Chapitre 1

Logique

1.1 Notions de théorie des ensembles

Un **ensemble** est une collection bien définie d'objets/éléments distincts.

Souvent, on définit un ensemble E en listant les éléments qu'il contient :

Exemples 1.1. 1. $E = \{\bigstar, \clubsuit, \spadesuit\}$. Notons que la façon dont les éléments sont listés n'importe pas : $\{\bigstar, \clubsuit, \spadesuit\}$ et $\{\spadesuit, \bigstar, \clubsuit\}$ définissent le même ensemble E.

2. Ensembles contenant une infinité d'éléments :

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\
\mathbb{N}^* &= \{1, 2, 3, \dots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \\
\mathbb{Q} &= \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}
\end{aligned}$$

◇

Mais un ensemble est souvent défini à l'aide d'une *propriété* :

Exemple 1.2. L'ensemble des entiers positifs pairs est

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\},$$

et peut être décrit à l'aide d'une propriété, à savoir que c'est l'ensemble des entiers positifs x qui peuvent s'écrire comme un multiple de 2, c'est-à-dire pour lesquels il existe un entier k tel que $x = 2k$:

$$E = \{x \in \mathbb{N} \,|\, \exists k \in \mathbb{N}\,, x = 2k\}\,.$$

◇

Exemple 1.3. $E = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^3 - 13x^2 - 5x + 7 < 0\}$ ◇

Rappelons la terminologie de base :

Définition 1.4.
- On écrit "$x \in E$" pour indiquer que x **est un élément de** E, ou que x **appartient à** E. On écrira aussi "$x \notin E$" pour indiquer que x n'**est pas un élément de** E.
- l'**ensemble vide** est l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note $\emptyset$. On a donc $E \neq \emptyset$ si et seulement si $\exists\, x \in E$ (E n'est pas vide si et seulement si il existe (au moins) un x dans E).
- Inclusion : On dit qu'un ensemble A est un **sous-ensemble de** E, et on note $A \subset E$, si et seulement si $\forall\, x \in A, x \in E$ (quel que soit x appartenant à A, alors x appartient aussi à E).

Exemple 1.5. Si $E = \{\bigstar, \clubsuit, \spadesuit\}$, alors
- $\clubsuit \in E$ mais $\blacklozenge \notin E$
- Si $A = \{\clubsuit, \spadesuit\}$, alors $A \subset E$.
- Si $B = \{\clubsuit, \blacklozenge\}$, alors $B \not\subset E$.

$\diamond$

Remarque 1.6. Il est important de faire attention avec l'usage des symboles "$\in$" et "$\subset$". Lorsqu'on parle d'un élément $x \in E$, ce "x" est considéré comme un individu, alors que lorsqu'on écrit "$\{x\}$", on parle de l'*ensemble* contenant le seul élément x. On écrit alors $\{x\} \subset E$. $\diamond$

Exemples 1.7.
1. $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
2. $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{N}$
3. $0 \in \mathbb{N}$, $0 \notin \mathbb{N}^*$
4. $-\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$, $-\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$
5. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

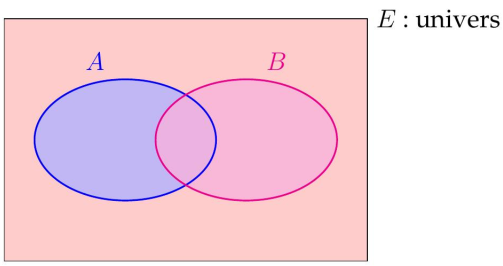
$\diamond$

Remarque 1.8.
- Le symbole "$\subset$" ne représente pas forcément une inclusion stricte. Il est donc correct d'écrire "$A \subset A$".
- L'inclusion est souvent utilisée pour caractériser l'égalité entre deux ensembles :

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A\,.$$

$\diamond$

On travaille en général dans un ensemble de référence E, non-vide, nommé **univers**, et on raisonne sur des sous ensembles de E. On représente souvent des sous-ensembles $A \subset E$ et $B \subset E$ dans un diagramme de Venn :



1.1.1 Union, intersection

Rappelons quelques autres sous-ensembles de E qui peuvent être formés à l'aide d'ensembles donnés A et B.

Définition 1.9.
- L'**intersection** de A et B est l'ensemble des éléments de E appartenant à A *et* à B :
$$A \cap B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\}\,.$$
- L'**union** de A et B est ensemble des éléments de E appartenant à A *ou* à B (ou aux deux, on dit que c'est un "ou *non-exclusif*") :
$$A \cup B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}\,.$$

Exemple 1.10. Si $A = \{\bigstar, \clubsuit, \spadesuit, \blacklozenge, 0\}$, $B = \{-1, 0, \sqrt{2}\}$, alors
- $A \cap B = \{0\}$
- $A \cup B = \{-1, 0, \sqrt{2}, \bigstar, \clubsuit, \spadesuit, \blacklozenge\}$.

◇

Exemple 1.11. Si $A =]-\infty, 1]$, $B =]0, 2[$, $C =]1, 3]$, $D = [3, 4]$ alors
- $A \cap B =]0, 1]$
- $A \cap C = \emptyset$
- $A \cup C =]-\infty, 3]$
- $B \cap C =]1, 2[$
- $B \cup C =]0, 3]$
- $A \cap D = \emptyset$
- $B \cup D =]0, 2[\cup [3, 4]$ (pas de façon plus compacte de l'écrire !)
- $C \cap D = \{3\}$

◇

Remarquons que si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$.

Exemples 1.12.
1. Si $A =]0, 1]$, $B = [0, 2]$, alors $A \cap B = A$.
2. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$
3. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}$

◇

Lorsqu'on prend l'union/intersection de plusieurs ensembles, on aura parfois recours à une *notation indicielle* semblable à celle utilisée pour les sommes et les produits. Plus précisément, pour une famille finie d'ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$, on définit

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\,.$$
$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\,.$$

On a des notations semblables dans le cas de familles infinies (dites *dénombrables*) :

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$
$$\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots\,,$$

ou encore

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k = \cdots \cup A_{-1} \cup A_0 \cup A_1 \cup \cdots$$
$$\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} A_k = \cdots \cap A_{-1} \cap A_0 \cap A_1 \cap \cdots .$$

Exemple 1.13. Si $A_k = [k, k+1]$, alors

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = [0,1] \cup [1,2] \cup [2,3] \cup \cdots = \mathbb{R}_+ \,,$$
$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = [0,1] \cap [1,2] \cap [2,3] \cap \cdots = \emptyset \,,$$
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k = \cdots \cup [-1,0] \cup [0,1] \cup [1,2] \cup \cdots = \mathbb{R} \,.$$

◇

1.1.2 Complémentaire

Définition 1.14. Soit $A \subset E$. Le **complémentaire de** A **dans** E est l'ensemble défini par

$$C_E(A) = \{x \in E \,|\, x \notin A\}$$

Parfois, lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité sur l'univers E, $C_E(A)$ est aussi noté $\overline{A}$ ou A^c. On peut donc écrire que

$$\overline{\emptyset} = E \,, \qquad \overline{E} = \emptyset \,.$$

On a toujours l'équivalence

$$x \notin A \quad \Leftrightarrow \quad x \in \overline{A}$$

Pour deux ensembles A, B quelconques, on définit aussi le **complémentaire de** A **dans** B :

$$C_B(A) = \{x \in B \,|\, x \notin A\}$$

Exemple 1.15. Si $A = \{\bigstar, \clubsuit, \spadesuit\}$, $B = \{\clubsuit, \spadesuit, \blacklozenge\}$, alors

- $A \cap B = \{\clubsuit, \spadesuit\}$
- $A \cup B = \{\bigstar, \clubsuit, \spadesuit, \blacklozenge\}$
- $C_A(B) = \{\bigstar\}$
- $C_B(A) = \{\blacklozenge\}$
- $C_A(A) = \emptyset$

◇

Exemples 1.16.

1. $C_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}^*) = \{0\}$
2. $C_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}) = \{\ldots, -3, -2, -1\}$
3. $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) =$ tous les nombres irrationnels

◇

Lemme Pour tous $A, B \subset E$,

1. $\overline{\overline{A}} = A$.

2. Si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.
3. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Démonstration. 1. Evident.

2. En effet,
$$x \in \overline{B} \quad \Leftrightarrow \quad x \notin B \quad \Rightarrow \quad x \notin A \quad \Leftrightarrow \quad x \in \overline{A}$$

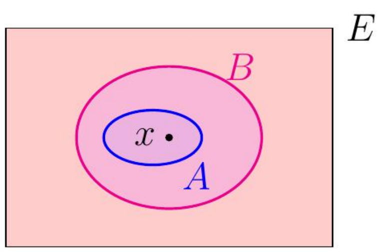
3. En effet,
$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} \quad &\Leftrightarrow \quad x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow \quad x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \overline{A} \cup \overline{B}\,. \end{aligned}$$

4. Pour y voir plus clair, posons $\overline{A} = A'$, $\overline{B} = B'$. Par le point précédent, on peut écrire
$$\begin{aligned} \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} &= \overline{A' \cap B'} \\ &= \overline{A'} \cup \overline{B'} \\ &= \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} \\ &= A \cup B\,. \end{aligned}$$

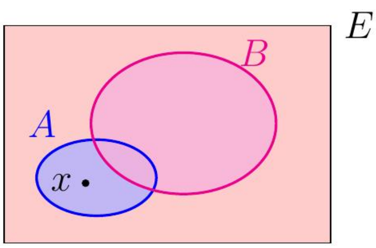
   Ainsi,
$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}} = \overline{A \cup B}\,.$$

□

Dans un univers E,
$$\begin{aligned} A \subset B \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\, x \in B \\ &\Leftrightarrow \quad A \cap \overline{B} = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{A} \cup B = E \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A \not\subset B \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in A,\, x \notin B \\ &\Leftrightarrow \quad A \cap \overline{B} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{A} \cup B \neq E\,. \end{aligned}$$



1.2 Propriétés et propositions

1.2.1 Introduction

En sciences, il est important de développer un langage univoque pour communiquer des faits et/ou analyser des résultats. Ce langage est celui de la logique mathématique. Voici quelques exemples :

1. Un résultat mathématique : le théorème de Pythagore. Pour tout triangle rectangle, la somme des carrés des cathètes est égale au carré de l'hypothénuse.
2. Une observation physique : sous les bonnes conditions, l'écoulement d'un fluide est régi par les équations de Navier-Stokes :
$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla u - \mu\Delta u + \nabla p = \rho f$$
3. Un projet en architecture : pour réduire les coûts environnementaux de construction de nouveaux bâtiments, on réutilise les matériaux d'anciens bâtiments qui ne sont plus en fonction.

Tous ces résultats, projets, observations s'expriment sous la forme de conditions, causes, buts qui impliquent un résultat, un modèle, une démarche.

1.2.2 Propriétés et ensembles

Une "phrase logique" se compose d'un objet ou d'un groupe d'objets, pris dans un référentiel sur lequel on applique une propriété. Le référentiel est l'ensemble des objets sur lesquels on définit des propriétés. Par exemple, la phrase "$\sqrt{2}$ est irrationnel" se compose de

1. $\sqrt{2}$: un élément, ici un nombre réel pris dans le référentiel $\mathbb{R}$.
2. La propriété "est irrationnel", appliquée à $\sqrt{2}$.

Pour l'instant, nous avons juste construit une phrase, à prendre comme un assemblage de mots, sans se soucier de sa valeur de vérité, c'est-à-dire si elle est vraie ou fausse. Par exemple, on peut tout à fait écrire la phase "$\sqrt{2}$ est rationnel". Il s'agira par la suite de déterminer s'il est correct d'affirmer "$\sqrt{2}$ est rationnel".

Formellement, voici comment on peut écrire une propriété appliquée à un élément d'un référentiel.

Définition 1.17. Soit un référentiel E et P une propriété définie sur E. La phrase "$x \in E$ possède la propriété P" se note $P(x)$. Cette écriture s'appelle le langage propositionnel.

Exemple 1.18. On choisit $E = \mathbb{R}$. Soient P_1 la propriété "est rationnel" et P_2 la propriété est irrationnel".

1. La phrase "$\sqrt{2}$ est rationnel" se note $P_1(\sqrt{2})$.
2. La phrase "$\sqrt{2}$ est irrationnel" se note $P_2(\sqrt{2})$. .

$\diamond$

Souvent, on écrit ces phrases dans le langage ensembliste, qui est un langage pratique pour effectuer des calculs logiques ou des raisonnements :

Exemple 1.19. Pour $E = \mathbb{R}$.

1. La phrase "$\sqrt{2}$ est rationnel" se note $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
2. La phrase "$\sqrt{2}$ est irrationnel" se note $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$\diamond$

Formellement, à toute propriété P définie sur E, on peut associer un ensemble $A_P \subset E$:

$$A_P = \{x \in E \,|\, P(x)\} \ = \{x \in E \,|\, x \text{ possède la propriété } P\}\,.$$

La phrase "x possède P" s'écrit alors comme $x \in A_P$.

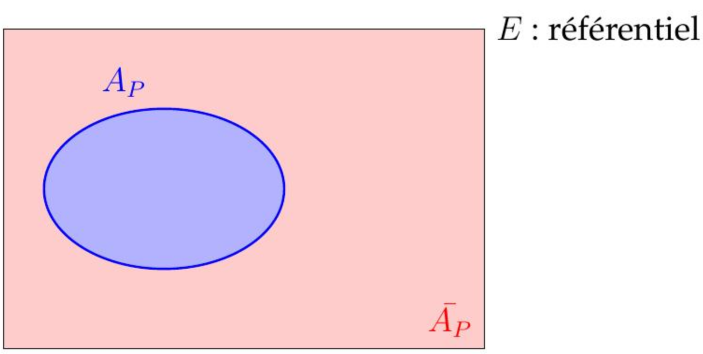
Définition 1.20. De même qu'on peut écrire la phrase "x possède la propriété P", on peut écrire la phrase "x ne possède pas la propriété P". La négation de la propriété P est notée non$P$ et la phrase "x ne possède pas la propriété P" se note non$P(x)$.

En langage ensembliste :

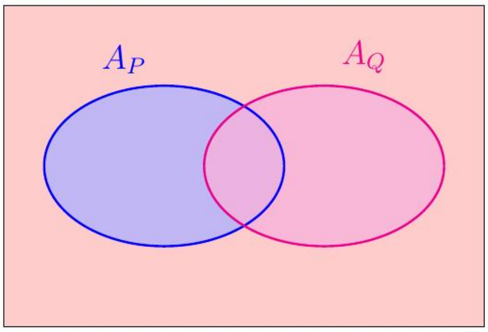
$$A_{\text{non}P} = \{x \in E \,|\, \text{non}P(x)\} = C_E(A_P) = \bar{A}_P.$$

$\bar{A}_P$ est l'ensemble des x ne possédant pas la propriété P. C'est le complémentaire de A_P dans E.

En langage ensembliste, on utilise le diagramme de Venn pour représenter A_P et son complémentaire :



Considérons à présent une autre propriété Q définie sur E et A_Q son ensemble associé. Représentons la situation comme un diagramme de Venn :



E : référentiel

On peut combiner la propriété P avec Q :

1. x possède la propriété $(P \text{ et } Q)$, noté $(P \text{ et } Q)(x)$ ou $(P(x) \text{ et } Q(x))$, si x possède à la fois la propriété P et la propriété Q. L'ensemble des x possèdant la propriété $(P \text{ et } Q)$ est $A_{(P \text{ et } Q)} = A_P \cap A_Q$:
$$A_{(P \text{ et } Q)} = A_P \cap A_Q = \{x \in E \mid P(x) \text{ et } Q(x)\}.$$
2. x possède la propriété $(P \text{ ou } Q)$, noté $(P \text{ ou } Q)(x)$ ou $(P(x) \text{ ou } Q(x))$, si x possède au moins l'une des deux propriétés (soit P, soit Q, soit les deux). L'ensemble des x possédant la propriété $(P \text{ ou } Q)$ est $A_{(P \text{ ou } Q)} = A_P \cup A_Q$:
$$A_{(P \text{ ou } Q)} = A_P \cup A_Q = \{x \in E \mid P(x) \text{ ou } Q(x)\}.$$
3. Négation de P et Q : non$\big(P \text{ et } Q\big)$ est $\big(\text{non}P \text{ ou non}Q\big)$. En effet :
$$\overline{A_P \cap A_Q} = \bar{A}_P \cup \bar{A}_Q$$
4. Négation de P ou Q : non$\big(P \text{ ou } Q\big)$ est $\big(\text{non}P \text{ et non}Q\big)$. En effet :
$$\overline{A_P \cup A_Q} = \bar{A}_P \cap \bar{A}_Q$$

Remarque 1.21. On dit que P et Q sont incompatibles (elles ne peuvent pas être satisfaites simultanément) si et seulement si $A_P \cap A_Q = \emptyset$. ◇

Règles de calcul logique I :

1. non$(P \text{ et } Q) = \text{non}P \text{ ou non}Q$
2. non$(P \text{ ou } Q) = \text{non}P \text{ et non}Q$

1.2.3 Propositions

Soit P une propriété définie sur un référentiel E et A_P son ensemble associé correspondant.

Définition 1.22. Une proposition T est une affirmation énoncée à propos des éléments de E.

On peut séparer les propositions en trois grandes familles.

1. Une **proposition simple** affirme qu'un élément particulier x_0 de E possède la propriété P :
$$T : \; P(x_0)$$
En langage ensembliste, $T : \; x_0 \in A_P$.

Exemple 1.23. T : $\sqrt{2}$ est irrationnel. ◇

2. Une **proposition universelle** affirme que *tout* x dans le référentiel E possède la propriété P :
$$T:\ \forall\, x \in E,\ P(x)$$
En langage ensembliste, $T:\ A_P = E$.
Exemple 1.24. T : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$. ◇

3. Une **proposition existentielle** affirme qu'au moins un élément de E possède la propriété P
$$T:\ \exists\, x \in E,\ P(x)$$
En langage ensembliste, $T:\ A_P \neq \emptyset$, ou encore $T:\ \exists x \in E, x \in A_P$.
Exemple 1.25. T : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$. ◇

Exprimons les négations de ces trois types de propositions :

1. **Négation d'une proposition simple** : x_0 ne possède pas P.
$$\text{non}T:\ \text{non}P(x_0)$$
En langage ensembliste, non$T$: $x_0 \notin A_P$ ou encore $x_0 \in \bar{A}_P$.
Exemple 1.26. non$T$: $\sqrt{2}$ est rationnel. ◇

2. **Négation d'une proposition universelle** : il existe $x \in E$ t.q. x ne possède pas P.
$$\text{non}T:\ \exists\, x \in E,\ \text{non}P(x)$$
En langage ensembliste, non$T$: $A_P \neq E$ ou encore $\bar{A}_P \neq \emptyset$.
Exemple 1.27. non$T$: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$. ◇

3. **Négation d'une proposition existentielle** : quel que soit $x \in E$, x ne possède pas P.
$$\text{non}T:\ \forall\, x \in E,\ \text{non}P(x)$$
En langage ensembliste, non$T$: $A_P = \emptyset$ ou encore $\bar{A}_P = E$.
Exemple 1.28. non : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2$. ◇

À présent, on peut parler de valeur de vérité de l'affirmation T : elle est soit vraie, soit fausse. Elle est vraie si et seulement si non$T$ est fausse, et elle est fausse si et seulement si non$T$ est vraie.

Remarque 1.29. Prendre garde à l'importance du référentiel : soit la propriété $P(x)\ :\ x^2 = -1$. La proposition
$$T : \exists x \in E, P(x)$$
est fausse si $E = \mathbb{R}$, mais vraie si $E = \mathbb{C}$. ◇

Règles de calcul logique II

- non $(\forall x \in E, P(x))$ est $\exists x \in E, \text{non}P(x)$
- non $(\exists x \in E, P(x))$ est $\forall x \in E, \text{non}P(x)$

1.2.4 Implications et équivalences

Un structure importante pour énoncer des résultats en sciences est l'*implication*. On observe un certain résultat si certaines conditions sont réunies.

Soient P et Q deux propriétés définies sur E, A_P et A_Q les ensembles correspondants. L'affirmation "si x possède P, alors x possède Q" s'écrit :

$$P(x) \Rightarrow Q(x).$$

On peut construire la proposition universelle :

$$T : \forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x).$$

Souvent, on notera $P \Rightarrow Q$ au lieu de T.

En langage ensembliste, la proposition universelle $P \Rightarrow Q$ exprime que tous les éléments de A_P sont aussi éléments de A_Q :

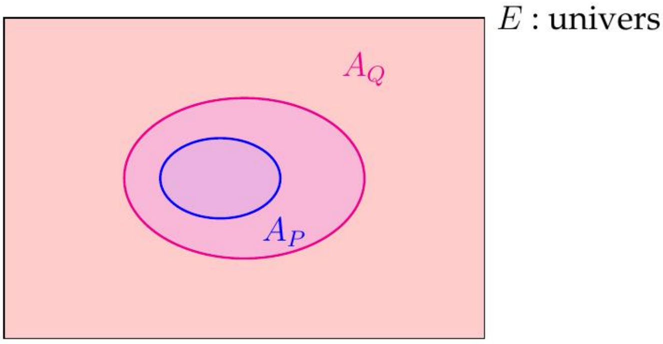
$$P \Rightarrow Q : \forall\, x \in A_P,\ x \in A_Q$$

qui peut aussi s'écrire comme

$$P \Rightarrow Q : \forall\, x \in E,\ \text{ si } x \in A_P,\ \text{ alors } x \in A_Q$$

ou encore

$$P \Rightarrow Q : A_P \subset A_Q.$$



On constate que la condition P est plus restrictive que Q. Tout x qui possède P possède nécessairement Q, mais il y a des x qui peuvent posséder la propriété Q sans posséder la propriété P.

La proposition $Q \Rightarrow P$ est appelée la réciproque de $P \Rightarrow Q$. En langage ensembliste, on écrit $Q \Rightarrow P : \forall\, x \in A_Q,\ x \in A_P$ ou encore $A_Q \subset A_P$.

On dit que P et Q sont équivalentes si et seulement si $\big(P \Rightarrow Q$ et $P \Leftarrow Q\big)$, noté $P \Leftrightarrow Q$.

En langage ensembliste, on aura $\big(A_P \subset A_Q$ et $A_Q \subset A_P\big)$ c'est-à-dire $\big(A_P = A_Q\big)$.

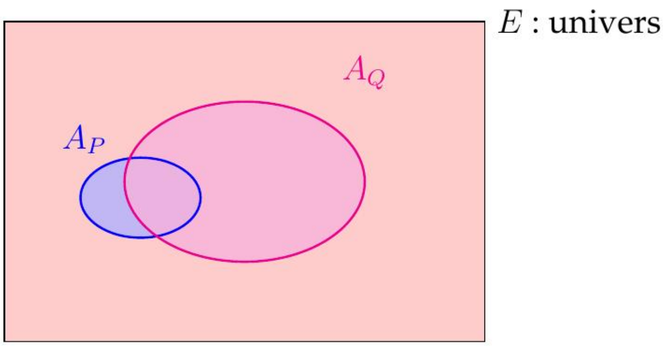
Le symbole $\Leftrightarrow$ peut aussi s'utiliser pour comparer des propositions. Pour deux propositions T_1, T_2, $T_1 \;\Leftrightarrow\; T_2$ signifie que T_1 et T_2 sont équivalentes : elles partagent la même valeur de vérité. T_1 est vraie si et seulement si T_2 est vraie, et T_1 est fausse si et seulement si T_2 est fausse.

Il est important de savoir comment nier une implication. On a le résultat suivant :

$$\text{non}(\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, P(x) \text{ et non}Q(x).$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\text{non}(\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)) &\Leftrightarrow \text{non}\big(\forall\, x \in A_P,\; x \in A_Q\big) \\
&\Leftrightarrow A_P \not\subset A_Q \\
&\Leftrightarrow \exists\, x \in A_P,\; x \notin A_Q \\
&\Leftrightarrow \exists\, x \in E,\; x \in A_P \text{ et } x \notin A_Q \\
&\Leftrightarrow \exists\, x \in E,\; \big(P(x) \text{ et non}Q(x)\big)\,.
\end{aligned}$$



La négation d'une implication est donc une proposition existentielle.
A retenir :

Règles de calcul logique III :

- non $(\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, P(x)$ et non$Q(x))$.
  Sous forme compacte : non$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P$ et non$Q$.

Exemple 1.30. Un exemple important : la négation de la définition de limite. La définition de la limite d'une suite est :

$$a_n \text{ converge vers } a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(T:\ \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\,)\,.$$

Considérons non("a_n converge vers a"). On va décomposer la proposition T et la nier par étape :

- T : $\forall \varepsilon > 0, A(\varepsilon)$.
- $A(\varepsilon)$: $\exists N \in \mathbb{N}, B(N)$.
- $B(N)$: $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow Q(n)$.
- $P(n)$: $n \geqslant N$, $\quad Q(n)$: $|a_n - a| < \varepsilon$.

On nie chaque partie indépendamment :

- non$T$: $\exists \varepsilon > 0,$ non$A(\varepsilon)$.
- non$A(\varepsilon)$: $\forall N \in \mathbb{N},$ non$B(N)$.
- non$B(N)$: $\exists n \in \mathbb{N}, P(n)$ et non$Q(n)$.
- non$Q(n)$: $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$.

On récrit alors la négation bout à bout :

$$\text{non}T : \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \text{ et } |a_n - a| \geqslant \varepsilon.$$

◇

1.3 Méthodes de preuves

Une théorie mathématique se construit sur des règles que l'on se donne au départ (les axiomes et définitions) et sur la logique. A partir des axiomes, on utilise le langage logique pour déduire de nouveaux résultats, appelés propositions ou théorèmes.

Dans un référentiel, une proposition a une **valeur de vérité** : elle est soit *vraie*, soit *fausse*.

Exemple 1.31. Sur le référentiel $E = \mathbb{R}$, considérons les affirmations

- T_1 : "$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$",
- T_2 : "$\pi \notin \mathbb{Q}$".

On peut montrer (voir cours d'analyse) que $\sqrt{2}$ et π sont tous deux irrationnels. Donc T_1 est fausse et T_2 est vraie. $\diamond$

Dans le but de montrer qu'une affirmation est vraie ou fausse, nous présenterons cinq méthodes de preuve :

1. preuve directe
2. preuve indirecte (ou par contraposée)
3. preuve par contre-exemple
4. preuve par l'absurde
5. preuve par récurrence

1.3.1 La méthode directe

Le but ici est de montrer qu'une proposition universelle $T : \forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$ est vraie.

Pour un x quelconque, on montre que l'implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est vraie en montrant que le contenu de $P(x)$ peut être utilisé *directement*, et développé de façon à impliquer $Q(x)$. Ceci se fait souvent en introduisant une suite d'implications intermédiaires plus simples, toutes vraies :

$$\begin{array}{rl} P(x) \Rightarrow & T_1(x) \\ & \Downarrow \\ & T_2(x) \\ & \Downarrow \\ & \vdots \\ & \Downarrow \\ & T_n(x) \ \Rightarrow Q(x)\,. \end{array}$$

Les implications intermédiaires sont introduites en détaillant naturellement les éléments contenus dans l'affirmation de départ.

Exemple 1.32. Démontrons que l'affirmation de l'exemple du dessus, T : "le carré de tout entier pair est pair", est vraie. Prenons un $a \in \mathbb{Z}$, quelconque, et développons :

$$\begin{aligned} a \text{ est pair} &\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ a = 2k \\ &\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ a^2 = (2k)^2 = 2 \cdot \underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{Z}} \\ &\Rightarrow \exists\, \ell \in \mathbb{Z},\ a^2 = 2\,\ell \\ &\Rightarrow a^2 \text{ est pair.} \end{aligned}$$

Ici, la première affirmation intermédiaire a seulement consisté à expliciter ce que signifie "être pair" (à savoir : pouvoir être écrit comme un multiple de 2). ◇

1.3.2 La méthode indirecte ou contraposée

Le but ici est également de montrer qu'une proposition universelle est vraie, à l'aide de sa *contraposée*.

Définition 1.33. Soit $T : \forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$. La proposition

$$C \;: \forall x \in E, \text{non } Q(x) \Rightarrow \text{non } P(x)$$

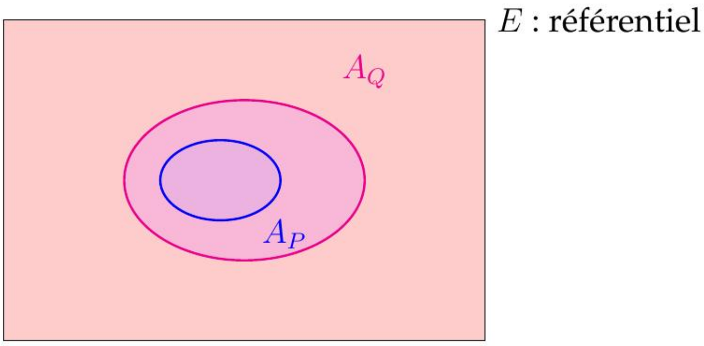
est la proposition **contraposée** de T.

Exemple 1.34. La contraposée de la proposition "s'il pleut, je sors avec mon parapluie" est "si je sors sans parapluie, c'est qu'il ne pleut pas". ◇

Remarquons qu'*une proposition est équivalente à sa contraposée* : $T \Leftrightarrow C$. En langage ensembliste, cette équivalence s'écrit :

$$A_P \subset A_Q \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{A_Q} \subset \overline{A_P}\,.$$

(« Tout ce qui est dans A_P est aussi dans A_Q si et seulement si tout ce qui n'est pas dans A_Q n'est pas non plus dans A_P. »)



Comme T et sa contraposée sont équivalentes, on peut montrer que T est vraie en montrant que C est vraie, ce qui est parfois plus simple, comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.35. Démontrons que

$$T : \ \forall\, a \in \mathbb{Z},\ \text{si } a^2 \text{ est pair, alors } a \text{ est pair}$$

est vraie. (Pas facile para la méthode directe, essayez !)

Ecrivons la contraposée de T :

$$C : \ \forall\, a \in \mathbb{Z},\ \text{si } a \text{ est impair, alors } a^2 \text{ est impair}\,,$$

et montrons que C est vraie, par la méthode directe. Fixons $a \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} a \text{ est impair} &\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ a = 2k+1 \\ &\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ a^2 = (2k+1)^2 = 2 \cdot (\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1 \\ &\Rightarrow \exists\, \ell \in \mathbb{Z},\ a^2 = 2\,\ell + 1 \\ &\Rightarrow a^2 \text{ est impair}. \end{aligned}$$

Donc C est vraie, et donc T est vraie également. ◇

Remarque 1.36. Ne pas confondre la contraposée avec la négation et la réciproque ! En effet, rappelons que pour une affirmation universelle T : $\forall x \in E$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$, on a

- sa *contraposée* : $\forall x \in E$, non$Q(x) \Rightarrow$ non$P(x)$,
- sa *négation* : $\exists x_0 \in E, P(x_0)$ et non $Q(x_0)$,
- sa *réciproque* : $\forall x \in E, Q(x) \Rightarrow P(x)$.

◇

1.3.3 La méthode de preuve par contre-exemple

Remarquons pour commencer qu'en toute généralité, une affirmation est fausse (resp. vraie) si et seulement si sa négation est vraie (resp. fausse).

Le but ici est de montrer qu'une proposition universelle

$$T : \; \forall x \in E, \; P(x)$$

est fausse en montrant que sa négation est vraie. Or pour montrer que

$$\text{non}T : \exists x_0 \in E, \; \text{non}P(x_0)$$

est vraie, il suffit d'exhiber un $x_0 \in E$ qui ne satisfait pas P ; ce x_0 est appelé **contre-exemple**.

Exemple 1.37. Par ce qu'on a vu dans un exemple précédent, la proposition

$$T : \forall a \in \mathbb{Z}, a^2 \text{ pair } \Rightarrow a \text{ impair}$$

est fausse. Mais une autre façon de montrer que Test fausse est de considérer sa négation,

$$\text{non}T : \exists a_0 \in \mathbb{Z}, a_0^2 \text{ pair et } a_0 \text{ pair} .$$

et de remarquer que non$T$ est vraie, puisqu'en prenant $x_0 = 2$, on a $x_0^2 = 4$ et 2 est pair.

Remarquons pourtant que :

1. On n'a pas montré qu'il n'existait pas de a impair dont le carré est pair.
2. On a pas montré non plus que si le carré est pair, le nombre est pair.

◇

Exemple 1.38. Considérons l'affirmation T : « toute suite réelle x_n dont le carré ${x_n}^2$ converge est elle-même convergente ».
Montrons que T est fausse, en considérant sa négation non$T$: « il existe une suite x_n divergente telle que ${x_n}^2$ converge ».

Comme contre-exemple, il suffit de prendre $x_n = (-1)^n$, qui est divergente, alors que son carré ${x_n}^2 = +1$ est une suite constante, et donc convergente. ◇

Exemple 1.39. Considérons l'affirmation T : « la somme de deux irrationnels est irrationnelle ». Sa négation est non$T$: « il existe deux irrationnels dont la somme est rationnelle », et elle est vraie puisqu'on peut par exemple prendre $x = -\sqrt{2}$ et $y = \sqrt{2}$ sont tous deux irrationnels, mais leur somme $x + y = 0$ est rationnelle. Donc T est fausse. ◇

1.3.4 La méthode de preuve par l'absurde/contradiction

On a déjà dit qu'une façon de montrer qu'une proposition T est vraie est de montrer que sa négation, non$T$, est fausse.

L'idée de la méthode de preuve *par l'absurde* est la suivante : on montre que non$T$ est fausse en montrant qu'elle ne peut pas être vraie, dans le sens suivant : supposer que non$T$ est vraie mène à une conclusion absurde, en contradiction avec les hypothèses de départ.

Remarquons que de manière très générale, une proposition peut toujours s'écrire sous la forme d'une implication, $T : H \Rightarrow C$, qui comporte

- les hypothèses H (le référentiel, les propriétés que les éléments du référentiel vérifient, etc.),
- la conclusion C (nouvelle propriété déduite à partir des hypothèses).

Pour montrer qu'une implication

$$T : H \Rightarrow C$$

est vraie, la méthode consiste à montrer que si non$T$ est vraie, alors on arrive à une contradiction. Dit encore autrement, puisque

$$\text{non } T : H \text{ et non } C\,,$$

on démontre que sous les hypothèses H, non$T$ est impossible car en contradiction avec H.

Voyons un exemple classique.

Exemple 1.40. Montrons que l'affirmation « $\sqrt{2}$ est irrationnel », c'est-à-dire

$$T : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\,,$$

est vraie. Pour la démontrer par l'absurde, on considère

$$\text{non T} : \sqrt{2} \in \mathbb{Q}\,.$$

Si non$T$ est vraie, cela signifie que l'on peut choisir $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}\,.$$

Remarquons que l'on peut supposer que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, c'est-à-dire que a et b n'ont aucun diviseur en commun.

Ensuite, élevons $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ au carré, pour obtenir

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 2b^2.$$

Ceci implique que a^2 est pair. Par ce que nous avions montré plus haut, cela implique que a est pair, et donc qu'il peut s'écrire comme $a = 2c$ pour un certain $c \in \mathbb{Z}$. Donc on a finalement que

$$a^2 = (2c)^2 = 4c^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad 2c^2 = b^2.$$

Donc b^2 est pair, et ceci implique que b est pair à son tour. Donc $b = 2d$ pour un certain $d \in \mathbb{N}$. Donc on en déduit que a et b sont pairs tous les deux, et donc qu'ils ont un diviseur commun : 2. Ceci est en contradiction avec notre hypothèse de départ. Par conséquent, non$T$ ne peut pas être vraie, elle est donc fausse, et T est vraie : $\sqrt{2}$ est irrationnel. ◇

1.3.5 La méthode de preuve par induction/récurrence

But : montrer qu'une proposition $P(n)$ dépendant d'un entier positif n est vraie pour tout n à partir d'une valeur n_0 :

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ P(n) \text{ vraie.}$$

L'idée est la suivante. Imaginons un petit bonhomme qui doit gravir un escalier infiniment haut. Quelles sont les facultés qu'il doit posséder ?

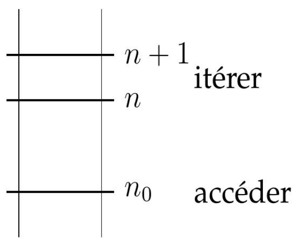
1. Il doit tout d'abord commencer quelque part (initialisation sur une marche numéro n_0).
2. Il doit ensuite être capable, si il est sur une marche quelconque, d'atteindre la suivante.

Ainsi, en commençant à la marche n_0, il peut atteindre la marche n_0+1, puis de la marche n_0+1 atteindre la marche n_0+2, etc., et ainsi gravir tout l'escalier.

Ce principe s'exprime sous la forme d'un axiome :

Axiome d'induction : Une proposition $P(n)$ est vraie $\forall\, n \geqslant n_0$ ssi

1. $P(n_0)$ vraie (on accède à une première marche)
2. $\forall\, n \geqslant n_0,\quad P(n)$ vraie $\Rightarrow\ P(n+1)$ vraie (on passe d'une marche quelconque à la suivante)



Exemple 1.41. Soit S_n définie par

$$S_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + n\cdot n! = \sum_{k=1}^{n} k\cdot k!\,.$$

Démontrer

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (n+1)! - 1\,.$$

Notons $P(n)$: $S_n = (n+1)! - 1$.

1. Pour $n_0 = 1$, vérifions que $P(n_0)$ est vraie :

$$S_{n_0} = S_1 = 1\cdot 1! = 1 \quad \text{et} \quad (n_0+1)! - 1 = 2! - 1 = 1\,.$$

2. A montrer $\forall\, n \geqslant 1 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$
   - Hypothèse de récurrence que l'on suppose vraie $P(n)$: $S_n = (n+1)! - 1$
   - Sous cette condition, montrons alors $P(n+1)$: $S_{n+1} = (n+2)! - 1$.

On calcule

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= S_n + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &\underbrace{=}_{\text{Hyp. récurrence}} (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (1 + n + 1)(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1\,. \end{aligned}$$

◇