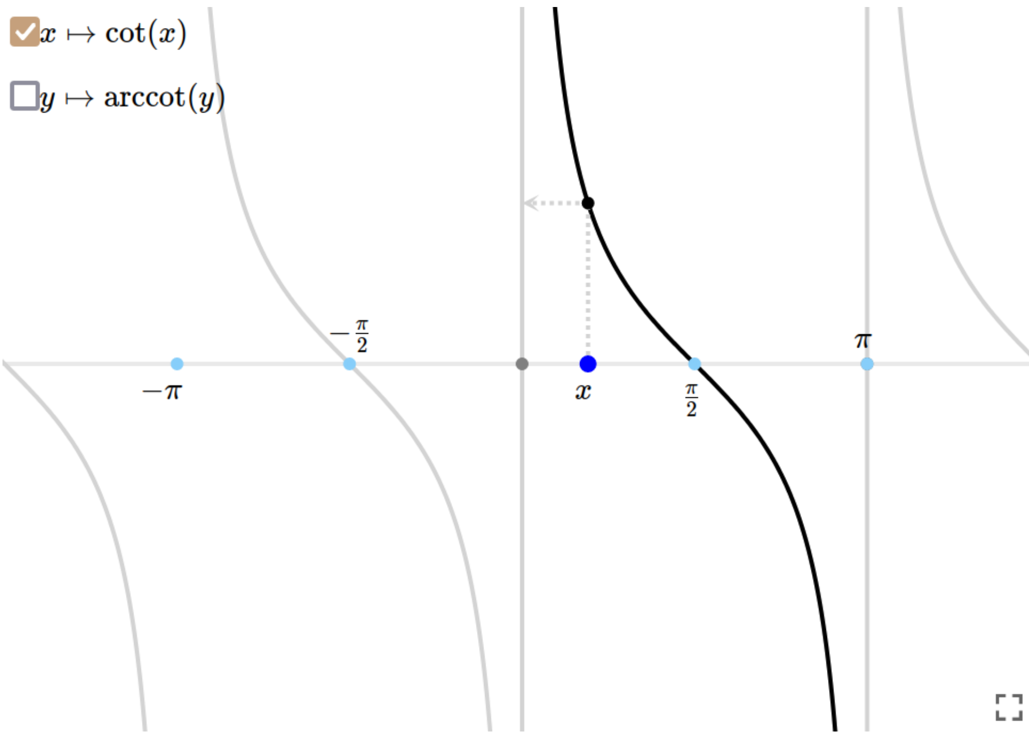
$$\begin{aligned}\mathrm{cotg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathrm{cotg}(x)\,.\end{aligned}$$



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

Définition 3.28.

1. Un intervalle du type $]k\pi, (k+1)\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$ s'appelle une **détermination de la cotangente**. La cotangente y est à la fois injective et surjective, donc bijective.
2. L'intervalle pour $k = 0$, $]0, \pi[$, s'appelle la **détermination principale de la cotangente**.

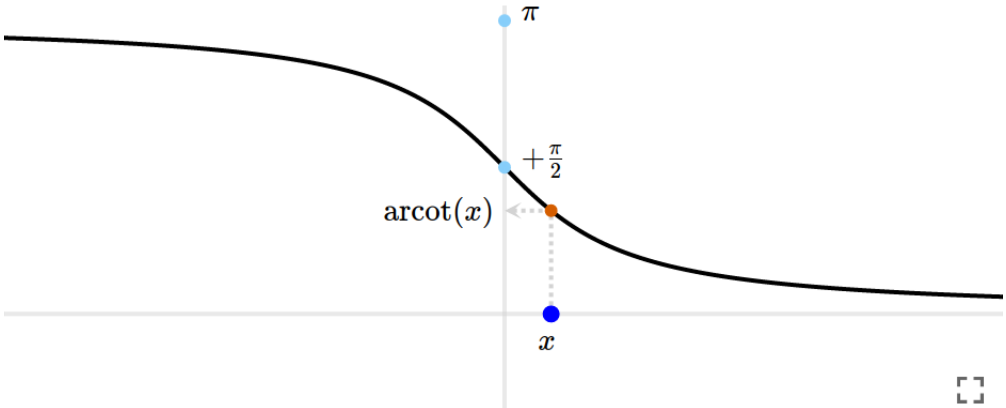


Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

Définition 3.29. On définit l'**arc cotangente** comme

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot} : \mathbb{R} &\to]0, \pi[\\ y &\mapsto x = \operatorname{arccot}(y)\,, \end{aligned}$$

où x est l'unique $x \in]0, \pi[$ tel que $\operatorname{cotg}(x) = y$.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

Par définition,

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot}(\operatorname{cotg}(x)) &= x \qquad \forall x \in]0, \pi[\,, \\ \operatorname{cotg}(\operatorname{arccot}(x)) &= x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Listons encore quelques propriétés.

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{cotg}(x) = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot}(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\operatorname{arccot}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Exemple 3.30. A partir du graphe de $\arctan(x)$, déduire le graphe de $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. On pose

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$. On calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Par conséquent, f est une constante sur chaque intervalle continu de son domaine de définition (c'est une conséquence du théorème des accroissements finis). Donc on a

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} c_1, x < 0 \\ c_2, x > 0. \end{cases}$$

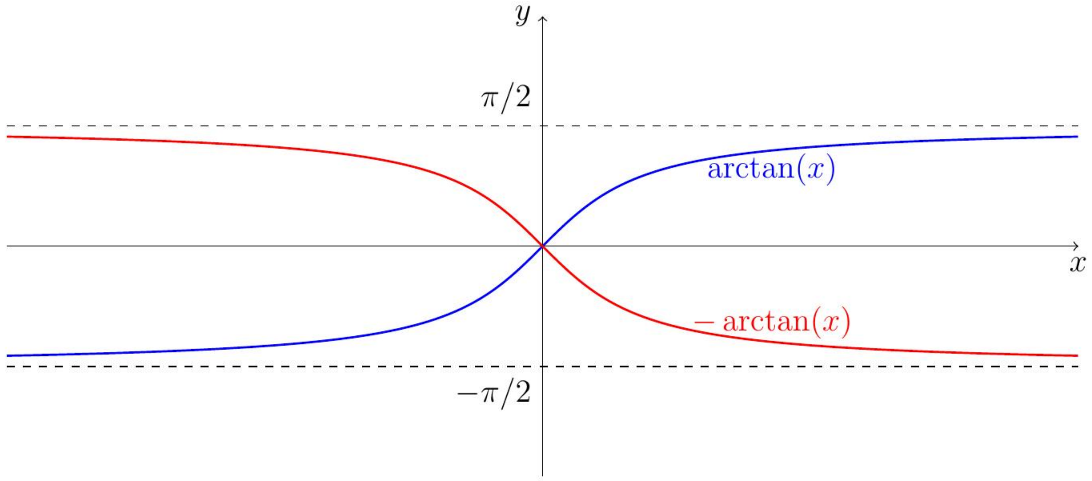
Pour déterminer c_1 et c_2 on évalue la fonction. On a

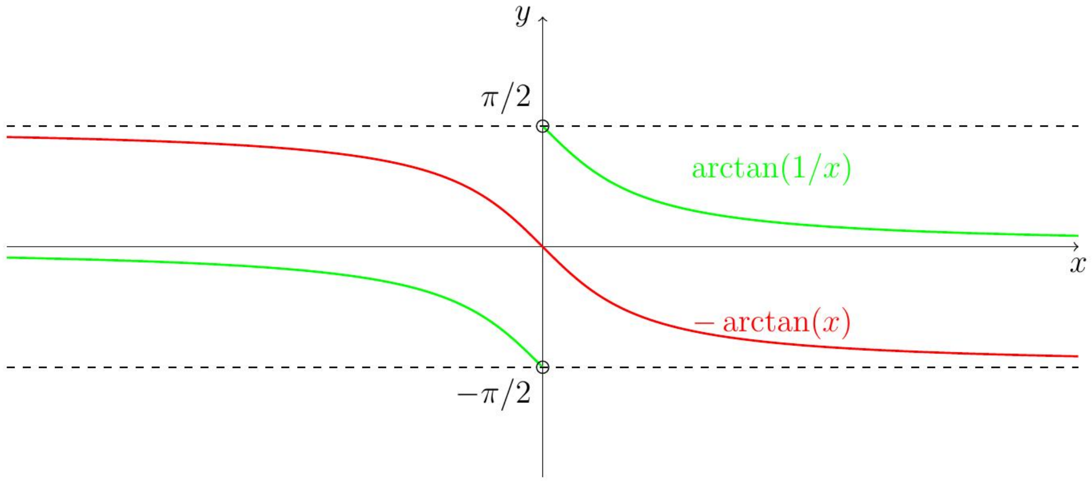
$$f(-1) = \frac{-\pi}{4} + \frac{-\pi}{4} = -\frac{\pi}{2},$$
$$f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent, on a $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $c_2 = \frac{\pi}{2}$ et on conclut que

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Le graphe de $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ se construit donc par translation de $\pm\frac{\pi}{2}$ de celui de $-\arctan(x)$.





◇