Chapitre 4

Nombres complexes

4.1 Forme cartésienne

4.1.1 Définition

Nous avons vu, dans la section sur les équations du deuxième degré, que l'équation $x^2+1=0$ ne possède pas de solutions puisque le discriminant de x^2+1 est $\Delta = -4$. En d'autres termes : le réel -1 n'a pas de racines carrées, puisqu'il n'existe aucun réel x tel que $x^2 = -1$.

Les nombres complexes fournissent une extension du corps des réels $\mathbb{R}$ permettant de résoudre ce type d'équation. Pour cela,

- nous introduisons un « nombre »i (nombre « imaginaire ») tel que

$$i^2 = -1$$

- nous imposons que tout calcul se fait selon les règles établies sur les réels.

Remarque 4.1. Tout comme $i^2 = -1$, $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = i^2 = -1$: i et $-i$ sont les racines de -1. ◇

Pour l'équation en $x^2 = -1$, l'ensemble solution est $S = \{-i, i\}$. On obtient ainsi la factorisation

$$x^2 + 1 = (x+i)(x-i)\,.$$

En effet, $(x+i)(x-i) = x^2 - ix + ix - i^2 = x^2 + 1$.

Exemple 4.2. Résoudre l'équation en x : $x^2 + x + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 = -3 = (-1) \cdot 3$ et l'ensemble solution est

$$S = \left\{ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}\,.$$

◇

Nous allons donc devoir manipuler des nombres de la forme

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Définition 4.3. L'ensemble

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

est appelé l'ensemble des nombres complexes.

Définition 4.4. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- L'écriture $z = a + ib$ est appelé forme cartésienne ou forme algébrique.
- a est la partie réelle de z, que l'on note
$$\mathrm{Re}(z) = a\,.$$
- b est la partie imaginaire de z, que l'on note
$$\mathrm{Im}(z) = b\,.$$

Ainsi, $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

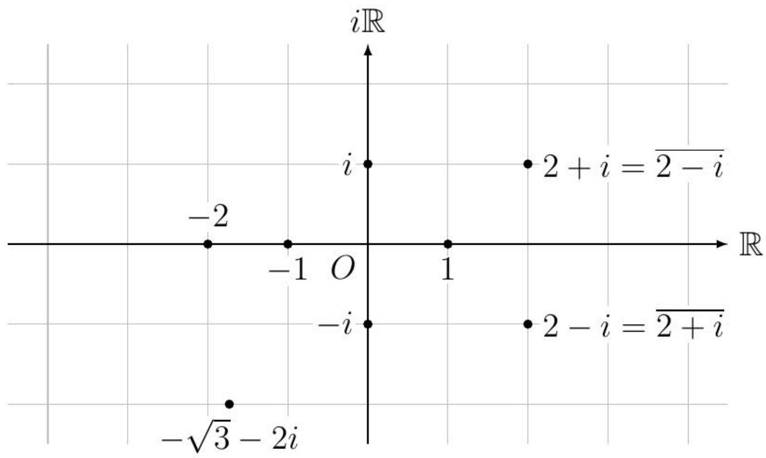
Remarque 4.5. $i\mathbb{R} = \{ib \mid b \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des nombres imaginaires. ◇

4.1.2 Identification entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$

Tout nombre complexe $z = a + ib$ peut être associé au point de coordonnées (a, b) dans le plan $\mathbb{R}^2$, et réciproquement, à tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on associe l'unique nombre complexe $z = a + ib$.

Lorsque les points du plan $\mathbb{R}^2$ sont interprétés comme représentant des nombres complexes, on parle du **plan complexe** ou encore du **plan de Gauss**.

Représentation graphique :



Quelques éléments de géométrie en écriture complexe :

1. Si $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $a - ib$ représente le symétrique de z par rapport à l'axe réel. On note $\bar{z} = a - ib$ que l'on appelle le **conjugué** de z.
2. Equation d'une droite verticale dans le repère Oxy de $\mathbb{R}^2$:
$$x = a\,.$$
Equation de la même droite, en écriture complexe :
$$\mathrm{Re}(z) = a \quad \Leftrightarrow \quad z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}\,.$$

3. Equation d'une droite horizontale dans le repère Oxy de $\mathbb{R}^2$:

$$y = b\,.$$

Equation de la même droite, en écriture complexe :

$$\operatorname{Im}(z) = b \quad \Leftrightarrow \quad z - \bar{z} = 2ib \in i\mathbb{R}\,.$$

4.1.3 Opérations sur les nombres complexes

Soient $z = a + ib$, $z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$, $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$.

1. Egalité

$$z = z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases} \iff a = a' \text{ et } b = b'\,.$$

2. Addition $+$

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

c'est-à-dire,

$$\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')\,.$$

En particulier,

$$\operatorname{Re}(z + z) = 2\operatorname{Re}(z) \text{ et } \operatorname{Im}(z + z) = 2\operatorname{Im}(z)\,.$$

3. Multiplication $\cdot$

$$\begin{aligned} zz' &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' + iab' + iba' + i^2bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + ba') \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(zz') &= \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z') \\ \operatorname{Im}(zz') &= \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(z')\,. \end{aligned}$$

Remarque 4.6. Observer la similitude avec $\cos(\alpha + \beta)$ et $\sin(\alpha + \beta)$. ◇

En particulier, pour $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$,

- $\lambda z = \lambda a + i\lambda b$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (amplification par un réel)
- $iz = ia + i^2b = -b + ia$ (amplification par un imaginaire)
- $zz = z^2 = a^2 - b^2 + i2ab$ (carré).

Définition 4.7. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Le nombre complexe conjugué de z, noté $\bar{z}$, est le nombre

$$\bar{z} = a - ib\,.$$

Propriété Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

1. $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

2. $\overline{\overline{z}} = z$
3. $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$
4. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
5. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
6. $z\bar{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)$
7. $\bar{z} = z \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ et $\bar{z} = -z \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

Les preuves se font par vérification directe.

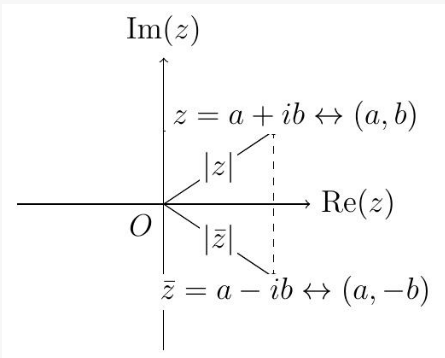
Définition 4.8. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Le module de z, noté $|z|$, est le nombre réel positif ou nul

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)}.$$

En particulier on a

$$z\bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Représentation graphique :



On observe que le module représente la distance entre le point (a, b), identifé avec le nombre $z = a + ib$, et l'origine $O = (0, 0)$ identifié avec le nombre $z = 0$. Le conjugué représente le symétrique de (a, b) par symétrie d'axe horizontal.

Propriété

- $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|, |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$
- $|z| = |\bar{z}|\ \forall\, z \in \mathbb{C}$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}\ \forall\, z \in \mathbb{C}^*$
- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \qquad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2 \neq 0)\ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|\ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Remarque 4.9. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps (cf Chapitre 0). On a effet l'existence

- de l'élément neutre pour l'addition : $0 = 0 + i0$
- de l'opposé de $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ pour l'addition : $-z = -(a + ib) = -a - ib$
- de l'élément neutre pour la multiplication : $1 = 1 + i0$
- de l'inverse de $z = a + ib \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ pour la multiplication :

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}\,.$$

En effet,
$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{a-ib}{|z|^2}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$
L'existence de l'inverse permet de définir la division dans $\mathbb{C}$. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avec $z_2 \neq 0$. Alors
$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\frac{1}{z_2}=\frac{1}{z_2}\,z_1\,.$$
$\diamond$

4.1.4 Puissances et racines

Définition 4.10. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme pour les réels, « z puissance n »signifie
$$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\text{ facteurs}}.$$
De plus, si $z \neq 0$, nous avons les exposants négatifs ou nul
$$z^0=1 \qquad z^{-1}=\frac{1}{z} \qquad z^{-n}=\frac{1}{z^n}\,.$$

Définition 4.11. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un nombre $w \in \mathbb{C}$ est une racine n^{e} complexe de z si w vérifie $w^n = z$.

Exemple 4.12. Les racines carrées de -1 sont i et $-i$. $\diamond$

Exemple 4.13. Les racines cubiques de -1 sont données par $\omega^3=-1$. On a $\omega = \begin{cases}-1\\ \text{ou}\\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\\ \text{ou}\\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\,.\end{cases}$

En effet, $(-1)^3=(\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2})^3=\frac{1}{8}(1\pm i3\sqrt{3}-9\mp i3\sqrt{3})=-1$. On peut le trouver en résolvant l'équation $z^3=-1 \Leftrightarrow z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)=0$ dont on connait les solutions. $\diamond$

Cas particulier : trouver la racine carrée de $z=a+ib$ sous forme algébrique.

Pour $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$, on résout $\omega^2=z$ avec $\omega=\alpha+i\beta$. Nous cherchons donc $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que
$$(\alpha+i\beta)^2=\alpha^2-\beta^2+i2\alpha\beta=a+ib \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha^2-\beta^2=a\\ 2\alpha\beta=b\,.\end{cases}$$
Plutôt que la relation $2\alpha\beta=b$, utilisons le carré du module
$$\alpha^2+\beta^2=|\alpha+i\beta|^2=\left|\sqrt{a+ib}\right|^2=\sqrt{|a+ib|^2}=\sqrt{a^2+b^2}\,.$$
Alors
$$(\alpha+i\beta)^2=a+ib \qquad\Leftrightarrow\qquad \begin{cases}\alpha^2-\beta^2=a=\operatorname{Re}(z)\\ \alpha^2+\beta^2=\sqrt{a^2+b^2}=|z|\\ \operatorname{sgn}(\alpha\beta)=\operatorname{sgn}(b)=\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z))\,.\end{cases}$$

Exemple 4.14. Calculer les racines de i. On pose $\omega = \alpha + i\beta$ et on résout $\omega^2 = i$. On a

$$(\alpha + i\beta)^2 = 0 + i \cdot 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \mathrm{Re}(i) = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = |i| = 1 \\ \mathrm{sgn}(\alpha\beta) = \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(i)) = +1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 = \frac{1}{2} \\ \mathrm{sgn}(\alpha\beta) = +1 \end{cases} \Leftrightarrow \omega = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,.$$

$\diamond$

4.2 Représentation polaire et transformations

4.2.1 Définition

Tout point du plan, et donc aussi tout nombre complexe, peut être représenté sous forme *polaire*.

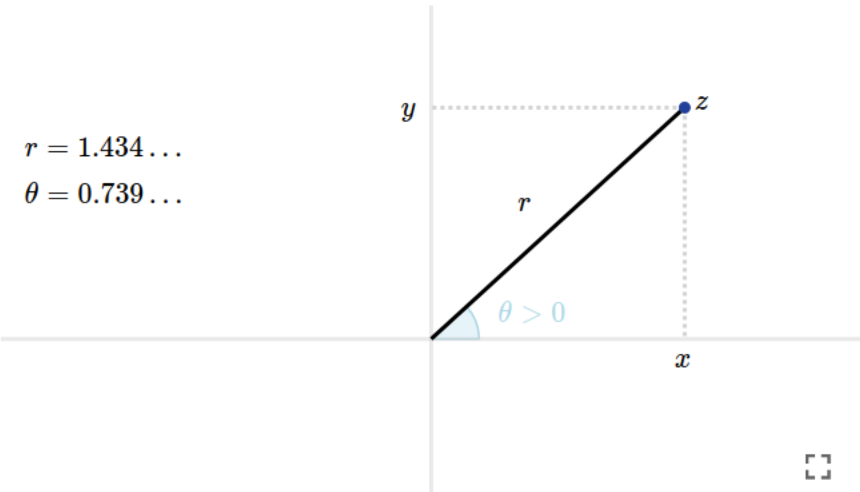
Définition 4.15. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. La forme polaire de z est la donnée
- du module $r = |z|$, qui représente la **distance** de z à O,
- de l'angle φ entre l'axe réel et le rayon-vecteur pointant vers z, appelé **argument** de z noté $\arg(z)$.

On écrit alors $z = [r, \varphi]$.

Bien-sûr, l'argument n'est pas unique, mais déterminé à un multiple de 2π près. On appelle **argument principal** de z l'unique argument tel que

$$\arg(z) \in \,]-\pi\,,\,\pi]\,.$$

Sur l'animation ci-dessous, on a représenté l'argument principal $\theta = \arg(z)$:



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

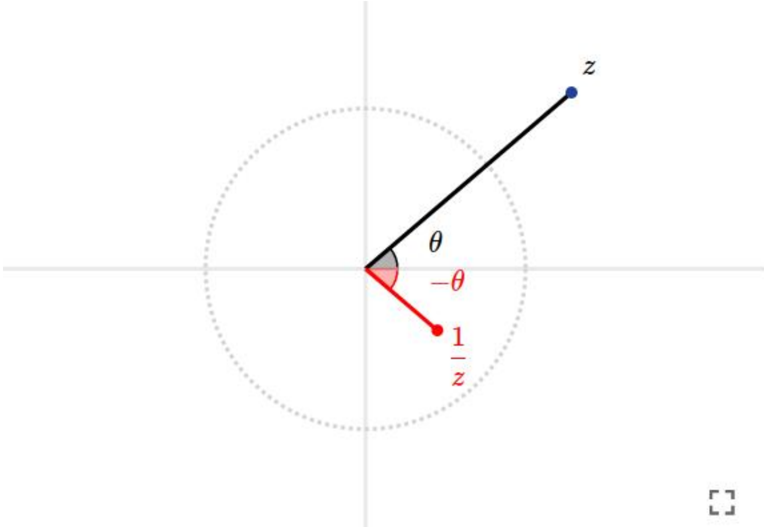
Ce dont il faudra se souvenir lorsqu'on voudra résoudre des équations avec des nombres complexes :

Propriété Soit $z = [r, \varphi]$ et $z' = [r', \varphi']$. Alors

$$z = z' \quad \Leftrightarrow \quad r = r' \text{ et } \varphi = \varphi' + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Remarquons que si $z = [r, \varphi] \in \mathbb{C}$, alors
- $\bar{z} = [r, -\varphi]$, et
- pour $\lambda > 0$, on a $\lambda z = \lambda[r, \varphi] = [\lambda r, \varphi]$.
- si $z \neq 0$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r^2}\overline{z} = \frac{1}{r^2}[r, -\varphi] = \left[\tfrac{1}{r}, -\varphi\right].$$



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

4.2.2 Passage d'une forme à l'autre

Si on a un complexe donné sous forme polaire, $z = [r, \varphi]$, alors $\mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi$ et $\mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi$ et donc sa forme cartésienne est

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Inversément, si un complexe z est donné sous forme cartésienne, $z = a + ib \in \mathbb{C}$, alors on peut le mettre sous forme polaire, $z = [r, \varphi]$ en prenant $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, et φ un angle quelconque satisfaisant

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \text{et } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Remarquons que la recherche d'un argument nécessite que les *deux* conditions (sur $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$) soient satisfaites simultanément. Si on n'en considère qu'une seule, on pourra trouver un argument en localisant bien z pour en extraire l'information nécessaire pour conclure.

Exemple 4.16. Trouvons une représentation polaire pour $z = -\sqrt{3} - i$.

Pour commencer, $r = |z| = \sqrt{3+1} = 2$. Ensuite, cherchons un angle φ tel que

$$\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

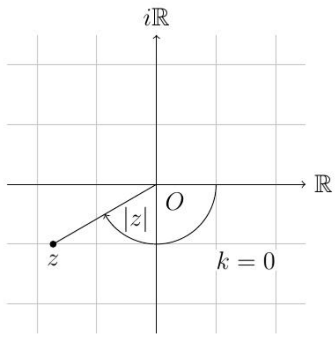
Toutes les solutions de cette équation sont

$$\varphi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \qquad \text{ou} \qquad \varphi = \frac{-5\pi}{6} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Comme notre complexe z appartient au quadrant III, on ne peut garder que les angles φ du deuxième ensemble de solutions, puisque tous satisfont $\sin(\varphi) = -\frac{1}{2}$. Par exemple, avec $k = 0$, $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$, et donc

$$z = \left[2, \tfrac{-5\pi}{6}\right].$$

(On pourrait aussi prendre $k = 1$ et obtenir $z = [2, \frac{7\pi}{6}]$, etc.)



◇

4.2.3 Produit complexe en représentation polaire

Multiplions deux complexes $z_1 = [r_1, \varphi_1]$ et $z_2 = [r_2, \varphi_2]$. Puisque

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

nous avons

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big) \\ &= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big). \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$z_1 z_2 = [r_1, \varphi_1] \cdot [r_2, \varphi_2] = \big[r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2\big].$$

Donc *multiplier*, en représentation polaire, revient à multiplier les modules et additionner les arguments.

On en conclut que lorsqu'on *divise* deux nombres complexes, on divise les modules et on soustrait les argument. En effet,

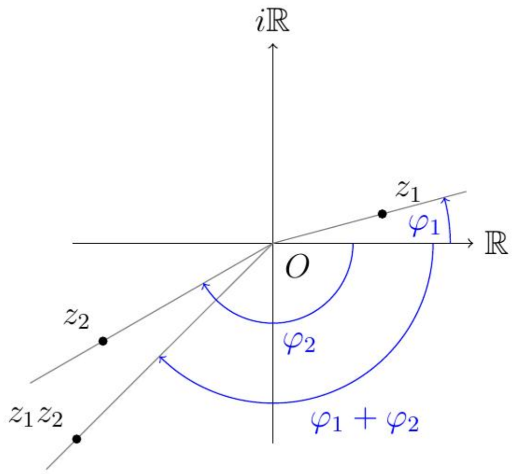
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = [r_1, \varphi_1] \cdot \left[\tfrac{1}{r_2}, -\varphi_2\right] = \left[\frac{r_1}{r_2}, \varphi_1 - \varphi_2\right].$$

Exemple 4.17. Pour $z_1 = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{12})$ et $z_2 = (\sqrt{6}, -\frac{5\pi}{6})$,

$$|z_1 z_2| = \sqrt{2}\sqrt{6} = 2\sqrt{3}$$
$$\arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{9\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4}$$

Donc

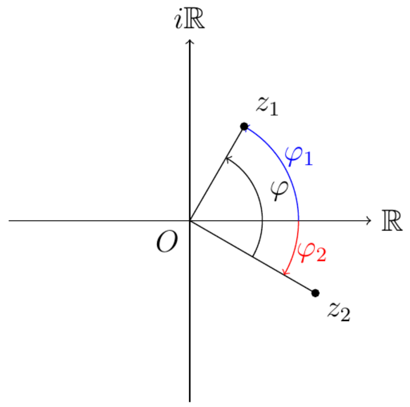
$$z_1 z_2 = \big(2\sqrt{3}, -\tfrac{3\pi}{4}\big).$$



◇

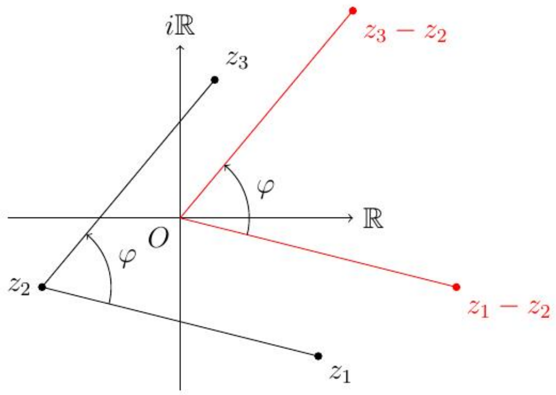
On peut utiliser les propriétés de l'argument pour calculer des *angles* dans le plan. En effet, pour deux complexes $z_1 = [r_1, \varphi_1]$ et $z_2 = [r_2, \varphi_2]$,

$$\varphi = \widehat{z_2 O z_1} = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) .$$



Plus généralement, l'angle formé par trois complexes z_1, z_2, z_3 (dans cet ordre) :

$$\varphi = \widehat{z_1 z_2 z_3} = (z_1 - \widehat{z_2) O (z_3} - z_2) = \arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right) .$$



4.2.4 La formule de Moivre

Appliquons la formule du produit dans le cas où $z_1 = z_2 = z = [r, \varphi]$:

$$z^2 = z \cdot z = [r, \varphi] \cdot [r, \varphi] = [r^2, 2\varphi] .$$

Cette formule est un cas particulier de la **formule de Moivre** :

Théorème 4.18. *Soit $z = [r, \varphi]$. Alors pour tout entier $n \geqslant 2$,*

$$z^n = [r^n, n\varphi] = r^n \big(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\big) .$$

Démonstration. On a vu juste au-dessus que la formule est vraie pour $n = 2$.
Si on suppose que la formule est vraie pour n, $z^n = [r^n, n\varphi]$, alors

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = [r^n, n\varphi] \cdot [r, \varphi] = [r^n r, n\varphi + \varphi] = [r^{n+1}, (n+1)\varphi] ,$$

et donc elle est vraie aussi pour $n + 1$. □

4.2.5 Géométrie et transformations dans le plan complexe

Soient z et z_0 deux points du plan complexe. La **distance** de z à z_0 est

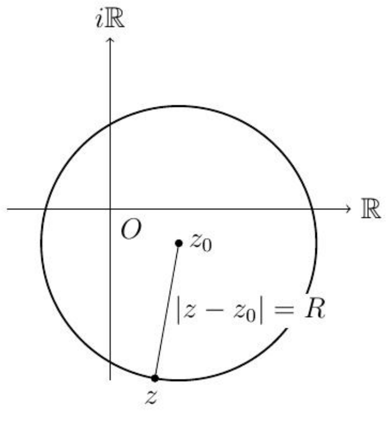
$$\mathrm{dist}(z, z_0) = |z - z_0| .$$

Equation d'un cercle centré à l'origine et de rayon R :

$$|z|^2 = z\bar{z} = R^2 .$$

Equation d'un cercle centré en z_0 et de rayon R :

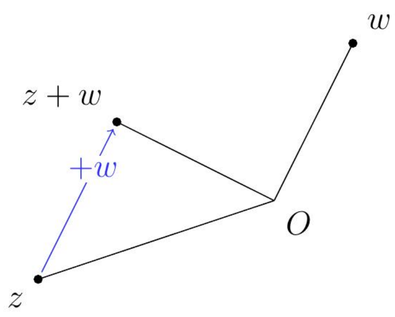
$$|z - z_0|^2 = R^2 .$$



Considérons maintenant un complexe z, et interprétons géométriquement l'effet qu'ont sur z les opérations élémentaires d'addition et de multiplication.
Translation
Si $w \in \mathbb{C}$, alors l'opération

$$z \mapsto z + w$$

correspond à faire une **translation** de z. On visualise cette opération comme la règle du parallélogramme pour l'addition en géométrie vectorielle :



Rotation
Dans $\mathbb{C}$, la multiplication par un nombre complexe w de module 1,

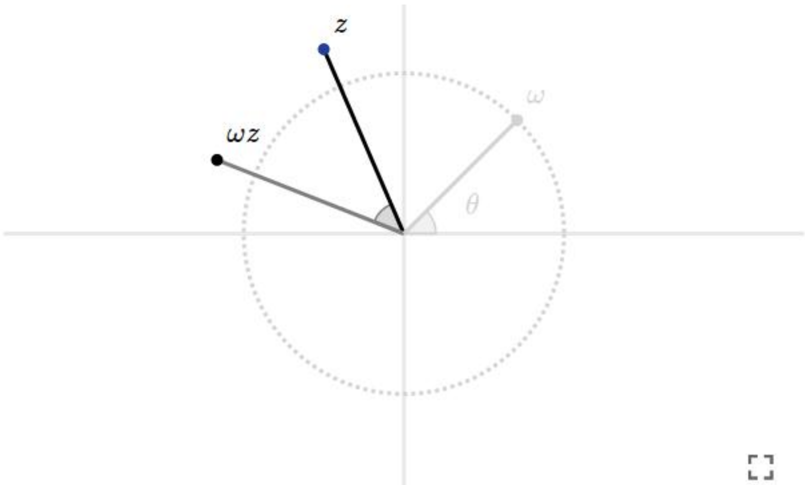
$$z \mapsto \omega z\,,$$

correspond à une **rotation** d'angle $\arg(\omega)$ autour de l'origine. En effet, si $z = [r, \varphi]$ et $\omega = [1, \theta]$, alors

$$\begin{aligned} \omega z &= [1, \theta] \cdot [r, \varphi] \\ &= [r, \varphi + \theta] \end{aligned}$$

On pourra donc écrire $\omega z = \mathrm{rot}_\theta(z)$.

Sur l'animation ci-dessous, ω est sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine :

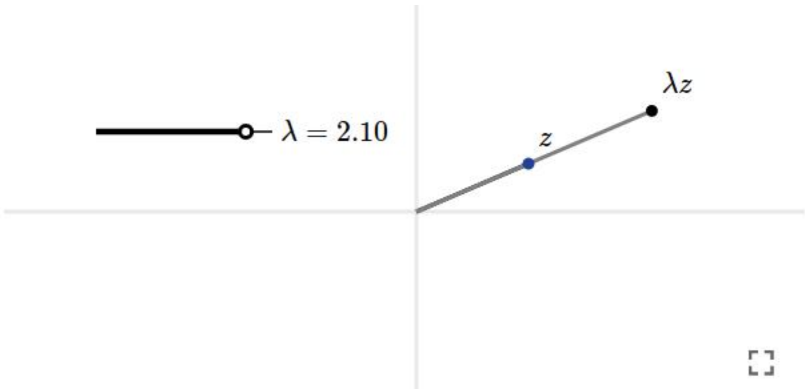


Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

Homothétie
La multiplication de z par un réel $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$z \mapsto \lambda z$$

correspond à une **homothétie**.



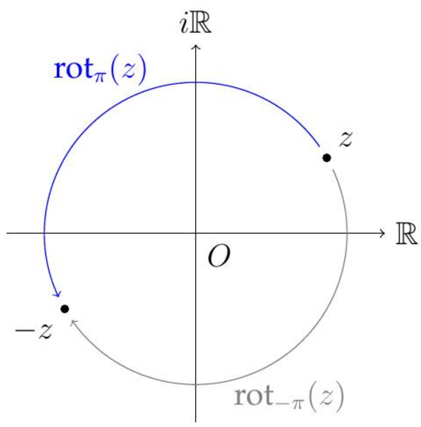
Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

On appelle λ le **rapport** de l'homothétie.

- Si $\lambda > 0$, alors $\arg(\lambda z) = \arg(z)$, et λz représente un agrandissement (si $\lambda > 1$) ou une réduction (si $0 < \lambda < 1$) de z, de facteur λ.
- Si $\lambda < 0$, alors $\arg(\lambda z) = \arg(z) + \pi$, et λz représente une rotation de $+\pi$, composée avec un agrandissement ou une réduction de facteur $|\lambda|$.

En particulier, la multiplication de z par $\lambda = -1 = [1, \pi]$ donne $-z$, le symétrique de z par rapport à l'origine O, et peut aussi se voir comme une rotation d'un angle π (ou $-\pi$) :

$$(-1)z = -z = \text{rot}_\pi(z)\,.$$



Similitude

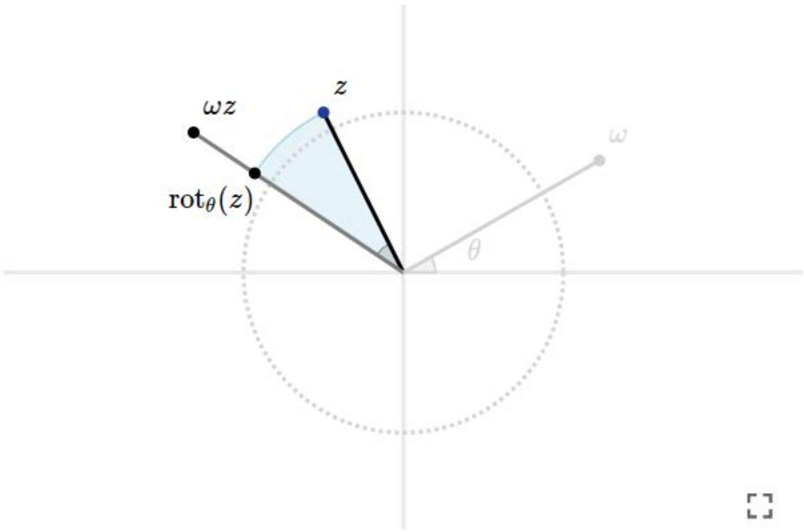
La multiplication de z par un complexe ω quelconque,

$$z \mapsto \omega z$$

correspond à une **similitude**, c'est-à-dire une rotation composée avec une homothétie. En effet, en travaillant en représentation polaire, $\omega = [\rho, \theta] = \rho[1, \theta]$, on peut écrire $\omega z = \rho([1, \theta]z)$. Comme $[1, \theta]z = \text{rot}_\theta(z)$, $z \mapsto \omega z$ est la composition de deux transformations,

$$z \mapsto \text{rot}_\theta(z) \mapsto \rho(\text{rot}_\theta(z)) = \omega z\,,$$

la première étape étant une rotation d'angle $\theta = \arg(\omega)$, la deuxième une homothétie de rapport $\rho = |\omega|$:



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

Une remarque à propos de l'équation d'une droite dans $\mathbb{C}$:

Considérons l'équation générale d'une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$:

$$ax + by = c\,,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si maintenant on la reformule en terme de $z = x + iy$,

$$a\,\mathrm{Re}(z) + b\,\mathrm{Im}(z) = c\,.$$

On peut récrire cette dernière

$$a\frac{z+\bar{z}}{2} + b\frac{z-\bar{z}}{2i} = c\,,$$

ou encore

$$\frac{(a-ib)z + (a+ib)\bar{z}}{2} = c\,.$$

En définissant $u = a + ib$, cette dernière se lit comme

$$\frac{\bar{u}z + u\bar{z}}{2} = c\,.$$

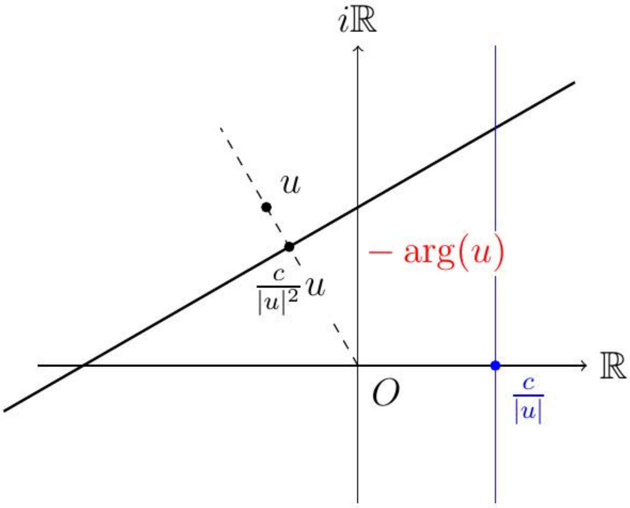
Puisque $u\bar{z} = \overline{\bar{u}z}$, le membre de gauche

$$\frac{\bar{u}z + u\bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(\bar{u}z)\,.$$

Donc l'équation de la droite $ax + by = c$ s'écrit, dans les complexes, comme

$$\mathrm{Re}(\bar{u}z) = c\,.$$

Interprétons géométriquement cette formulation : $u = a + ib$ est clairement le nombre complexe directeur de la normale à la droite. En effectuant une rotation d'angle $-\arg(u) = \arg(\bar{u})$ de tous les points z de la droite en les multipliant par $\bar{u}/|u|$, on obtient effectivement une droite verticale.



4.2.6 Racines n-èmes de nombres complexes

Un complexe ω est appelé **racine n-ème de l'unité** si

$$\omega^n = 1\,.$$

On résout cette équation en posant $\omega = [r, \varphi]$ et $1 = [1, 0]$. Par la formule de Moivre,

$$\omega^n = [r^n, n\varphi]\,,$$

et donc l'équation devient

$$[r^n, n\varphi] = [1, 0]\,.$$

Or on a vu plus haut que l'égalité de deux nombres complexes sous forme polaire implique

- Modules égaux : $r^n = 1$

$$\Rightarrow r = 1 \text{ (car } r \in \mathbb{R}_+)$$

- Arguments égaux à $k2\pi$ près : $n\varphi = 0 + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

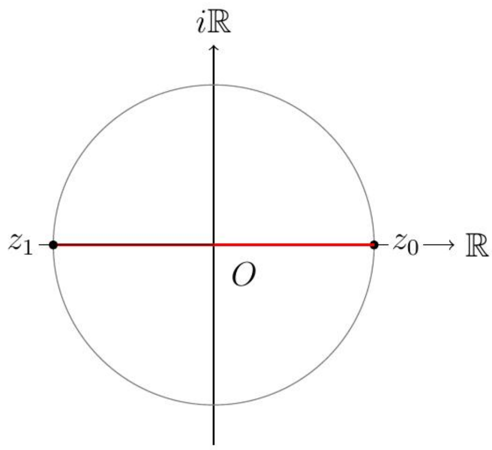
$$\Rightarrow \varphi = k\,\frac{2\pi}{n} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Il y a donc n racines distinctes de 1 :

$$S = \left\{ [1, k\,\tfrac{2\pi}{n}] \,\middle|\, k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

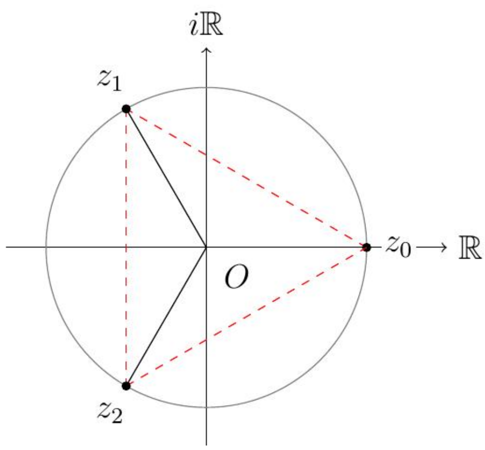
- Pour $n = 2$,

$$S = \left\{ [1, k\,\pi] \,\middle|\, k = 0, 1 \right\}.$$



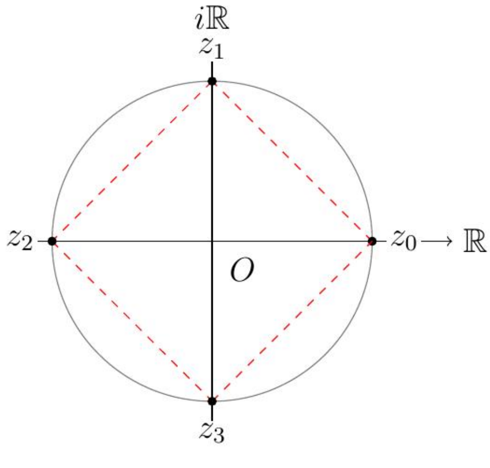
- Pour $n = 3$,

$$S = \left\{ [1, k\,\tfrac{2\pi}{3}] \;\middle|\; k = 0, 1, 2 \right\}.$$



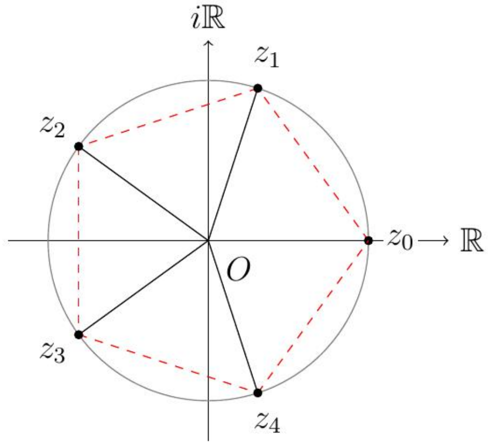
- Pour $n = 4$,

$$S = \left\{ [1, k\,\tfrac{\pi}{2}] \;\middle|\; k = 0, \ldots, 3 \right\}.$$



- Pour $n = 5$,

$$S = \left\{ (1, k\,\tfrac{2\pi}{5}) \;\middle|\; k = 0, \ldots, 4 \right\}.$$



On peut appliquer la même méthode pour calculer la racine n-ème d'un complexe quelconque. De manière générale, les racines n^{e} d'un complexe sont localisées sur les sommets d'un polygône régulier à n côtés inscrit dans un cercle.

Exemple 4.19. Cherchons les racines cubiques de $8i$, c'est-à-dire les $\omega \in \mathbb{C}$ tels que

$$\omega^3 = 8i\,.$$

On pose $\omega = [r, \varphi]$, et on met $8i$ sous forme polaire : $i = [8, \frac{\pi}{2}]$. En utilisant la formule de Moivre, l'équation devient

$$[r^3, 3\varphi] = [8, \tfrac{\pi}{2}]\,,$$

qui implique $r^3 = 8$, c'est-à-dire $r = 2$, et

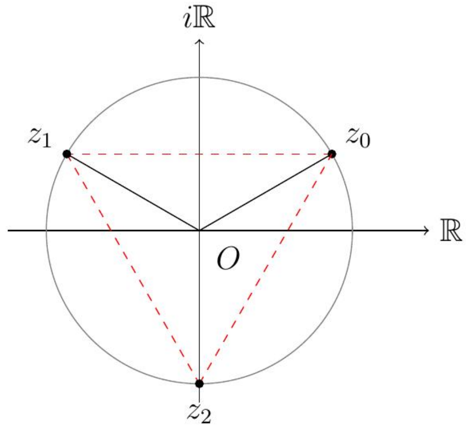
$$3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

qui donne $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

On a donc trois solutions distinctes, en prenant $k = 0, 1, 2$:

$$z_0 = [2, \tfrac{\pi}{6}]\,, \qquad z_1 = [2, \tfrac{5\pi}{6}]\,, \qquad z_2 = [2, \tfrac{3\pi}{2}]\,.$$

Ces racines sont aux sommets d'un triangle équilatéral, situés sur un cercle de rayon $r = 2$ centré à l'origine :



◇

4.2.7 Une remarque sur la forme exponentielle

Définition 4.20. Pour $z = [r, \varphi]$, on définit la forme exponentielle $z = re^{i\varphi}$.

Les règles de calcul des exponentielles réelles s'appliquent. En particulier si $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Cette forme a donc l'avantage de faciliter les calculs sous forme polaire.

Remarque 4.21.
1. Il est possible de définir une fonction exponentielle complexe $z \mapsto e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Avec cette fonction on peut démontrer l'égalité

$$re^{i\varphi} = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)).$$

Ceci sort cependant du cadre du cours, et nous allons admettre l'égalité

$$re^{i\varphi} = [r, \varphi]$$

comme convention et nous pouvons l'utiliser dans les calculs.

2. pour $z = re^{i\varphi}$, $\bar{z} = [r, -\varphi] = re^{-i\varphi}$.
3. En particulier, si on pose $z = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, on a formellement que

$$\cos(\varphi) = \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cosh(i\varphi)$$

et

$$\sin(\varphi) = \mathrm{Im}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2i} = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{i}\sinh(i\varphi).$$

On constate que dans le plan complexe, les fonctions trigonométriques et hyperboliques sont les mêmes !

Rappel : pour $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

◇

4.3 Polynômes réels et complexes

4.3.1 Définitions

Définition 4.22. Un **polynôme complexe** en $z \in \mathbb{C}$ est une combinaison linéaire de puissances de z :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

où les **coefficients** $a_k \in \mathbb{C}$ pour tout k. Le **degré** d'un polynôme P est la plus grande puissance de z dont le coefficient est non nul. On le note $\deg P$. Si un polynôme ne contient qu'un seul terme, c'est un **monôme**.

Exemples 4.23. 1. $P(z) = 0z^4 + z^2 - 3z + 2$ est un polynôme de degré 2 : $\deg(P) = 2$.
2. $P(z) = 3z^4 + z - z^6 - \sqrt{3}$ est un polynôme de degré 6 : $\deg(P) = 6$.
3. $P(z) = 5z^3$ est un monôme de degré 3.

$\diamond$

On considérera les polynômes comme des fonctions complexes, $z \mapsto P(z)$.

On notera :
- $\mathbb{C}[z]$: l'ensemble de tous les polynômes complexes.
- $\mathbb{R}[z]$: l'ensemble de tous les polynômes à coefficients réels : $a_k \in \mathbb{R}$ pour tout k.
- $P_n[z]$: l'ensemble des polynômes de degré *inférieur ou égal à* n :

On dit que des polynômes P et Q sont **égaux**, et on note $P = Q$, lorsque

$$P(z) = Q(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Théorème 4.24. *Soient*

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \\ Q(z) &= b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0\,. \end{aligned}$$

Alors $P = Q$ si et seulement $a_k = b_k$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$.

On *somme* des polynômes comme on somme des fonctions réelles : si P, Q sont des polynômes, alors $P + Q$ est aussi un polynôme, défini par

$$(P + Q)(z) = P(z) + Q(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Concrètement, le coefficient en z^k de $P + Q$ s'obtient en additionnant les coefficients de P et de Q associés à la puissance z^k.

Exemple 4.25. Si

$$\begin{aligned} P(z) &= 3z^2 + 5z - 6 \\ Q(z) &= -z^3 - 2z^2 + 3\,, \end{aligned}$$

alors $P + Q$ est

$$(P + Q)(z) = P(z) + Q(z) = -z^3 + z^2 + 5z - 3\,.$$

$\diamond$

En général, $\deg(P + Q) \leqslant \max\{\deg P, \deg Q\}$.

Exemple 4.26. $P(z) = 2z^3 + z + 1$ est de degré 3, $Q(z) = -2z^3 + 3z^2 - 5$ est de degré 3, mais $(P + Q)(z) = 3z^2 + z - 4$ est de degré 2. $\diamond$

Soient P est un polynôme et $\lambda \in \mathbb{C}$ est un **scalaire** (nombre fixé), le produit de P par λ , noté λP , est le polynôme $\lambda P \in \mathbb{C}[z]$ défini en multipliant chaque coefficient de P par λ .

Exemple 4.27. Si $P(z) = 3z^2 + 5z - 6$ et $\lambda = -\frac{2}{3}$, alors

$$(\lambda P)(z) = \lambda P(z) = \, -2z^2 - \frac{10}{3}z + 4\,.$$

$\diamond$

Remarquons que

$$\deg(\lambda P) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = 0\,, \\ \deg(P) & \text{si } \lambda \neq 0\,. \end{cases}$$

Avec les deux opérations définies ci-dessus (addition de polynômes et multiplication d'un polynôme par un scalaire) $\mathbb{C}[z]$, $\mathbb{R}[z]$ et $P_n[z]$ sont des exemples d'*espaces vectoriels*.

4.3.2 Multiplication et factorisation

On *multiplie* des polynômes comme on multiplie des fonctions réelles : si P, Q sont des polynômes, alors PQ est aussi un polynôme, défini par

$$(PQ)(z) = P(z)Q(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Exemple 4.28. Soient $P(z) = 3z^2 + 5z - 6$ et $Q(z) = -z^3 - 2z^2 + 3$.

$$\begin{aligned}(PQ)(z) &= P(z)Q(z)\\ &= (3z^2 + 5z - 6)(-z^3 - 2z^2 + 3)\\ &= -3z^5 - 6z^4 + 9z^2 - 5z^4 - 10z^3 + 15z + 6z^3 + 12z^2 - 18\\ &= -3z^5 - 11z^4 - 4z^3 + 21z^2 + 15z - 18.\end{aligned}$$

◇

Remarquons que

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

Définition 4.29. Un polynôme P est dit **réductible** s'il peut s'écrire comme un produit de polynômes,

$$P = P_1 P_2\,,$$

où P_1 et P_2 sont de degrés au moins 1; écrire P comme un tel produit est une **factorisation** de P. S'il n'est pas réductible, P est dit **irréductible**.

Exemple 4.30.

1. $P(z) = 3z + 1$ est irréductible. (On peut l'écrire comme $P(z) = 3(z + \frac{1}{3})$, mais $P_1(z) = 3$ est de degré zéro.)
2. $P(z) = z^2 + 3z + 2$ est réductible (donc pas irréductible) car il peut s'écrire $P(z) = (z + 1)(z + 2)$.

◇

Il est important de noter que la réductibilité d'un polynôme dépend du type de polynômes que l'on souhaite voir apparaître dans la factorisation.

En effet, la possibilité d'une factorisation $P = P_1 P_2$ dépend de ce qui est exigé sur P_1 et P_2 : si on exige que $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[z]$, la factorisation n'est pas toujours possible. Donc un polynôme peut être irréductible dans $\mathbb{R}[z]$ mais pas dans $\mathbb{C}[z]$!

Exemple 4.31. Soit $P(z) = z^2 + 1$, qui est à coefficients réels.

- Puisque le discriminant $\Delta = -4 < 0$, il n'existe pas de polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[z]$ de degrés $\geqslant 1$ tels que $P = P_1 P_2$.
- Par contre, c'est possible en prenant $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[z]$, puisqu'on peut écrire $P(z) = (z - i)(z + i)$.

◇

Nous verrons plus bas que si z_0 est une racine de P, alors P peut s'écrire comme $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré plus petit. Les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[z]$ sont donc les polynômes de degré 1. Dans $\mathbb{R}[z]$, les seuls autres polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 2 à discriminants négatifs.

4.3.3 Racines et factorisations

Une question naturelle, si on se donne un polynôme P, est de trouver les **racines** de P, à savoir les z tels que
$$P(z) = 0 .$$
Rechercher les racines de P (dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) et factoriser P (en un produit de facteurs irréductibles dans ces mêmes ensembles) sont des problèmes équivalentes. Nous l'avions déjà constaté dans le cas particulier de l'étude des trinômes du second degré.

Donnons quelques exemples de factorisations.

Exemple 4.32. Trouver les décompositions en facteurs irréductibles de $P(z) = z^4 - z^2 - 2z - 1$. Par les identités remarquables (voir fin de section), on a

$$\begin{aligned} P(z) &= z^4 - (z^2 + 2z + 1) \\ &= (z^2)^2 - (z+1)^2 \\ &= (z^2 - (z+1))(z^2 + z + 1) \\ &= (z^2 - z - 1)(z^2 + z + 1) \\ &= (z - z_1)(z - z_2)(z^2 + z + 1) , \end{aligned}$$

où $z_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Comme le discriminant de z^2+z+1 est strictement négatif, il ne peut pas être factorisé comme produit de polynômes à coefficients réels et donc la décomposition dans $\mathbb{R}[z]$ de P est
$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z^2 + z + 1).$$
Si on travaille à présent dans $\mathbb{C}[z]$, on peut autoriser des polynômes à coefficients complexes dans la décomposition, et en reprenant l'expression du dessus, nous pouvons écrire

$$z^2 + z + 1 = (z - w_1)(z - w_2) ,$$

où $w_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $w_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. La décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[z]$ est donc
$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - w_1)(z - w_2).$$

◇

Dans l'exemple précédent, nous avons pu factoriser le polynôme en utilisant les identités remarquables et le discriminant. Dans le cas où la factorisation n'est pas évidente, on recherche une racine particulière z_0 et on divise $P(z)$ par le binôme $(z - z_0)$.

Théorème 4.33. *Soient P un polynôme,* $\deg P \geqslant 1$, *et $z_0 \in \mathbb{C}$. Il existe alors un unique polynôme F tel que*
$$P(z) = (z - z_0)F(z) + P(z_0) .$$
De plus, on a $\deg F = \deg P - 1$

On prouve ce théorème par une vérification directe. Supposons que P est de degré n, de la forme suivante :
$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 .$$
Fixons un $z_0 \in \mathbb{C}$ quelconque, et cherchons un polynôme F de degré $n - 1$ tel que

$$P(z) = (z - z_0)F(z) + P(z_0) \qquad \forall z \in \mathbb{C} .$$

Nommons b_k les coefficients du polynôme recherché :

$$F(z) = b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0 \,.$$

Commençons par développer :

$$\begin{aligned}(z-z_0)F(z) &= (b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0)(z-z_0) \\ &= b_{n-1}z^n + (b_{n-2} - b_{n-1}z_0)z^{n-1} + \cdots + (b_0 - b_1 z_0)z - b_0 z_0\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{array}{rcl} b_{n-1} &=& a_n \\ b_{n-2} &=& a_{n-1} + b_{n-1}z_0 \\ &\vdots& \\ b_1 &=& a_2 + b_2 z_0 \\ b_0 &=& a_1 + b_1 z_0 \,, \end{array}$$

on peut récrire cette dernière comme suit

$$(z-z_0)F(z) = -z_0 b_0 + P(z) - a_0 \,.$$

Puisque cette dernière est vraie en particulier pour $z = z_0$, on en tire la relation $P(z_0) = a_0 + b_0 z_0$, qui permet donc d'écrire

$$(z-z_0)F(z) = P(z) - P(z_0) \,,$$

ce qui conclut la preuve.

La façon dont les coefficients b_k sont définis récursivement ci-dessus, à savoir $b_j = a_{j+1} + z_0 b_{j+1}$, peut se résumer dans un shéma appelé **shéma de Hörner** :

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
z_0		$b_{n-1}z_0$	$b_{n-2}z_0$	$\cdots$	$b_1 z_0$	$b_0 z_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	$P(z_0)$

Dans la première colonne, on descend le coefficient a_n pour obtenir b_{n-1}, puis on effectue le produit croisé avec z_0. Par la suite, on somme les résultats de chaque colonne pour obtenir le nouveau coefficient b_k et on reproduit la procédure jusqu'à arriver au bout du tableau.

Quelques remarques concernant la relation obtenue dans le théorème ci-dessus :

$$P(z) = (z-z_0)F(z) + P(z_0).$$

1. $P(z_0)$ est appelé le **reste** de la division de $P(z)$ par $z - z_0$.
2. si z_0 est une racine de $P(z)$, i.e. $P(z_0) = 0$, alors

   $$P(z) = (z-z_0)F(z),$$

   et donc P est divisible par $z - z_0$.

   Pour continuer à factoriser P, on continue le procédé sur F en recherchant une racine particulière $z_0^{'}$ jusqu'à obtenir finalement un produit de facteurs irréductibles.

Remarque 4.34. S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et un polynôme $F(z)$ tel que $F(z_0) \neq 0$ et

$$P(z) = (z - z_0)^n F(z)\,,$$

on dit que z_0 est une **racine d'ordre** (ou de **multiplicité**) n. Cas particuliers : si $n = 1$, on parle de racine simple, si $n = 2$ on parle de racine double. ◇

Exemple 4.35. Effectuer la division de $P(x) = x^3 + 7x^2 + 4x - 12$ par $x - 1$.

	1	7	4	-12
$x_0 = 1$		1	8	12
	1	8	12	0

Ainsi

$$x^3 + 7x^2 + 4x - 12 = (x - 1)(x^2 + 8x + 12)\,.$$

On constate qu'on obtient 0 à la fin du processus, ainsi $P(1) = 0$ ce qu'on aurait pu observer dès le départ puisque 1 est une racine. Dès lors si on souhaite résoudre l'équation $P(x) = 0$, on procède tout d'abord pour le schéma de Hörner pour écrire

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 8x + 12)$$

que l'on peut factoriser encore comme $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 6)$. On trouve alors que les solutions de $P(x) = 0$ sont données par $x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = -6$ et donc l'ensemble solution de l'équation $P(x) = 0$ est $S = \{-6, -2, 1\}$. ◇

Exemple 4.36. Effectuer la division de $P(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 10$ par $x + 1$. Ici il faut voir que $x_0 = -1$ et par conséquent on effectue la division de $P(x)$ par $x - (-1)$. On a par Hörner

	1	8	17	10
$x_0 = -1$		-1	-7	-10
	1	7	10	0

Ainsi, $P(x) = (x + 1)(x^2 + 7x + 10)$ et en continuant

$$P(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 10 = (x + 1)(x^2 + 7x + 10) = (x + 1)(x + 2)(x + 5)\,.$$

Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont donc données par $S = \{-5, -2, -1\}$. ◇

Exemple 4.37. Résoudre l'équation $3x^3 - 2x^2 + 4x + 9 = 0$. On observe que $x_0 = -1$ est racine évidente de $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 9$. $P(x)$ est donc divisible par $x + 1$. Par Hörner, on obtient

$$P(x) = (x + 1)(3x^2 - 5x + 9)\,.$$

Ici la décomposition dans $\mathbb{R}$ s'arrête car $3x^2 - 5x + 9$ n'a aucune racine réelle ($\Delta < 0$). L'équation $P(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ admet donc comme ensemble solution $S = \{1\}$.

Si on résout à présent $P(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{C}$, on peut factoriser P comme

$$P(x) = (x + 1)(3x^2 - 5x + 9) = 3(x + 1)(x - x_+)(x - x_-)\,,$$

avec $x_\pm = \frac{5 \pm \sqrt{83}i}{6}$, et donc l'ensemble solution est $S = \{-1, x_-, x_+\}$. ◇

Exemple 4.38. Effectuer la division de $P(x) = 4x^3 + 2$ par $x + 2$.

	4	0	0	2
$x_0 = -2$		-8	16	-32
	4	-8	16	-30

Ainsi

$$4x^3 + 2 = (x + 2)(4x^2 - 8x + 16) - 30\,.$$

Ici il faut faire attention à remplir la première ligne du tableau avec des 0 sur les puissances manquantes. On constate également que le reste ici est non nul : en effet on a bien que $P(-2) = -30$. On ne peut pas résoudre l'équation $P(x) = 0$ en procédant par division par $x + 2$. Par contre, cela donne les solutions de l'équation $Q(x) = 0$ où $Q(x) = P(x) + 30$. En effet, on a $Q(x) = P(x) + 30 = (x + 2)(4x^2 - 8x + 16) = 4(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$. Comme $x^2 - 2x + 4$ n'admet par de racines réelles ($\Delta < 0$), on a que les solutions de $Q(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$ sont données par $S = \{-2\}$. Dans $\mathbb{C}$, elles sont données par $S = \{-2, x_-, x_+\}$ où $x_\pm = 1 \pm \sqrt{3}i$. ◇

4.3.4 Théorème fondamental de l'algèbre et décompositions

Théorème 4.39. *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ possède au moins une racine complexe.*

Exemple 4.40. $z_0 = 1 + i$ est solution de l'équation $z^{17} + 122iz^3 - 12 - 12i = 0$. ◇

Par le Théorème Fondamental, les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[z]$ sont du premier degré.

Corollaire 1. *tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ s'écrit comme*

$$P(z) = \alpha(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

où $\alpha, z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ et $z_k, k = 1, ..., n$ sont les racines de P.

Théorème 4.41. *Soit $P \in \mathbb{R}[z]$ un polynôme à coefficients réels. Alors, si z est une racine de P, son complexe conjugué $\bar{z}$ est aussi racine de P.*

En effet, soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ avec $a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, \ldots, n$. Alors

$$\begin{aligned} 0 = P(z) \quad \Leftrightarrow \quad 0 &= \overline{P(z)} \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\ &= a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 \\ &= P(\bar{z}). \end{aligned}$$

Corollaire 2. *Soit $P(z) = az^2 + bz + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ un trinôme réel du deuxième degré. Alors $P(z)$ possède*

- *soit deux racines réelles, distinctes ou confondues*
- *soit deux racines complexes conjuguées l'une de l'autre.*

Théorème 4.42. *Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ peut être décomposé en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[x]$:*

$$P(x) = a(x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_p)^{n_p}(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1} \cdots (x^2 + \beta_q x + \gamma_q)^{m_q}$$

avec

- $a \in \mathbb{R}^*$
- *racines réelles* x_i, $i = 1, \ldots, p$ *toutes différents*
- $n_i \in \mathbb{N}$ *ordre (ou multiplicité) de la racine* x_i
- *couples réels* (β_j, γ_j), $j = 1, \ldots, q$ *tous différents et tels que* $\Delta_j = \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$
- $m_j \in \mathbb{N}$
- $n_1 + \cdots + n_p + 2(m_1 + \cdots + m_q) = \deg P$.

Preuve : En effet supposons que P est un polynôme réel de degré strictment plus grand que 2 ou de degré 2 mais avec un discriminant non négatif. P, à titre de cas particulier d'un polynôme à coefficients complexes, possède au moins une racine $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Si cette racine est réelle, $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ est divisible par $x - x_0$. P n'est donc pas irréductible.
- Si cette racine est complexe avec $\operatorname{Im}(z_0) \neq 0$, $\bar{z}_0$ est aussi racine et donc $P(x)$ est divisible par $(x - z_0)(x - \bar{z}_0) = x^2 - 2\operatorname{Re}(z_0) + |z_0|^2$. De nouveau, P n'est pas irréductible.

Exemple 4.43. Décomposer $P(x) = x^4 + 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

- P est réel et de degré 4 : il a deux paires de racines complexes conjuguées.
- Racines dans $\mathbb{C}$: $P(x) = 0$ si et seulement si $x^4 = -1 = [1, \pi + k2\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, ce qui donne $x = [1, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}]$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc

$$S = \left\{ \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}, \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}} \right\}$$

- Factorisation :

$$\begin{aligned} P(x) &= \underbrace{\left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{Décomposition en facteurs irréductibles dans } \mathbb{C}[x]} \\ &= \left(\left(x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \tfrac{i^2}{2}\right)\left(\left(x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \tfrac{i^2}{2}\right) \\ &= \underbrace{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}_{\text{Décomposition en facteurs irréductibles dans } \mathbb{R}[x]} \quad . \end{aligned}$$

Attention :

1. P est un polynôme à coefficient réel, mais il peut être vu comme un polynôme complexe (puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
2. Ecrire la décomposition de P en facteurs irrécuctibles dans $\mathbb{C}$, c'est l'écrire comme un produit de polynômes **complexes** irréductibles.
3. Ecrire la décomposition de P en facteurs irrécuctibles dans $\mathbb{R}$, c'est l'écrire comme un produit de polynômes **réels** irréductibles.

◇

4.3.5 Polynômes remarquables

Propriété Soit $a \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 - a^2 = (z-a)(z+a)$
2. $z^3 - a^3 = (z-a)(z^2 + za + a^2)$
3. $z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + z^{n-2}a + \cdots + z^{n-k}a^{k-1} + \cdots + za^{n-2} + a^{n-1})$

Propriété Soit $a \in \mathbb{C}$.

1. $(z \pm a)^2 = z^2 \pm 2za + a^2$
2. $(z \pm a)^3 = z^3 \pm 3z^2 a + 3za^2 \pm a^3$
3. $(z \pm a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\pm a)^{n-k} z^k$ (**binôme de Newton**)

Les coefficients $\binom{n}{k}$, dans la formule du binôme, sont appelés **coefficients binomiaux** et peuvent se calculer à l'aide du triangle de Pascal :

$$
\begin{array}{r|llllll|lllll}
n=0 & (x+a)^0 = & 1 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & (x+a)^1 = & x & +a & & & & 1 & 1 & & & \\
n=2 & (x+a)^2 = & x^2 & +2ax & +a^2 & & & 1 & 2 & 1 & & \\
n=3 & (x+a)^3 = & x^3 & +3ax^2 & +3a^2x & +x^3 & & 1 & {\color{red}3} & {\color{red}3} & 1 & \\
n=4 & (x+a)^4 = & x^4 & +4ax^3 & +6a^2x^2 & +4a^3x & +a^4 & 1 & 4 & {\color{red}6} & 4 & 1 \\
\hline
k & & & & & & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4
\end{array}
$$

On construit le triangle de Pascal avec les deux règles suivantes :

1. On commence et on termine chaque ligne par un 1.
2. En sommant deux nombres consécutifs d'une ligne, on obtient le nombre sur la ligne en dessous.

Ces règles s'écrivent comme :

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$
2. $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad k = 1, 2, ..., n, \quad n \geqslant 1.$

On peut montrer que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \, .$$