Chapitre 5

Logarithme et exponentielle

5.1 Introduction

La première apparition des logarithmes (du Grec "logos" (relation) et "arithmeticos" (nombre) dans l'histoire remonte à 2000 avant J.C. chez les Babyloniens. Des tablettes comptables mettaient en relation des produits dans une colonne avec des sommes dans une autre. Bien plus tard, en 1614, Napier (qui donna son nom au logarithme naturel appelé logarithme népérien) établit de nombreuses tables de correspondances entre somme et produit, qui furent par exemple utilisées par Kepler pour simplifier ses calculs astronomiques.

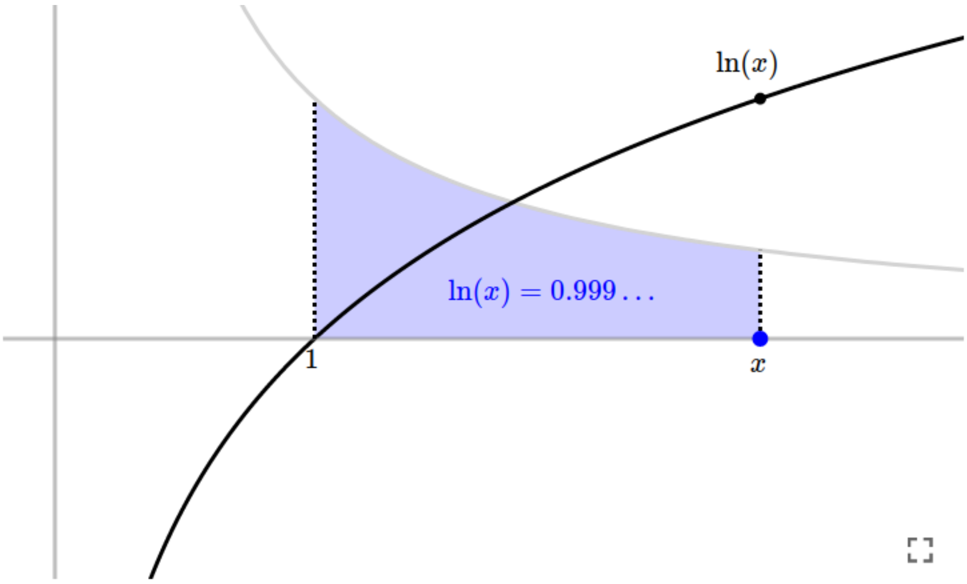
En 1647, Saint-Vincent calcula l'aire sous la courbe $\dfrac{1}{t}$ et en 1661 Huygens remarqua que cette aire est donnée par un logarithme.

5.2 Logarithme

Définition 5.1. On définit le **logarithme naturel** $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Géométriquement, $\ln(x)$ représente l'aire algébrique de la portion du plan délimité par le graphe de $f(t) = \frac{1}{t}$ et les droites $t = 1, t = x, y = 0$.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

De par sa définition,

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
3. $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Le logarithme étant défini comme la fonction-aire associée à $f(t) = \frac{1}{t}$, le Théorème Fondamental de l'Analyse garantit qu'il est dérivable sur $]0, +\infty[$, et qu'en plus

$$\ln'(x) = \left(\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right)' = \frac{1}{x}.$$

En particulier, $\ln(x)$ est strictement croissante, puisque sa dérivée est $\frac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$.

5.2.1 La propriété fondamentale

La propriété la plus importante du logarithme est de transformer des produits en sommes :

Théorème 5.2. *Si* $x, y > 0$, *alors*

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y).$$

Démonstration. Fixons $x, y > 0$. En utilisant la relation de Chasles,

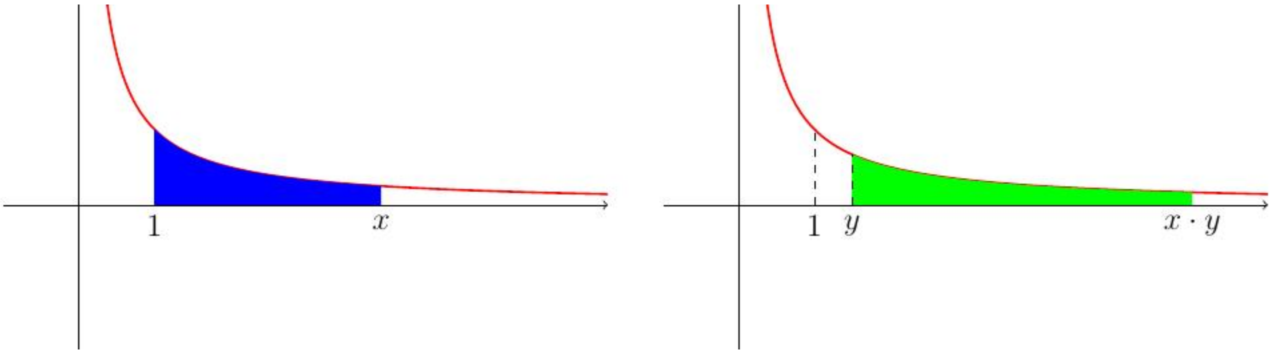
$$\begin{aligned}\ln(x \cdot y) - \ln(y) &= \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt - \int_1^{y} \frac{1}{t} dt \\ &= \int_y^{xy} \frac{1}{t} dt.\end{aligned}$$

Introduisons la nouvelle variable $u = t/y$, qui donne $dt = y\,du$, et donc

$$\int_y^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^{x} \frac{1}{uy} y\,du = \int_1^{x} \frac{1}{u} du = \ln(x),$$

et donc la formule est démontrée.

Remarquons que l'opération qui transforme $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ en $\int_y^{yx} \frac{1}{t}\,dt$ correspond à un "glissement" de la portion du plan sous la courbe entre 1 et x :



Le changement de variable que l'on a opéré dans l'intégrale correspond à appliquer à l'aire bleue la transformation

$$T_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 ,$$

qui a tout couple (a, b) fait correspondre le couple $(ya, \frac{b}{y})$. Par exemple le couple $(1, 1)$ est envoyé sur $(y, 1/y)$, et $(x, 1/x)$ est envoyé sur $(yx, 1/yx)$. On peut montrer que cette transformation préserve les aires, puisqu'elle est linéaire et que sa matrice relativement à la base canonique est donnée par

$$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut 1.

L'aire bleue est égale à $\ln(x)$, l'aire verte vaut $\ln(xy) - \ln(y) =$(aire entre xy et 1)-(aire entre x et 1). Le calcul intégral plus haut revient à montrer que ces aires sont égales. □

On conclut de la propriété précédente :

Corollaire 3. *1.* $\forall x > 0$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

2. $\forall x, y > 0$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
3. $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Démonstration. 1. Si $x > 0$,

$$0 = \ln(1) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) ,$$

et donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
3. La propriété est vérifiée pour $n = 2$, puisque

$$\ln(x^2) = \ln(x \cdot x) = \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x) .$$

Si elle est vraie pour n, alors

$$\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \cdot x) = \ln(x^n) + \ln(x) = n\ln(x) + \ln(x) = (n+1)\ln(x)\,,$$

donc elle est vraie aussi pour $n+1$.

□

La dernière propriété s'étend à des puissances négatives $n < 0$. En effet, si $n = -m$, $m \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}\ln(x^n) = \ln(x^{-m}) = \ln\left(\frac{1}{x^m}\right) &= -\ln(x^m)\\ &= (-m)\ln(x) = n\ln(x)\,.\end{aligned}$$

Elle s'étend également à des exposants rationnels ; on retiendra la règle de calcul : pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$,

$$\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)\,, \quad x > 0$$

5.2.2 Injectivité

Puisque $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, elle est *injective*.
On a donc les équivalences suivantes, utiles pour la résolution d'équations/inéquations : pour tout $u, v > 0$,

$$\begin{aligned}\ln(u) = \ln(v) \quad&\Leftrightarrow\quad u = v\\ \ln(u) < \ln(v) \quad&\Leftrightarrow\quad u < v\\ \ln(u) \leqslant \ln(v) \quad&\Leftrightarrow\quad u \leqslant v\end{aligned}$$

Exemple 5.3. Résolvons

$$\ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln(2)$$

Les logarithmes sont bien définis lorsque $x \in D_{\text{déf}}$, où

$$D_{\text{déf}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x+1 > 0 \text{ et } x+2 > 0\} =]-1, +\infty[\,.$$

Sur $D_{\text{déf}}$,

$$\begin{aligned}\ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln(2) &\iff \ln\left((x+1)(x+2)\right) = \ln(2)\\ &\iff (x+1)(x+2) = 2\\ &\iff x(x+3) = 0\,,\end{aligned}$$

et donc

$$S = D_{\text{déf}} \cap \{0, -3\} = \{0\}\,.$$

◇

Exemple 5.4. Résolvons

$$2\ln(x) > \ln(x+2)\,.$$

Notons d'abord que les deux deux membres de l'inégalité sont bien définis lorsque $x \in D_{\text{déf}}$, où

$$D_{\text{déf}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0 \text{ et } x+2 > 0\} =]0, +\infty[\,.$$

Sur $D_{\text{déf}}$, on a maintenant

$$\begin{aligned} 2\ln(x) > \ln(x+2) &\iff \ln(x^2) > \ln(x+2) \\ &\iff x^2 > x+2 \\ &\iff x^2 - x - 2 > 0 \\ &\iff (x+1)(x-2) > 0\,. \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc

$$\begin{aligned} S &= D_{\text{déf}} \cap (]-\infty, -1[\cup]2, \infty[) \\ &=]2, \infty[\,. \end{aligned}$$

◇

Exemple 5.5. Résolvons

$$\ln(x^2) > \ln(x+2)\,.$$

Notons d'abord que les deux deux membres de l'inégalité sont bien définis lorsque $x \in D_{\text{déf}}$, où

$$D_{\text{déf}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0 \text{ et } x+2 > 0\} =]-2, 0[\cup]0, +\infty[\,.$$

Sur $D_{\text{déf}}$, on a maintenant

$$\begin{aligned} \ln(x^2) > \ln(x+2) &\iff x^2 > x+2 \\ &\iff (x+1)(x-2) > 0\,. \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc

$$S = D_{\text{déf}} \cap (]-\infty, -1[\cup]2, \infty[) =]-2, -1[\cup]2, \infty[\,.$$

◇

5.2.3 Surjectivité

On a dit plus haut que $\ln(x)$ est strictement croissante, mais ceci ne dit pas quel est son comportement lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to 0^+$.

Lemme $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ n'est pas majorée, car

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty\,,$$

et pas minorée, car

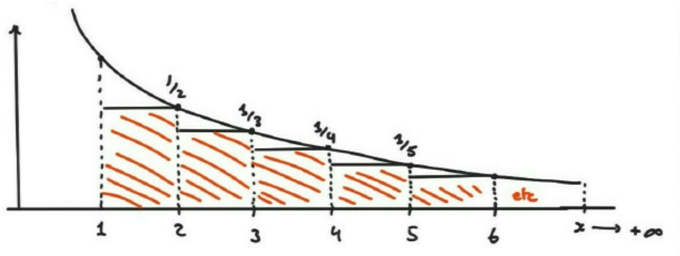
$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty\,.$$

Démonstration. En termes géométriques, la limite

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x)$$

représente l'aire de la région sous le graphe de $f(t) = \frac{1}{t}$, entre $t = 1$ et l'infini.

Considérons une famille infinie de rectangles, tous de largeur égale à 1, situés sous le graphe de $f(t) = \frac{1}{t}$:



L'aire du $k$ème rectangle, dont la base est l'intervalle $[k, k+1]$, a une aire égale à $1 \cdot \frac{1}{k+1}$. Puisque tous ces rectangles sont sous le graphe,

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots$$

(Cette somme infinie est appelée la **série harmonique**.)

On groupe les termes de la somme en paquets, comme suit :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\ &+ \cdots \\ &+ \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

On remarque que la somme que représente le 2ème paquet peut être minorée comme suit :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Pour le troisième paquet, qui contient 4 termes,

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} &= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\ &\geqslant \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On peut faire de même pour le $k$ème paquet : c'est une somme de 2^{k-1} termes, et comme chaque terme est plus grand que le dernier du paquet,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} &\geqslant \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\ &= 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Ceci montre que la somme totale est plus grande qu'une somme d'une infinité de paquets. Comme chaque paquet représente une somme d'au moins $\frac{1}{2}$, ceci montre que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots=+\infty\,,$$

et donc que

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$$

Pour la deuxième limite, le changement de variable $x=\frac{1}{s}$ implique

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=\lim_{s\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{s}\right)=-\lim_{s\to+\infty}\ln(s)=-\infty\,.$$

□

Comme $\ln:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ est dérivable, elle est continue. Les limites au borne du domaine $\mathbb{R}_+^*$, dans le lemme ci-dessus, et le Théorème des valeurs intermédiaires, impliquent que $\mathrm{Im}(\ln)=\mathbb{R}$. On en conclut que $\ln$ est *surjective*.

En particulier, il existe un nombre x tel que $\ln(x)=1$. On note ce nombre e.

Exemple 5.6. Résolvons l'inéquation

$$\ln(1-x)+\ln(x)\leqslant 2\,.$$

Commençons par le domaine de définition : pour que $\ln(1-x)$ et $\ln(x)$ soient bien définis, il faut que $1-x$ et x soient simultanément dans le domaine du logarithme :

$$D_{\text{déf}}=\{x\in\mathbb{R}|1-x>0 \text{ et } x>0\}=]0,1[\,.$$

Sur $D_{\text{déf}}$,

$$\begin{aligned}\ln(1-x)+\ln(x)\leqslant 2 \quad&\Leftrightarrow\quad \ln((1-x)x)\leqslant 2\cdot 1\\&\Leftrightarrow\quad \ln((1-x)x)\leqslant 2\ln(e)\\&\Leftrightarrow\quad \ln((1-x)x)\leqslant \ln(e^2)\\&\Leftrightarrow\quad (1-x)x\leqslant e^2\\&\Leftrightarrow\quad x^2-x+e^2\geqslant 0\,.\end{aligned}$$

Puisque $\Delta=(-1)^2-4e^2<0$ et puisque le coefficient devant x^2 est $1>0$, on a que tout $x\in D_{\text{déf}}$ est solution.

Donc $S=D_{\text{déf}}=]0,1[$. ◇

5.3 Exponentielle

On a vu dans la section précédente que le logarithme naturel

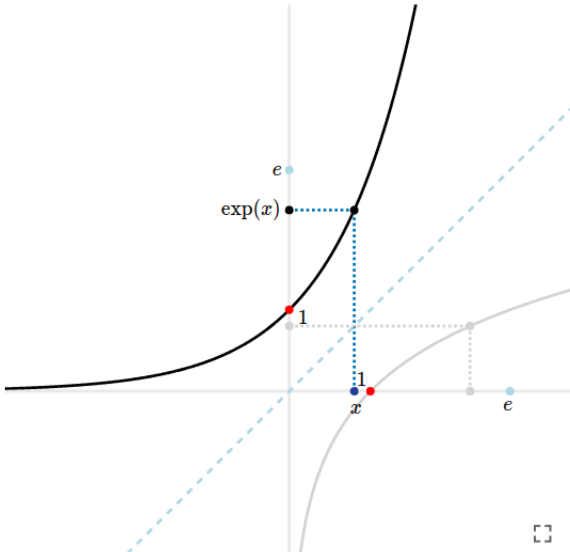
$$\begin{aligned}\ln:\mathbb{R}_+^*&\to\mathbb{R}\\x&\mapsto\ln(x)\end{aligned}$$

est injectif et surjectif, et donc bijectif. Par conséquent, il admet une fonction réciproque.

Définition 5.7. La réciproque du logarithme naturelle est appelée **exponentielle**, et notée

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp(x) \end{aligned}$$

Le graphe de l'exponentielle s'obtient par une réflexion du graphe du $\ln$ à travers l'axe $x = y$.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

Puisque $\exp$ est la réciproque de $\ln$, on a que pour tout $y > 0$,

$$\exp(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln(y)$$

De plus, les propriétés de base du logarithme ont des conséquences immédiates sur l'exponentielle :

- $\ln(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exp(0) = 1$,
- $\ln(e) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \exp(1) = e$,
- $\ln$ strictement croissante $\quad \Longrightarrow \quad$ $\exp$ strictement croissante
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

La propriété fondamentale de la section précédente (le logarithme transforme des produits en sommes) a pour conséquence que l'*exponentielle transforme des sommes en produits* :

Théorème 5.8. $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)\,.$$

Démonstration. Fixons $x, y \in \mathbb{R}$. Comme $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est *bijective*, il existe des uniques a, b tels que $x = \ln(a)$ et $y = \ln(b)$. Par conséquent :

$$\exp(x + y) = \exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(\ln(a \cdot b) = ab = \exp(x) \cdot \exp(y)\,.$$

□

On a aussi que

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

En effet,

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x)\,.$$

Ensuite, on remarque que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, la propriété fondamentale implique

$$\exp(n) = \exp(1 + 1 + \cdots + 1) = (\exp(1))^n = e^n\,.$$

On peut montrer que cette dernière se généralise : pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$,

$$\exp(p/q) = e^{p/q}\,.$$

Cette généralisation suggère que la fonction exponentielle soit également notée "e^x". On utilisera donc, dorénavant, la notation

$$e^x := \exp(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

On a en particulier que

$$e^{-x} = \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{e^x}$$

Pour résoudre des équations/inéquations, on utilisera l'injectivité et la stricte croissance de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} u = v &\Leftrightarrow e^u = e^v \\ u < v &\Leftrightarrow e^u < e^v \\ u \leqslant v &\Leftrightarrow e^u \leqslant e^v \end{aligned}$$

Exemple 5.9. Résolvons

$$e^{3x+1} - 2e^{2x+1} - 3e^{x+1} = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Remarquons que $D_{\text{Déf}} = \mathbb{R}$. On peut commencer par simplifier :

$$\begin{aligned} e^{3x+1} - 2e^{2x+1} - 3e^{x+1} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad ee^{3x} - 2ee^{2x} - 3ee^x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{3x} - 2e^{2x} - 3e^x = 0 \end{aligned}$$

En posant temporairement $y = e^x$, qui est > 0 par définition, cette dernière devient

$$\begin{aligned} y^3 - 2y^2 - 3y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y(y^2 - 2y - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y(y+1)(y-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \{-1, 0, 3\}\,. \end{aligned}$$

Mais puisque on cherche $y > 0$, on ne garde que la solution $y = e^x = 3$. Ainsi, $S = \{\ln(3)\}$ (et cela n'a rien à voir avec la mythologie Grecque !). $\diamond$

La fonction exponentielle a la particularité d'être égale à sa dérivée :

Propriété Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(e^x)' = e^x$$

Démonstration. Puisque l'exponentielle est la réciproque du logarithme, on a

$$\ln(e^x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

En dérivant des deux côtés de cette équation, puisque $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$,

$$\frac{1}{e^x}(e^x)' = 1\,.$$

□

5.3.1 Sur la construction des fonctions $\ln$ et $\exp$

Il existe de nombreuses manières de définir le logarithme naturel et l'exponentielle. A partir de chaque définition, on peut définir l'autre fonction comme la réciproque de la première ou vice-versa. Chaque définition de ces fonctions sont équivalentes entre elles.

1. $\ln(\cdot)$ peut être définie comme l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ satisfaisant
$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)\,, \qquad f(e) = 1\,.$$
2. $\exp(\cdot)$ peut se définir comme l'unique solution de l'équation différentielle $u'(x) = u(x)$ avec $u(0) = 1$ comme condition initiale.
3. $\exp(x)$ peut se définir comme une série entière,
$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$
4. ...

5.3.2 Sur la généralisation de la notion de puissance

Rappelons que pour un exposant n entier, la fonction "puissance" est définie par

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ fois}}$$

Nous avions ensuite étendu cette définition à des exposants rationnels, en posant

$$x^{p/q} := \sqrt[q]{x^p}\,.$$

Maintenant, les fonctions $\ln$ et $\exp$ permettent de généraliser la fonction "puissance" à des exposants réels quelconques.

Définition 5.10. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose, pour tout $x > 0$,

$$x^\alpha := \exp\left(\alpha \cdot \ln(x)\right)\,.$$

Cette définition coïncide avec les deux précédentes, dans les cas où celles-ci sont valides. Par exemple, pour un n entier,

$$\begin{aligned}\exp(n\ln(x)) &= \exp(\ln(x)+\cdots+\ln(x))\\ &= \exp(\ln(x))\cdot\exp(\ln(x))\cdots\exp(\ln(x))\\ &= x\cdot x\cdots x\\ &= x^n\end{aligned}$$

On a aussi la propriété de base qui est vérifiée : pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, et pour tout $x>0$,

$$x^\alpha\cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}\,.$$

Puis, la règle de dérivation classique pour les puissances reste valable :

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\qquad x>0\,.$$

En effet,

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= (\exp(\alpha\ln(x)))'\\ &= \exp(\alpha\ln(x))\,(\alpha\ln(x))'\\ &= \exp(\alpha\ln(x))\frac{\alpha}{x}\\ &= \alpha x^\alpha x^{-1}\\ &= \alpha x^{\alpha-1}\end{aligned}$$

5.4 Base quelconque

L'exponentielle et le logarithme des deux dernières sections permet de généraliser la notion de puissance à des exposants réels (jusqu'à présent, nous pouvions comprendre a^p avec $p\in\mathbb{Q}$ mais pas a^x avec x un irrationnel).

Définition 5.11. Soit $a>0$. On définit l'**exponentielle de base** a comme la fonction

$$\begin{aligned}\exp_a &: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &\quad x\mapsto \exp_a(x) = \exp(x\ln(a))\end{aligned}$$

De par sa définition, $\exp_a$ hérite des mêmes propriétés que $\exp$. On a par exemple la propriété fondamentale :

$$\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\cdot\exp_a(y)\,.$$

Ceci implique pour tout entier n, $\exp_a(n) = a^n$, et donc nous mène à utiliser la notation suivante :

$$a^x := \exp_a(x)\,.$$

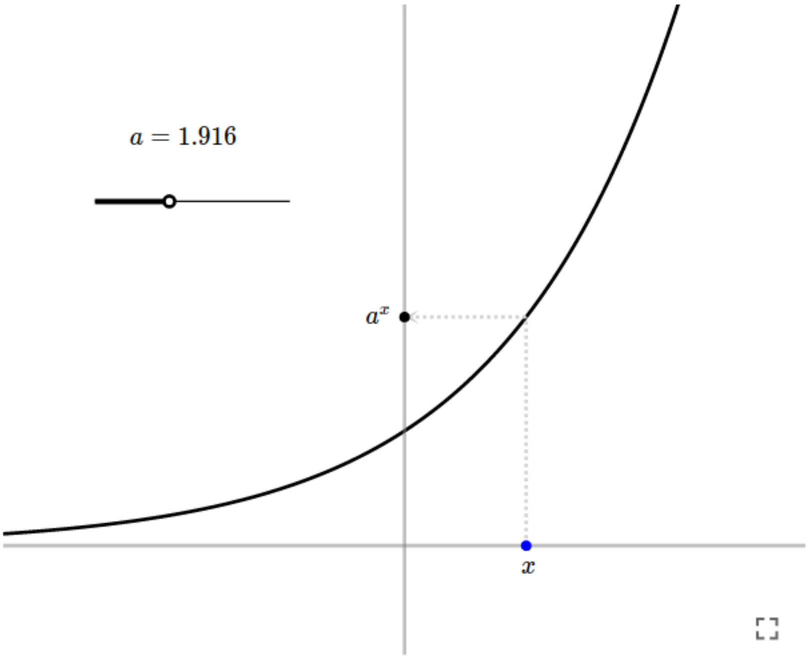
L'exponentielle de base a est également dérivable, et

$$(a^x)' = (\exp(x\ln(a)))' = \exp(x\ln(a))\,(x\ln(a))' = \underbrace{a^x}_{>0}\ln(a)\,.$$

Ainsi,

1. si $0 < a < 1$, alors $\ln(a) < 0$ et a^x est strictement décroissante,
2. si $a = 1$, alors $\ln(a) = 0$ et a^x est constante (égale à 1),
3. si $a > 1$, alors $\ln(a) > 0$ et a^x est stricement croissante.

Sur l'animation ci-dessous, on observe ce changement de monotonicité en faisant varier la base a :



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

Remarquons que

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ +\infty, & a < 1 \end{cases}$$

5.4.1 Logarithme en base $a > 0$

Pour une base $a > 0$, différente de 1, la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est bijective. Elle admet donc une réciproque :

Définition 5.12. Pour une base $a > 0$, $a \neq 1$, la réciproque de $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est appelée **logarithme en base** a :

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \log_a(x) \end{aligned}$$

On a donc, par définition,

$$a^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(y)$$

- Puisque, $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$, on a que

$$\log_e = \ln\ .$$

- Le logarithme en base $a = 10$ est généralement noté simplement "log".

Par construction (il est la réciproque d'une fonction de type exponentielle), le logarithme de base a partage les propriétés et les règles de calcul du logarithme naturel. En particulier $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$.

On peut en fait toujours l'exprimer à l'aide de $\ln$:

Propriété $\forall a > 0$, $a \neq 1$,

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \qquad \forall x > 0\,.$$

Démonstration. Si $y = \log_a(x)$, alors

$$\begin{aligned} y = \log_a(x) \quad &\Leftrightarrow \quad a^y = x \\ &\Leftrightarrow \quad e^{y\ln(a)} = e^{\ln(x)} \\ &\Leftrightarrow \quad y\ln(a) = \ln(x) \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

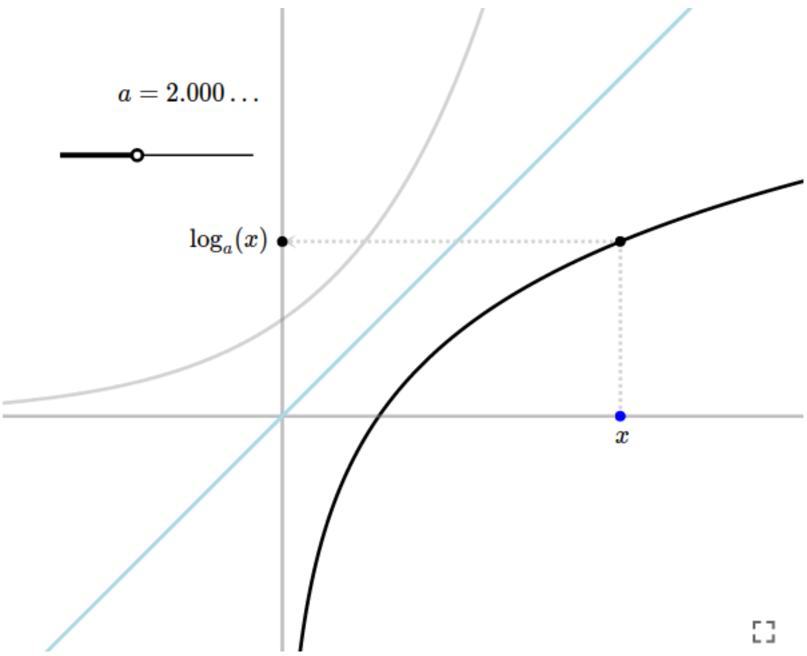
□

On a en particulier que

$$(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\frac{1}{x}\,.$$

Donc
- si $0 < a < 1$, $\log_a$ est strictement décroissant,
- si $a > 1$, $\log_a$ est strictement croissant.

Le graphe de $\log_a$ s'obtient par symétrie d'axe $x = y$ à partir du graphe de a^x (en gris) :



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-1

On observe en particulier que

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ -\infty, & a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & a < 1 \end{cases}$$

Exemple 5.13. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Résolvons

$$\log_a(x) + \log_a(x-2a) \geqslant 2 + \log_a(3)\,.$$

La base a joue donc le rôle d'un paramètre.

Commençons par

$$D_{\text{déf}} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \text{ et } x - 2a > 0\} =]2a, +\infty[\,.$$

Sur $D_{\text{Déf}}$,

$$\begin{aligned} \log_a(x) + \log_a(x-2a) \geqslant 2 + \log_a(3) \\ &\Leftrightarrow \log_a(x(x-2a)) \geqslant 2\cdot 1 + \log_a(3) \\ &\Leftrightarrow \log_a(x(x-2a)) \geqslant 2\log_a(a) + \log_a(3) \\ &\Leftrightarrow \log_a(x(x-2a)) \geqslant \log_a(a^2) + \log_a(3) \\ &\Leftrightarrow \log_a(x(x-2a)) \geqslant \log_a(3a^2) \end{aligned}$$

On disctincte à présent les cas :

- Si $0 < a < 1$, $\log_a$ est décroissant et donc

$$\begin{aligned} \log_a(x(x-2a)) \geqslant \log_a(3a^2) \\ &\Leftrightarrow x(x-2a) \leqslant 3a^2 \\ &\Leftrightarrow (x+a)(x-3a) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x \in [-a, 3a] \\ &\Leftrightarrow x \in]2a, 3a]. \end{aligned}$$

- Si $a > 1$, alors $\log_a$ est croissant et donc

$$\begin{aligned} \log_a(x(x-2a)) \geqslant \log_a(3a^2) \\ &\Leftrightarrow x(x-2a) \geqslant 3a^2 \\ &\Leftrightarrow (x+a)(x-3a) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty, -a] \cup [3a, +\infty[\\ &\Leftrightarrow x \in [3a, +\infty[\end{aligned}$$

En résumé,

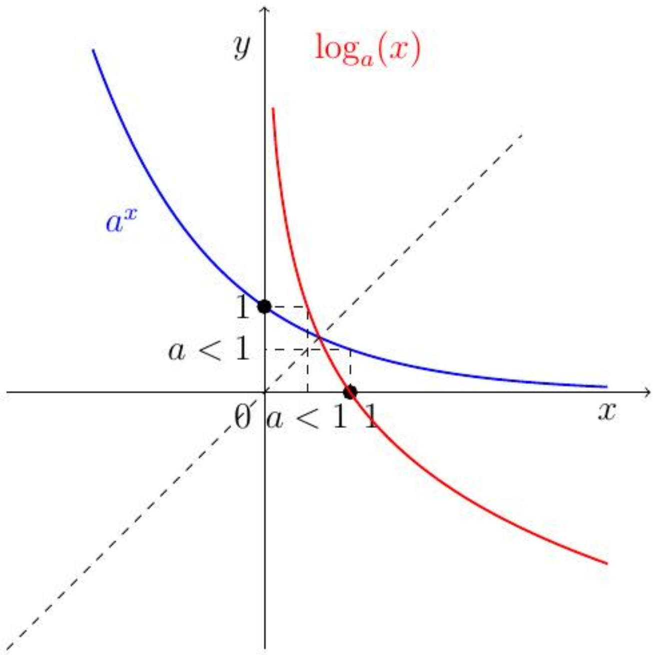
$$S = \begin{cases}]2a, 3a] & \text{si } 0 < a < 1\,, \\ [3a, +\infty[& \text{si } a > 1\,. \end{cases}$$

◇

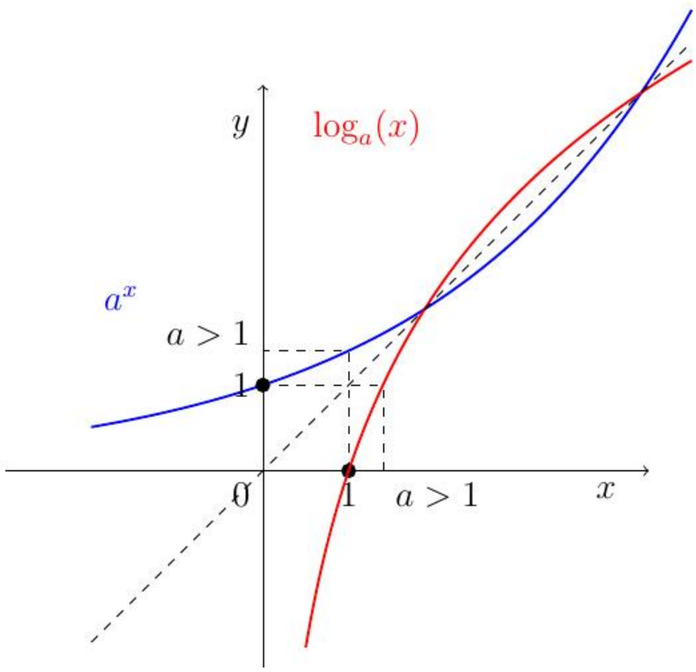
5.4.2 A propos des graphes de $\log_a(x)$ et a^x

On discute des positions relatives des graphes du logarithme et de l'exponentielle, lorsqu'on change la base a. Cette discussion peut s'accompagner de l'animation du dessus, dans laquelle on peut faire varier a.

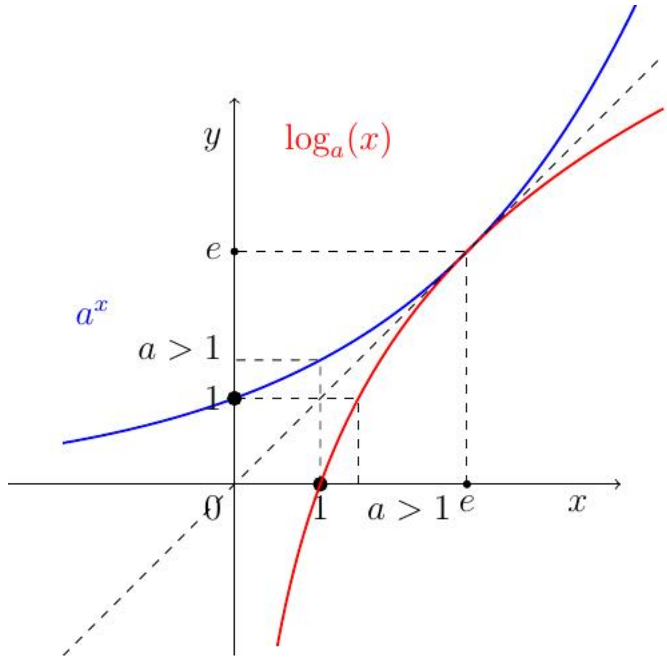
1. Cas où $0 < a < 1$: les courbes se croisent une fois sur la droite $x = y$.



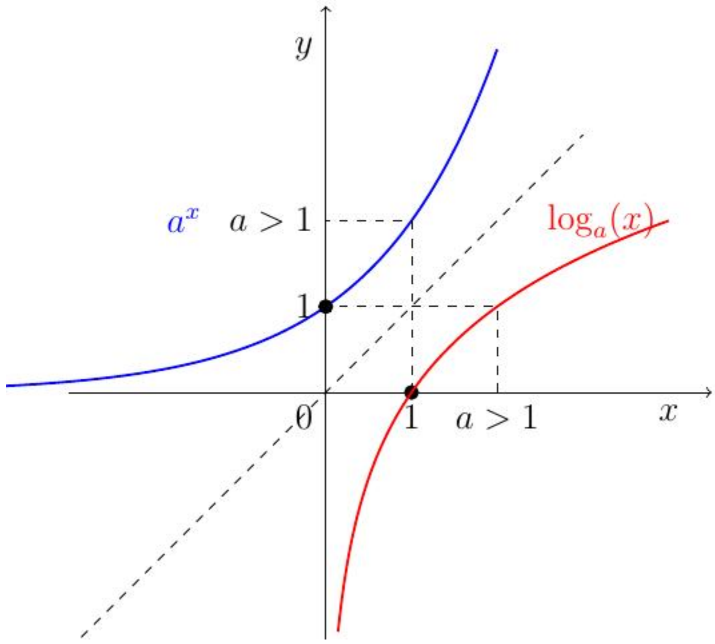
2. Cas où $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$: les courbes se croisent deux fois sur la droite $x = y$.



3. Cas où $a = e^{\frac{1}{e}}$: les courbes se croisent une fois sur la droite $x = y$.



4. Cas où $a > e^{\frac{1}{e}}$: les courbes ne se croisent pas.



Remarque 5.14. On remarque que dans dans certains cas, il existe un nombre x_0 (ou deux) tel que

$$x_0 = a^{x_0} = \log_a(x_0).$$

On appelle ce x_0 un point fixe.
On peut par exemple calculer la valeur critique de la base a pour laquelle il n'y a plus de points fixes. La situation "limite" est quand les graphes de a^x et $\log_a(x)$ se croisent en un seul point sur la droite $x = y$ et sont tangents en ce point à la droite (qui est de pente 1). Ceci amène à résoudre (par exemple) les équations :

$$x_0 = \log_a(x_0) = \frac{\ln(x_0)}{\ln(a)}, \quad \log_a'(x_0) = \frac{1}{\ln(a)x_0} = 1.$$

En résolvant par rapport $\ln(a)$ et x_0, on trouve finalement

$$x_0 = e, \quad \ln(a) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow a = e^{\frac{1}{e}}.$$

$\diamond$