Chapitre 2

Algèbre élémentaire

2.1 Calcul dans $\mathbb{R}$

Propriété $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif qui satisfait aux règles de calcul usuel. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. $a + b = b + a$ ($+$ est commutative)
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ ($+$ est associative)
3. $a + 0 = 0 + a = a$ (0 est l'élément neutre pour $+$)
4. $a + (-a) = 0$ (élément opposé pour $+$)
5. $a \cdot b = b \cdot a$ ($\cdot$ est commutative)
6. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ($\cdot$ est associative)
7. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 est l'élément neutre pour $\cdot$)
8. $a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$ (élément inverse pour $\cdot$)
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivité mixte)

Définition 2.1.

$$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \,|\, a \geqslant 0\}\,,$$
$$\mathbb{R}_- = \{a \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant 0\}\,.$$

Propriété

1. La somme de deux nombres positifs est un nombre positif : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ a + b \in \mathbb{R}_+$.
2. Soient $x, y, a \in \mathbb{R}$. $x = y \Longleftrightarrow x + a = y + a$.
3. Soient $x, y, a \in \mathbb{R}$. $x \leqslant y \Longleftrightarrow x + a \leqslant y + a$.
4. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. $a \leqslant b$ et $b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c$. La réciproque est fausse.
5. Soient $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. $x \leqslant y$ et $a \leqslant b \Longrightarrow x + a \leqslant y + b$. La réciproque est fausse.
6. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}_+,\ ab \in \mathbb{R}_+$.
7. Soient $x, y, a \in \mathbb{R}^*$. $x = y \Longleftrightarrow ax = ay$.
8. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. $ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.
9. Soient $x, y, a \in \mathbb{R}$. $x \geqslant y$ et $a > 0 \Longrightarrow ax \geqslant ay$.

10. Soient $x, y, a \in \mathbb{R}$. $x \geqslant y$ et $a < 0 \Longrightarrow ax \leqslant ay$. Attention au changement du sens de l'inégalité !

Illustration : si $x \in [2,5]$ et si $y \in [1,4]$, que dire de $x-y$?

- Un calcul faux :
$$\begin{array}{rcccl} 2 & \leqslant & x & \leqslant & 5 \\ 1 & \leqslant & y & \leqslant & 4 \\ \hline 2-1=1 & \leqslant & x-y & \leqslant & 1=5-4 \end{array}$$
Pas de soustraction terme à terme !
- Un calcul juste : $1 \leqslant y \leqslant 4 \Leftrightarrow -1 \geqslant -y \geqslant -4$ (attention au changement du sens des inégalités !)
$$\begin{array}{rcccl} 2 & \leqslant & x & \leqslant & 5 \\ -4 & \leqslant & -y & \leqslant & -1 \\ \hline 2-4=-2 & \leqslant & x-y & \leqslant & 4=5-1 \end{array}$$
Ainsi $x-y \in [-2,4]$.

Définition 2.2. Représentation décimale. Un réel positif $x \in \mathbb{R}_+$ peut toujours s'écrire sous la forme
$$x = n + r\,, \qquad n \in \mathbb{N}, r \in [0,1[\,.$$
n et r sont respectivement la partie entière et la partie décimale de x. Comme $0 \leqslant r < 1$, il existe des $d_k \in \{0,\dots,9\}$, $k \in \mathbb{N}^*$ tels que
$$r = d_1 10^{-1} + d_2 10^{-2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} d_k 10^{-k}\,.$$
Les d_k sont appelées les décimales de x et on donne x sous sa représentation décimale
$$x : D(x) = n.d_1 d_2 \dots$$
Pour $x < 0$, on définit $D(x) = -D(-x)$.

Exemple 2.3. $\frac{17}{4} = 4.25$, $-\frac{24}{11} = -2.\overline{18}$, $\pi = 3.14159\dots$, $0.\overline{9} = 1$. ◇

Théorème 2.4. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence*
$$x \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow D(x) \textit{ est soit finie, soit périodique.}$$

Définition 2.5. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La puissance n-ième de a, notée a^n, est le nombre
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}\,.$$

Exemple 2.6.
- $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$
- $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
- $0^4 = 0$.

◇

Propriété Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$

Généralisation aux exposants négatifs ou nuls :

Définition 2.7. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^0 = 1\,.$$

Remarque 2.8. On adopte la convention $0^0 = 1$. ◇

Remarque 2.9. Les propriétés 1 à 3 restent valables pour $m, n \in \mathbb{Z}$. ◇

2.1.1 Fonction signe

Définition 2.10. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Le signe de x , noté $\operatorname{sgn}(x)$, est le nombre

$$\operatorname{sgn}(x) \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Remarque 2.11. La fonction signe est parfois définie en $x = 0$ par $\operatorname{sgn}(0) = 0$. ◇

Propriété Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$.

1. $\operatorname{sgn}(ab) = \operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b)$.
2. $\operatorname{sgn}\left(\frac{a}{b}\right) = \operatorname{sgn}(ab)$.

Exemple 2.12. Etudier le signe de l'expression

$$f(x) = \frac{2(x+1)(x-2)}{(x+2)(3-x)}\,.$$

- $D_{\text{déf}} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$
- Tableau des signes (remarque : le facteur 2 est strictement positif et ne joue pas de rôle)

x		-2		-1		2		3	
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

Ainsi

- $f(x) < 0$ si $x \in\,]-\infty\,, -2\,[\, \cup\,]-1\,, 2\,[\, \cup\,]\,3\,, +\infty[$
- $f(x) = 0$ si $x \in \{-1, 2\}$
- $f(x) > 0$ si $x \in\,]-2\,, -1\,[\, \cup\,]\,2\,, 3\,[$.

◇

2.1.2 Identités algébriques

Propriété Identités remarquables. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + a^2$
2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Ici, $(a+b)$ est l'expression conjuguée de $(a-b)$.
4. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Ici, (a^2+ab+b^2) est l'expression conjuguée de $(a-b)$.
5. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^{n-k}b^{k-1} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Exemple 2.13. Amplification par l'expression conjuguée

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1\,.$$

◇

Exemple 2.14. Amplification par l'expression conjuguée

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\frac{\sqrt[3]{x}^2-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}^2-\sqrt[3]{x}+1} = \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{x+1} = \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{x+1} \qquad (x \neq -1)\,.$$

◇

2.2 Généralités sur les équations

Dans ce chapitre on commence à s'intéresser à la résolution d'équations.

Si f et g sont deux fonctions définies sur $D_{\text{déf}} \subset \mathbb{R}$, on pourra considérer l'équation

$$f(x) = g(x)\,,$$

ou l'inéquation stricte

$$f(x) < g(x)\,,$$

ou l'inéquation large

$$f(x) \leqslant g(x)\,.$$

Résoudre l'équation (ou l'inéquation) (en x), c'est chercher l'ensemble de *toutes* les valeurs de x vérifiant l'équation (ou l'inéquation) ; on l'appellera **ensemble solution** :

$$S = \{x \in D_{\text{déf}} \,|\, x \text{ vérifie l'équation (ou l'inéquation)}\}\,.$$

Remarque 2.15. Dans ce cours, on ne considérera que des (in-)équations où f, g contiennent

- des polynômes
- des valeurs absolues
- des fonctions racines
- des fonctions trigonométriques ou trigonométriques réciproques
- des fonctions logarithmiques ou exponentielles

◇

Dans la recherche de S, il s'agit de passer de la propriété qui définit les solutions à partir de l'équation de départ,

$$E : x \text{ est solution de } f(x) = g(x)$$

à celle, équivalente, qui rend explicite l'ensemble solution :

$$E_{sol} : x \in S \text{ où } S \text{ est l'ensemble solution.}$$

Pour ce faire, on passe par une suite d'étapes intermédiaires équivalentes,

$$E \Leftrightarrow E_1 \Leftrightarrow E_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow E_n \Leftrightarrow E_{sol} \,,$$

où les E_i sont des propriétés impliquant des équations intermédiaires de plus en plus en simples.

Pour aboutir à un ensemble de solutions qui soit exactement le même que celui de l'(in-)équation de départ, chaque équivalence intermédiaire devra contenir une opération qui assure l'équivalence de l'ensemble solution. Cette opération consistera en général *à appliquer une fonction h des deux côtés d'une (in-)égalité*, celle de départ étant $f(x) = g(x)$ (ou $f(x) < g(x)$). Il faudra donc, à chaque étape, s'assurer que 'ensemble des x qui vérifient l'(in-)équation est le même avant et après l'application de h.

À la première étape par exemple, il faudra s'assurer

- que h est *injective* dans le cas des équations

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad h\big(f(x)\big) = h\big(g(x)\big) \,.$$

- que h est *strictement monotone* (et donc aussi injective) dans le cas des inéquations

$$f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad h\big(f(x)\big) < h\big(g(x)\big) \text{ si strictement croissante,}$$

$$f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad h\big(f(x)\big) > h\big(g(x)\big) \text{ si strictement décroissante.}$$

Par exemple, les équations faisant intervenir la fonction racine (voir semaine 5) sont délicates car l'élévation au carré n'est pas injective sur tout $\mathbb{R}$ ou dans le cas d'inéquations avec des fonctions trigonométriques, ces dernières n'étant pas monotones (et pas injectives non plus).

Voici quelques exemples où il est important de respecter cette équivalence :

Exemple 2.16. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$, $P(x) : \sqrt[3]{x} \leqslant 2$.

- $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$
- Equivalence : $\underbrace{\sqrt[3]{x} \leqslant 2}_{P(x)\text{: ens. } A} \Leftrightarrow \underbrace{x \leqslant 2^3 = 8}_{Q(x)\text{: ens. } B}$. Ainsi,

$$S = A = B =]-\infty, 8]$$

◇

Exemple 2.17. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$, $P(x) : x^2 = 64$.

- $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$
- Implication : $\underbrace{x^2 = 64}_{P(x)\text{: ens. } A} \Leftarrow \underbrace{x = 8}_{Q(x)\text{: ens. } B}$. Il n'y a pas équivalence : des solutions sont perdues. En effet, $\{8\} = B \subset A = S = \{-8, 8\}$.

◇

Exemple 2.18. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$: $\sqrt{x} = -4$.

- $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}_+$
- Implication : $\underbrace{\sqrt{x} = -4}_{P(x)\text{: ens. } A} \Rightarrow \underbrace{x = 16}_{Q(x)\text{: ens. } B}$. Il n'y a pas équivalence : on a introduit des « solutions parasites ». En effet, $S = \emptyset = A \subset B = \{16\}$.

◇

2.2.1 Equations avec paramètres

Pour chacun des types d'(in-)équation présenté dans les chapitres suivants, on considérera des (in-)équations **avec paramètres**. Par exemple, pour une équation,

$$f_m(x) = g_m(x)\,,$$

où m est le paramètre de l'équation. Dans ce cas, l'ensemble de définition et l'ensemble solution dépendent a priori de m.

Les équations avec paramètres sont importantes pour plusieurs raisons.

1. Dans la pratique, on cherche à déterminer des solutions en fonction de certains paramètres (par exemple en physique, trajectoire en fonction de la vitesse initiale).
2. Parfois, on cherche à résoudre le problème inverse : quels sont les paramètres nécessaires à l'observation de telle solution particulière.
3. Leur résolution représente un bon exercice méthodologique.

2.3 Équations et inéquations linéaires

2.3.1 Cas général

Définition 2.19. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$ax = b$$

est une **équation linéaire** en $x \in \mathbb{R}$.

On résout facilement une équation linéaire, pour laquelle clairement $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$, en isolant x. On peut le faire en prenant garde à distinguer les valeurs de a : a.

- Cas $a \neq 0$: $ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$, d'où $S = \left\{\frac{b}{a}\right\}$.
- Cas $a = 0$: $ax = b \Leftrightarrow 0x = b$. Ainsi,
  — si $b = 0$, tout x est solution, d'où $S = \mathbb{R}$
  — si $b \neq 0$, aucun x n'est solution, d'où $S = \emptyset$.

Définition 2.20. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$ax > b$$

est une **inéquation linéaire** en $x \in \mathbb{R}$.

Ici aussi, $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$, et on résout également une inéquation linéaire en isolant x, et en prenant garde à distinguant les valeurs et le signe de a :

- Cas $a > 0$: $ax > b \Leftrightarrow x > \frac{b}{a}$, d'où $S = \left]\frac{b}{a}, +\infty\right[$.

- Cas $a = 0$: $ax > b \Leftrightarrow 0x > b$
  — si $b < 0$, tout x est solution, d'où $S = \mathbb{R}$
  — si $b \geqslant 0$, aucun x n'est solution, d'où $S = \emptyset$.
- Cas $a < 0$: $ax > b \Leftrightarrow x < \frac{b}{a}$, d'où $S = \left]-\infty, \frac{b}{a}\right[$.

Un discussion similaire s'adapte pour les inéquations $ax \geqslant b$, $ax < b$ et $ax \leqslant b$.

2.3.2 Avec paramètre

Considérons maintenant des équations linéaires *avec paramètre*.

Un exemple introductif :

Exemple 2.21. Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$, par rapport à $m \in \mathbb{R}$, l'équation

$$mx = 1.$$

On peut résoudre cette équation pour certaines valeurs fixées de m. Par exemple :

1. Si $m = 2$: $2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
2. Si $m = 3$: $3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

On constate que l'ensemble solution dépend de m ; il s'agit donc de déterminer, pour toute valeur de m, l'ensemble des solutions. Formellement, il s'agit de trouver

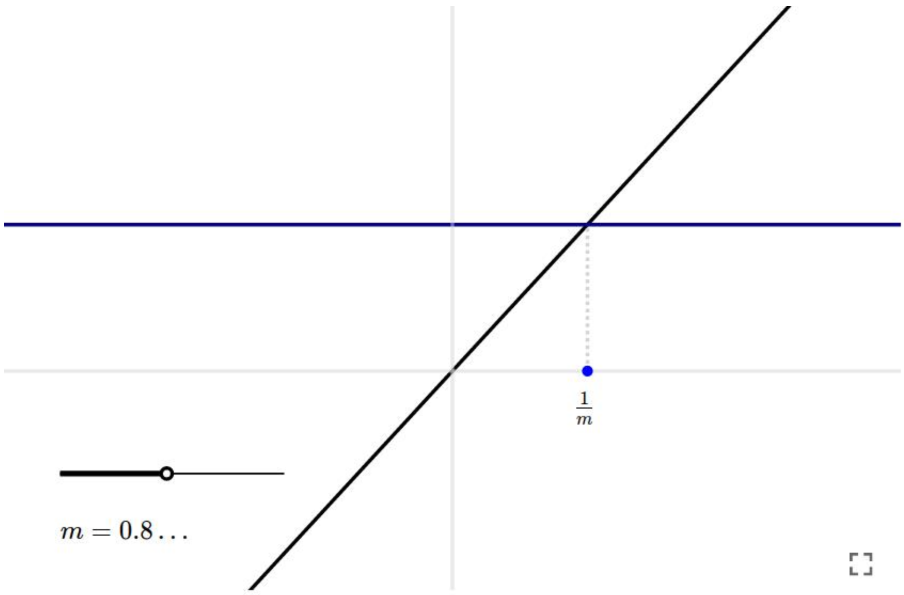
$$\{\text{les paramètres}\} \to \{\text{les ensembles solutions}\}$$
$$m \mapsto S = S(m).$$

Trouvons donc l'ensemble solution de l'équation $mx = 1$, en fonction de m. Pour commencer, remarquons que le domaine de définition de l'équation ne dépend pas de m : $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$. Puis, on cherche à isoler x en prenant garde à éviter la division par zéro.

- Si $m = 0$, l'équation devient $0 \cdot x = 1$ et aucun x n'est solution.
- Si $m \neq 0$, l'équation devient $x = \frac{1}{m}$. On a obtenu une équation si simple qu'elle énonce sa propre solution. Noter que $\frac{1}{m}$ est bien défini car $m \neq 0$ et $\frac{1}{m}$ appartient naturellement à $D_{\text{déf}}$.

Résumons :

- Si $m = 0$, alors $S = \emptyset$.
- Si $m \in \mathbb{R}^*$, alors $S = \left\{\frac{1}{m}\right\}$.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

◇

Remarque 2.22. Attention à ne pas confondre la variable et le paramètre.
- Variable x : c'est l'inconnue, ce que l'on cherche.
- Paramètre m : une donnée, on le connaît (on ne fixe pas de valeur particulière car on traite toutes ses valeurs possibles).

◇

Exemple 2.23. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ par rapport à $m \in \mathbb{R}$ l'équation

$$(m-2)x = m-2.$$

On établit d'abord le domaine de définition : $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$. Puis on cherche à isoler x en prenant garde à la division par zéro. L'erreur serait de simplifier par $m-2$ et conclure que $x = 1$ pour tout valeur de m !
- Si $m = 2$, l'équation devient $0 \cdot x = 0$ et tout x est solution.
- Si $m \neq 2$, l'équation devient $x = 1$.

Résumons :
- Si $m = 2$, alors $S = \mathbb{R}$.
- Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, alors $S = \{1\}$.

◇

Exemple 2.24. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ par rapport à $m \in \mathbb{R}$ l'inéquation

$$m(x-1) \geqslant (x-1)\,.$$

Ici aussi, $D_{df} = \mathbb{R}$. L'erreur à ne pas faire est de diviser par $x-1$ et d'obtenir $m \geqslant 1$ ce qui ne veut rien dire, car m est un paramètre (que l'on peut choisir) et non pas l'inconnue du problème. De plus,
- on ne sait pas si $x-1$ est nul (x est ce que l'on cherche),
- on ne connaît pas le signe de $x-1$ et donc s'il faut intervertir ou non l'inégalité.

On procède en soustrayant $x-1$ des deux côtés (ce qui ne change pas l'ensemble solution) :

$$m(x-1) \geqslant (x-1) \Leftrightarrow (m-1)(x-1) \geqslant 0.$$

La discussion se fait alors en fonction du coefficient $m-1$:
- Si $m = 1$, l'équation devient $0 \cdot (x-1) \geqslant 0$ et tous les x sont solutions.
- Si $m > 1$, alors $m-1 > 0$ et l'équation devient $x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$,
- si $m < 1$, alors $m-1 < 0$ et l'équation devient $x-1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$.

Résumons :
- Si $m = 1$, $S = \mathbb{R}$.
- Si $m > 1$, $S = [1, +\infty[$.
- Si $m < 1$, $S =]-\infty, 1]$.

◇

Exemple 2.25. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$ l'équation,

$$m^2x - m - 4x = 2\,,$$

en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

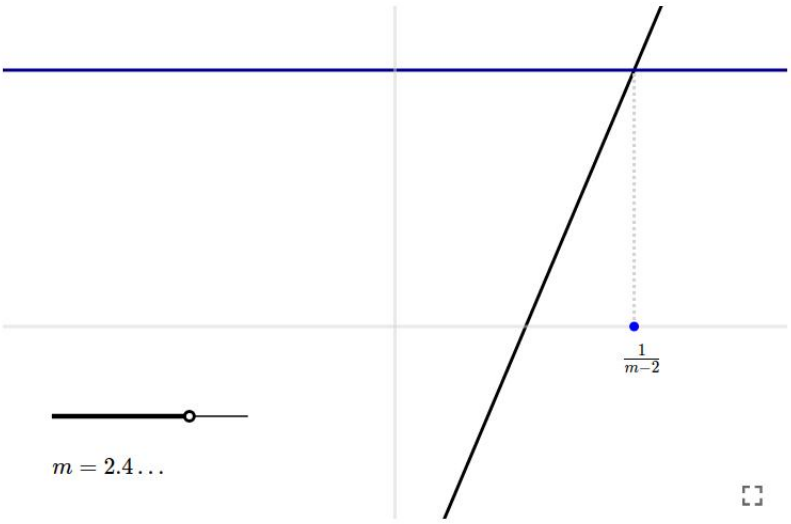
On cherche à isoler x dans $(m^2-4)x = m+2$. Distinguons les valeurs possibles du coefficient devant le x :

- Cas $m^2-4\neq 0$: Dans ce cas $(m+2)(m-2)\neq 0$, qui signifie $m\notin\{-2,2\}$, et on peut diviser des deux côtés par m^2-4 :

$$(m^2-4)x=m+2 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{m+2}{m^2-4}=\frac{1}{m-2}\,,$$

d'où $S=\left\{\frac{1}{m-2}\right\}$.
- Cas $m^2-4=0$: $m\in\{-2,2\}$, qui signifie que
  — si $m=-2$, l'équation devient $0x=0$ et tout x est solution, d'où $S=\mathbb{R}$,
  — si $m=2$, l'équation devient $0x=4$ et aucun x n'est solution, d'où $S=\emptyset$.

Résumons :
- Si $m\notin\{-2,2\}$, $S=\left\{\frac{1}{m-2}\right\}$.
- Si $m=-2$, $S=\mathbb{R}$.
- Si $m=2$, $S=\emptyset$.



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

◇

Exemple 2.26. Résoudre en $x\in\mathbb{R}$ l'inéquation,

$$m^2x-m-4x\leqslant 2\,,$$

en fonction du paramètre $m\in\mathbb{R}$.

On cherche à isoler x dans l'inéquation $(m^2-4)x\leqslant m+2$. Discussion en fonction du coefficient devant le x :
- Cas $m^2-4=(m+2)(m-2)>0$: Ceci correspond à $m\in\,]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]\,2\,,\,+\infty[$, pour lesquels l'équation devient

$$x\leqslant\frac{m+2}{(m+2)(m-2)}=\frac{1}{m-2}\,,$$

d'où $S=\left]-\infty\,,\,\frac{1}{m-2}\right]$.
- Cas $m^2-4=0$: Deux possibilités, $m\in\{-2,2\}$.
  — Si $m=-2$, $0x\leqslant 0$ et tout x est solution, d'où $S=\mathbb{R}$.
  — Si $m=2$, $0x\leqslant 4$ et tout x est solution, d'où $S=\mathbb{R}$.

- Cas $m^2 - 4 = (m+2)(m-2) < 0$: Ceci correspond à $m \in]-2\,,\,2\,[$, pour lesquels l'équation devient
$$x \geqslant \frac{m+2}{(m+2)(m-2)} = \frac{1}{m-2}\,,$$
d'où $S = \left[\,\frac{1}{m-2}\,,\,+\infty\right[$.

En résumé,
- si $m \in]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]\,2\,,\,+\infty[$, $S = \left]-\infty\,,\,\frac{1}{m-2}\right]$
- si $m \in]-2\,,\,2\,[$, $S = \left[\,\frac{1}{m-2}\,,\,+\infty\right[$
- si $m \in \{-2, 2\}$, $S = \mathbb{R}$.

$\diamond$

Exemple 2.27. Résolvons l'inéquation
$$\frac{2x+m}{x} \geqslant 1\,, \qquad D_{df} = \mathbb{R}^*$$
En soustrayant 1 de chaque côté et en simplifiant, celle-ci devient
$$\frac{x+m}{x} \geqslant 0\,.$$
On résout une telle inégalité en établissant un *tableau de signes*. On voit que le numérateur (x) change de signe en 0, et le numérateur change de signe en $-m$. On doit donc prendre garde à séparer les cas.

1. Si $m < 0$: Dans ce cas, $-m > 0$, et le tableau des signes est

x		0		$-m$	
$x+m$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x+m}{x}$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

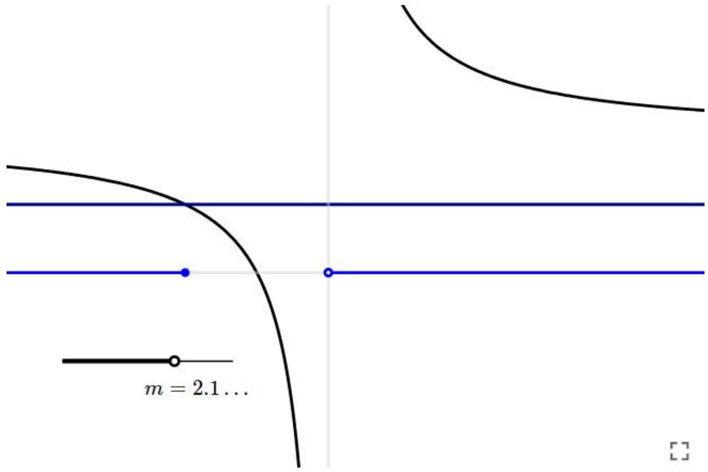
   L'ensemble solution est donc $S =]-\infty, 0[\cup[-m, +\infty[$.

2. Si $m = 0$: Dans ce cas, l'inéquation est $\frac{x}{x} \geqslant 0$, dont l'ensemble solution est $S = \mathbb{R}^*$.
3. Si $m > 0$: Dans ce cas, $-m < 0$, et le tableau des signes est

x		$-m$		0	
$x+m$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+m}{x}$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

   L'ensemble solution est donc $S =]-\infty, -m]\cup]0, +\infty[$.

On a donc
$$S = \begin{cases}]-\infty, 0[\cup[-m, +\infty[& \text{si } m < 0\,, \\ \mathbb{R}^* & \text{si } m = 0\,, \\ ]-\infty, -m]\cup]0, +\infty[& \text{si } m > 0\,. \end{cases}$$
Sur l'animation ci-dessous, on vérifie que le graphe de la fonction $\frac{2x+m}{x}$ est au-dessus de la droite horizontale à hauteur 1 sur les intervalles calculés :



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

◇

2.4 Équations et inéquations du deuxième degré

Définition 2.28. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$. On appelle

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

un **trinôme du deuxième degré** en x, et

$$p(x) = 0$$

est une **équation quadratique** en $x \in \mathbb{R}$.

Avant d'étudier les solutions d'une équation quadratique, remarquons que l'on peut écrire, puisque $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{(2a)^2} - \frac{b^2}{(2a)^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

(Dans la troisième ligne, on a *complété le carré*.) Si $b^2 - 4ac$ est positif, l'expression entre crochets peut être factorisée.

Définition 2.29. $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le **discriminant** du trinôme $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Définition 2.30. Si $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$ est appelé le **discriminant** réduit du trinôme $p(x) = ax^2 + 2b'x + c$, $a, b', c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

2.4.1 Signe du trinôme

- Cas $\Delta > 0$: On peut écrire $\Delta = \sqrt{\Delta}^2$, et donc

$$\begin{aligned} p(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\big(x-x_+\big)\big(x-x_-\big) \end{aligned}$$

où

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

sont les deux **racines** (ou **zéros**) distinctes de $p(x)$. Remarquons que $x_- < x_+$.

Donc dans le cas $\Delta > 0$, l'équation $p(x) = 0$ possède deux solutions distinctes : $S = \{x_-, x_+\}$.

Remarque 2.31. Si $b = 2b'$, $x_\pm = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$. ◇

Etudions encore le signe de $p(x)$:

$$\operatorname{sgn}(p(x)) = \operatorname{sgn}(a) \cdot \operatorname{sgn}(x - x_-) \cdot \operatorname{sgn}(x - x_+)\,.$$

Tableau des signes pour $(x - x_-)(x - x_+)$:

x		x_-		x_+	
$x - x_-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - x_+$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x - x_-)(x - x_+)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi,
— $\operatorname{sgn}(p(x)) = \operatorname{sgn}(a)$ pour tout $x \in]-\infty, x_-[\cup]x_+, +\infty[$
— $\operatorname{sgn}(p(x)) = -\operatorname{sgn}(a)$ pour tout $x \in]x_-, x_+[$

- Cas $\Delta = 0$: Dans ce cas,

$$p(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Les deux racines de $p(x)$ sont confondues,

$$x_- = x_+ = -\frac{b}{2a}\,,$$

et la discussion du signe de $p(x)$ est immédiate :

$$\operatorname{sgn}(p(x)) = \operatorname{sgn}(a) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{b}{2a}\right\}.$$

- Cas $\Delta < 0$: Dans ce cas, $p(x)$ n'a pas de racine réelle, et

$$\operatorname{sgn}(p(x)) = \operatorname{sgn}(a) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Remarque 2.32. La discussion du signe de $p(x)$ est la même avec Δ'. ◇

Remarque 2.33. Si x_- et x_+ sont deux racines (distinctes ou confondues) du trinôme $p(x) = ax^2 + bx + c$, alors

$$\begin{aligned} x_- + x_+ &= -\frac{b}{a} \\ x_- \cdot x_+ &= \frac{c}{a}\,. \end{aligned}$$

On appelle ces dernières les **formules de Viète**. ◇

2.4.2 Représentation graphique

Considérons le **graphe** de p, c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant $y = p(x) = ax^2 + bx + c$:

$$\Gamma : \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in \mathbb{R},\, y = p(x)\}\,.$$

Puisque l'on suppose $a \neq 0$, on appelle Γ une **parabole**.

En utilisant la factorisation de $p(x)$ obtenue plus haut,

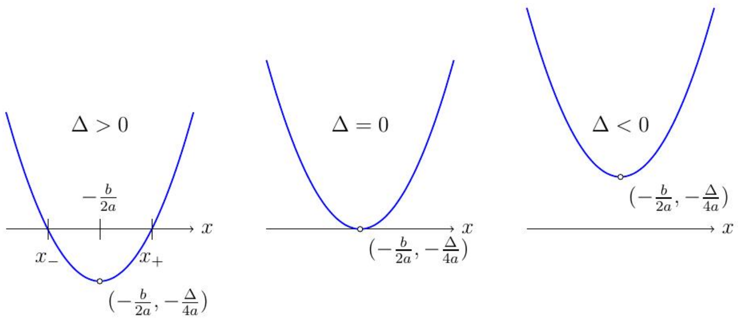
$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\,,$$

on conclut que Γ s'obtient à partir de la parabole élémentaire $y = x^2$ par

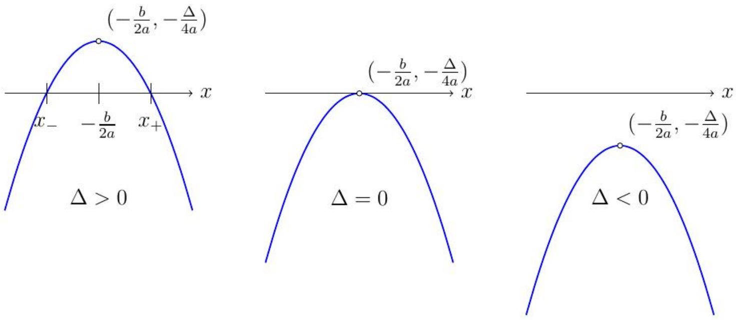
1. translation horizontale (selon x) de $-\frac{b}{2a}$
2. amplification (multiplication) verticale par a
3. translation verticale (selon y) de $-\frac{\Delta}{4a}$.

Ceci permet d'en déduire les propriétés suivantes :

1. Γ possède un axe de symétrie, vertical, d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.
2. Les coordonnées du sommet (x_s, y_s) de Γ sont
$$x_s = -\frac{b}{2a} \qquad y_s = -\frac{\Delta}{4a}\,.$$
3. Les intersections de Γ avec l'axe des x sont données par les racines (s'il y en a) de $p(x)$.
4. Si $a > 0$: Γ est tournée vers le haut (les branches infinies vont vers les y positifs) et $p(x)$ admet un minimum.



5. Si $a < 0$: Γ est tournée vers le bas (les branches infinies vont vers les y négatifs) et $p(x)$ admet un maximum.



Remarque 2.34. L'abscisse du sommet est bien la moyenne des racines :

$$x_s = \frac{x_- + x_+}{2} = \frac{-b/a}{2} = -\frac{b}{2a}\,.$$

◇

2.4.3 Exemples avec paramètre

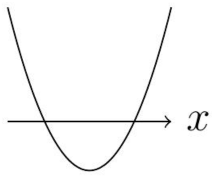
Exemple 2.35. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation suivante, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - 1 \leqslant m(x-1)\,,$$

En regroupant et en factorisant, l'équation devient

$$(x-1)(x+1) - m(x-1) \leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)(x+1-m) \leqslant 0\,.$$

Les racines du trinôme sont 1 et $m-1$.

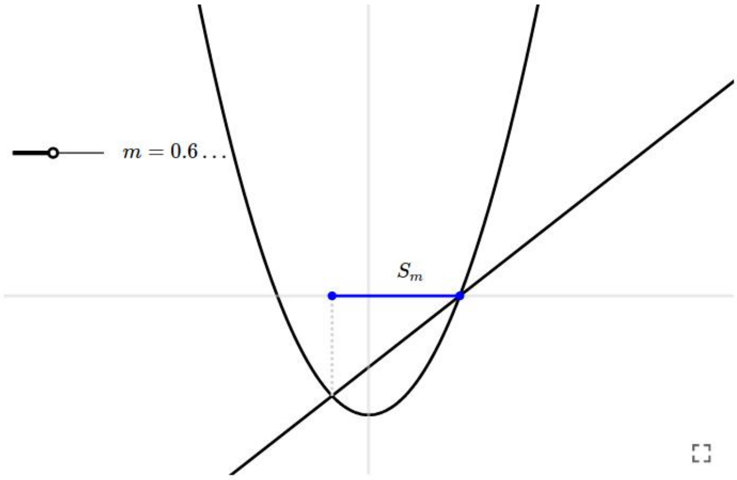


- Si $1 < m-1 \Leftrightarrow m > 2$, $S = [\,1\,,\,m-1\,]$.
- Si $1 = m-1 \Leftrightarrow m = 2$, $S = \{1\}$.
- Si $1 > m-1 \Leftrightarrow m < 2$, $S = [\,m-1\,,\,1\,]$.

En résumé,

$$S = \begin{cases} [\,m-1\,,\,1\,] & \text{si } m < 2 \\ \{1\} & \text{si } m = 2 \\ [\,1\,,\,m-1\,] & \text{si } m > 2\,. \end{cases}$$

Si on interprète l'ensemble des solutions de $x^2 - 1 \leqslant m(x-1)$ comme étant l'ensemble des abscisses x pour lesquelles la parabole $y = x^2 - 1$ est au-dessous de la droite $y = m(x-1)$, on peut vérifier sur l'animation ci-dessous que notre ensemble solution est le bon :



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

◇

Exemple 2.36. Soit p le trinôme

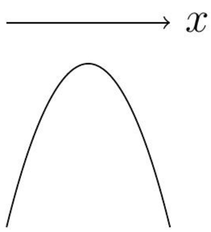
$$p(x) = kx^2 - 2(k+1)x + 5 - \frac{1}{k}\,.$$

Déterminer les valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}^*$ pour lesquelles la parabole Γ (graphe de p) soit située strictement sous l'axe Ox.

Pour que Γ soit entièrement sous Ox, il faut que $p(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela signifie :

1. Pas d'intersection avec Ox : $\Delta < 0$
2. Γ tournée vers le bas : coefficient devant x^2 négatif, $k < 0$.

Figure d'étude :

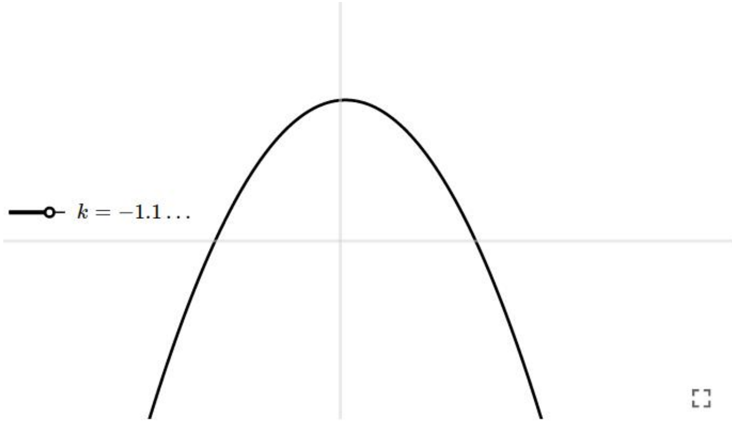


Regardons ce que ces conditions impliquent sur k. D'abord, si on tient compte de la présence de k dans les coefficients du trinôme,

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2(k+1))^2 - 4k(5 - \tfrac{1}{k}) \\ &= 4(k^2 - 3k + 2) \\ &= 4(k-1)(k-2)\end{aligned}$$

Les valeurs de k qui garantissent $\Delta < 0$ (première condition ci-dessus) sont donc $k \in]1,2[$. Ensuite, on a vu que la deuxième condition impose $k < 0$. Comme on ne doit garder que les k qui satisfont aux deux conditions en même temps, $k \in]1,2[$ et $k < 0$. Comme ces deux conditions sont incompatibles, on conclut qu'il n'y a *aucun* k qui satisfait à la condition requise.

Effectivement, on vérifie sur l'animation ci-dessous qu'il n'y a pas de valeurs de $k < 0$ pour lesquelles la parabole $p(x) = kx^2 - 2(k+1)x + 5 - \frac{1}{k}$ est entièrement sous l'axe O_x :



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

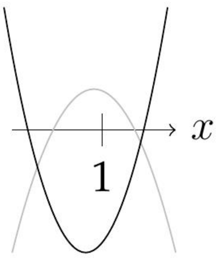
(Il y a bien les valeurs de k $\in]1, 2[$ pour lesquelles la parabole ne coupe pas Ox, mais ces valeurs sont positives...) $\diamond$

Exemple 2.37. Soit p le trinôme

$$p(x) = mx^2 - mx - (m+1)\,.$$

Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}^*$ pour lesquelles $p(x)$ possède deux racines distinctes x_- et x_+ vérifiant $x_- < 1 < x_+$.

Figure d'étude : 1) la parabole doit doit couper Ox en deux points, et 2) $x = 1$ doit être entre ces deux points :



Détaillons les deux conditions ci-dessus.

1. Pour couper Ox en deux points, il faut que $\Delta > 0$, où

$$\begin{aligned}\Delta &= (-m)^2 + 4m(m+1)\\ &= m(5m+4)\,.\end{aligned}$$

   Donc l'ensemble des valeurs de m qui satisfont à la première condition est

$$S_a =]-\infty\,,\,-\tfrac{4}{5}\,[\,\cup\,]\,0\,,\,+\infty[$$

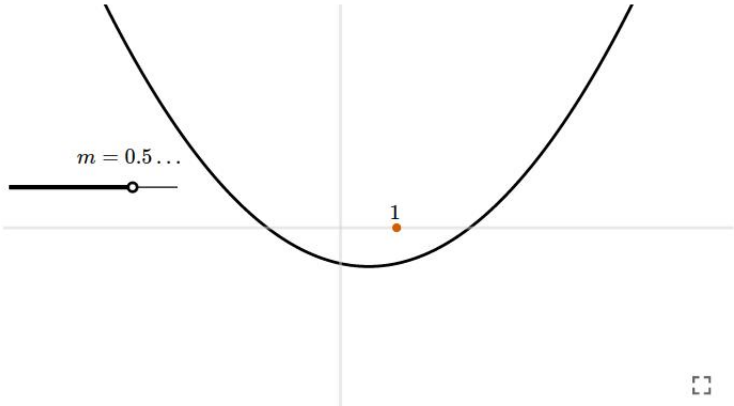
2. Pour que $x = 1$ se trouve entre les deux racines, il faut que le coefficient de x^2 soit opposé au signe de $p(1)$, ou plus simplement que leur produit soit strictement négatif : $m \cdot p(1) < 0$. Comme $p(1) = m - m - (m+1) = -m - 1$, la condition sur m est donc $-m(m+1) < 0$. Ainsi, l'ensemble des valeurs de m qui satisfont à la deuxième condition est

$$S_b =]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,0\,,\,+\infty[$$

Ainsi, l'ensemble des valeurs de m qui satisfont aux deux conditions en même temps est

$$S = S_a \cap S_b =]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,0\,,\,+\infty[\,.$$

On peut vérifier le résultat sur l'animation ci-dessous :



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

◇

2.5 Équations et inéquations avec valeur absolue

Définition 2.38. Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est le réel positif ou nul

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Exemples 2.39.
- $|3| = 3$
- $|-7| = -(-7) = 7$

◇

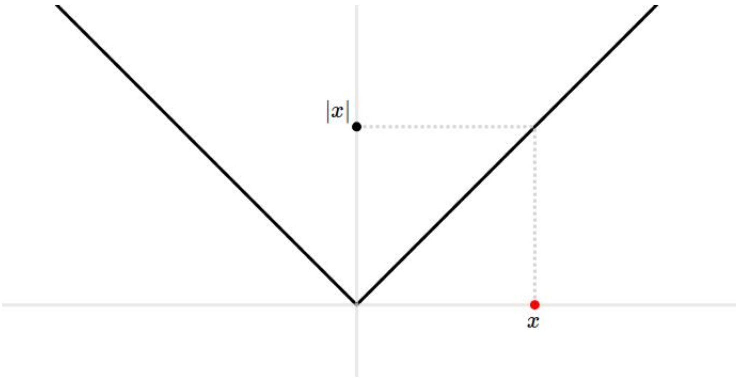
Lorsque la valeur absolue contient une expression qui dépend d'une variable, on doit étudier le signe de cette expression.

Exemple 2.40.

$$\begin{aligned} |x^2-1| &= \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x^2-1 \geqslant 0\,, \\ -(x^2-1) & \text{si } x^2-1 < 0\,, \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\,, \\ -(x^2-1) & \text{si } x \in]-1,1[\,. \end{cases} \end{aligned}$$

◇

Le graphe de la fonction $x \mapsto |x|$:



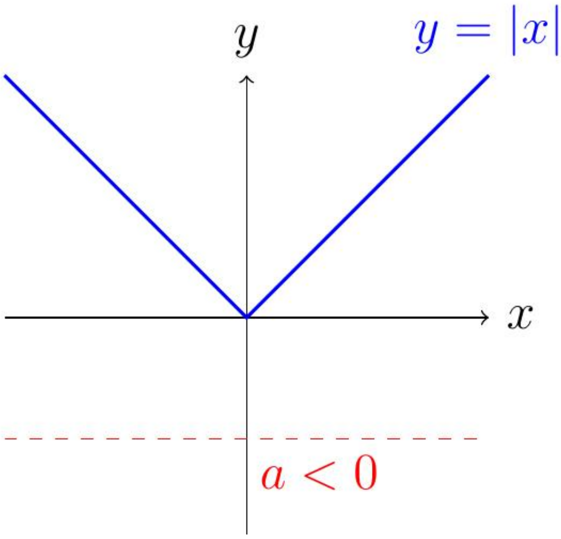
Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

Propriété Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

1. $|x| \geqslant 0$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $|x|^2 = x^2$
4. $|x| = |-x|$
5. $x = \operatorname{sgn}(x)\,|x|$, $|x| = \operatorname{sgn}(x)\,x$
6. $|x| = \max(x, -x)$
7. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
8. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)
9. $|xy| = |x|\,|y|$.

2.5.1 L'équation $|x| = a$

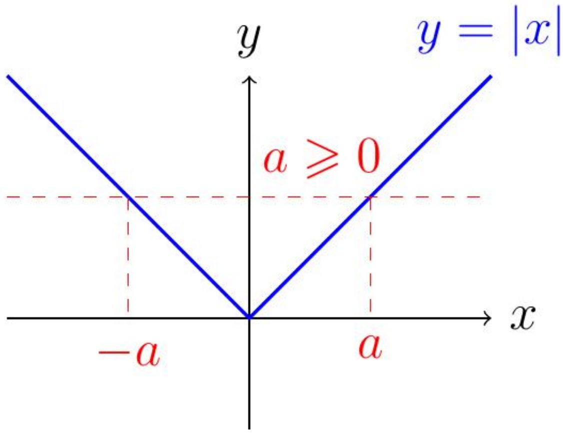
Puisque $|x| \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $|x| = a$, $a \in \mathbb{R}$, ne peut clairement pas avoir de solution si $a < 0$. Ceci s'interprète graphiquement, en voyant que le graphe de $|x|$ n'intersecte pas une droite horizontale à hauteur $a < 0$:



Théorème 2.41. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence*

$$|x| = a \qquad \Leftrightarrow \qquad a \geqslant 0 \text{ et } \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a\,. \end{cases}$$

Graphiquement, le graphe de $|x|$ intersecte une droite horizontale en deux points lorsque celle-ci est à hauteur $a > 0$:



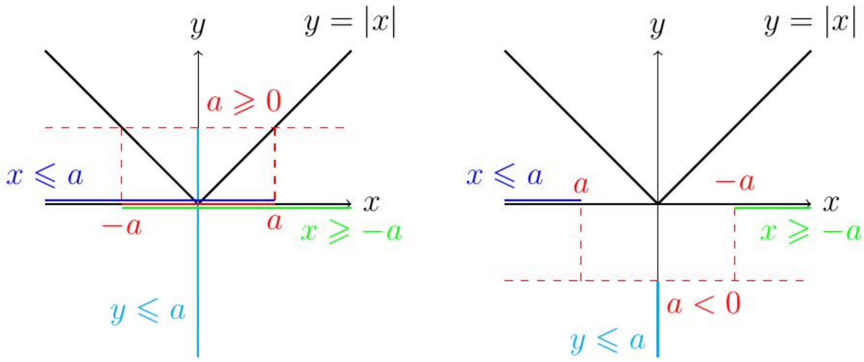
En résumé, l'ensemble solution S de l'équation $|x| = a$ est donné par

1. $S = \{-a, a\}$ si $a \geqslant 0$,
2. $S = \emptyset$ si $a < 0$.

2.5.2 L'inéquation $|x| \leqslant a$

Théorème 2.42. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence*

$$|x| \leqslant a \qquad \Leftrightarrow \qquad -a \leqslant x \leqslant a \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x \leqslant a \\ \text{et} \\ x \geqslant -a\,. \end{cases}$$



Si $a < 0$, alors il n'existe aucun x qui satisfait à la fois $x \leqslant a < 0$ *et* $x \geqslant -a > 0$. Il n'y a donc pas besoin d'inclure de condition de positivité ("$a \geqslant 0$") dans la résolution de l'inéquation.

En résumé, l'ensemble solution de l'inéquation $|x| \leqslant a$ est

1. $S = [-a, a]$ si $a \geqslant 0$,
2. $S = \emptyset$ si $a < 0$.

2.5.3 L'inéquation $|x| \geqslant a$

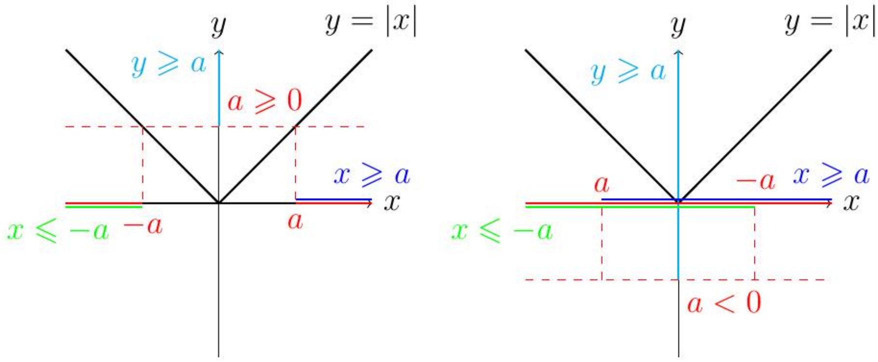
L'équation $|x| \geqslant a$, $a \in \mathbb{R}$, admet évidemment tout $x \in \mathbb{R}$ comme solution si $a < 0$, une valeur absolue étant toujours plus grande qu'un nombre négatif. Il n'est donc pas nécessaire de discuter le signe de a!

Théorème 2.43. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence*

$$|x| \geqslant a \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x \geqslant a \\ \textit{ou} \\ x \leqslant -a\,. \end{cases}$$

Similairement à l'inéquation précédente, on constate qu'il n'y a pas besoin de discuter du signe de a. En effet, $a < 0$ signifie que l'inéquation admet une infinité de solutions, puisque dans ce cas

$$]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[= \mathbb{R}\,.$$



En résumé, l'ensemble solution S de l'équation $|x| \geqslant a$ est donné par

1. $S =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ si $a \geqslant 0$,
2. $S = \mathbb{R}$ si $a < 0$.

2.5.4 Équations à valeurs absolues

L'équivalence vue plus haut,

$$|x| = a \qquad \Leftrightarrow \qquad a \geqslant 0 \text{ et } \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a\,. \end{cases}$$

peut se généraliser au cas où x et a deviennent des *fonctions*.

Soient f et g deux fonctions réelles. Pour $x \in D_{\text{déf,f}} \cap D_{\text{déf,g}} = D_{\text{déf}}$, on a l'équivalence

$$|f(x)| = g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x)\,. \end{cases}$$

Remarque 2.44. On ne discute que le signe de $g(x)$ (condition de positivité), et pas celui de $f(x)$. On doit donc résoudre l'équation $|f(x)| = g(x)$ sur $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}}$, où

$$D_{\text{pos}} = \{x \in D_{\text{déf}} \,|\, g(x) \geqslant 0\} .$$

$\diamond$

Exemple 2.45. Résolvons, en $x \in \mathbb{R}$, l'équation

$$|x^2 + 2x - 5| = x + 1 .$$

Sur $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$, l'équation $|x^2 + 2x - 5| = x + 1$ est équivalente à

$$x + 1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^2 + 2x - 5 = x + 1 & (1) \\ \text{ou} & \\ x^2 + 2x - 5 = -(x + 1) . & (2) \end{cases}$$

La condition de positivité $x + 1 \geqslant 0$ donne $D_{\text{pos}} = [-1, +\infty[$.

1. Résolvons (1) sur $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}} = [\,-1, +\infty[\,$:

$$x^2 + x - 6 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x + 3)(x - 2) = 0 ,$$

d'où $S_1 = \{2\}$. (On ne garde pas -3, car hors du domaine de positivité : $-3 \notin [-1, +\infty[$.)

2. Résolvons (2) sur $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}}$:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x + 4)(x - 1) = 0 ,$$

d'où $S_2 = \{1\}$. (On ne garde pas -4, car hors du domaine de positivité : $-4 \notin [-1, +\infty[$.)

En résumé, $S = S_1 \cup S_2 = \{1, 2\}$. $\diamond$

Exemple 2.46. Résolvons en $x \in \mathbb{R}$ l'équation

$$|x - 3m + 4| = x + m ,$$

où le paramètre $m \in \mathbb{R}$.
Sur $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$, la condition de positivité est

$$D_{\text{pos}} = \{x \,|\, x + m \geqslant 0\} = [-m, +\infty[\, ,$$

ce qui donne $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}} = [-m, +\infty[$.

Ensuite, sur $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}}$, on résout $|x - 3m + 4| = x + m$, qui s'exprime par

$$\begin{cases} x - 3m + 4 = x + m & (1) \\ \text{ou} & \\ x - 3m + 4 = -x - m . & (2) \end{cases}$$

1. Résolvons (1) sur $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}}$:

$$x - 3m + 4 = x + m \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \cdot x = 4(m - 1)$$

On discute les cas :

- Si $m = 1$ alors l'équation devient $0 \cdot x = 0$, qui est satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc en ne gardant que ce qui est dans $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}}$, on obtient $S_1 = [-1, +\infty[$.
- Si $m \neq 1$ alors l'équation devient

$$0 \cdot x = \underbrace{4(m-1)}_{\neq 0},$$

qui n'a aucune solution, et donc $S_1 = \emptyset$.

2. Résolvons ensuite (2) sur $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}}$,

$$x - 3m + 4 = -x - m \qquad \Leftrightarrow \qquad x = (m-2)\,,$$

dont la solution est $x = m - 2$. Mais on ne veut garder cette solution que si elle appartient à $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}}$, c'est-à-dire si

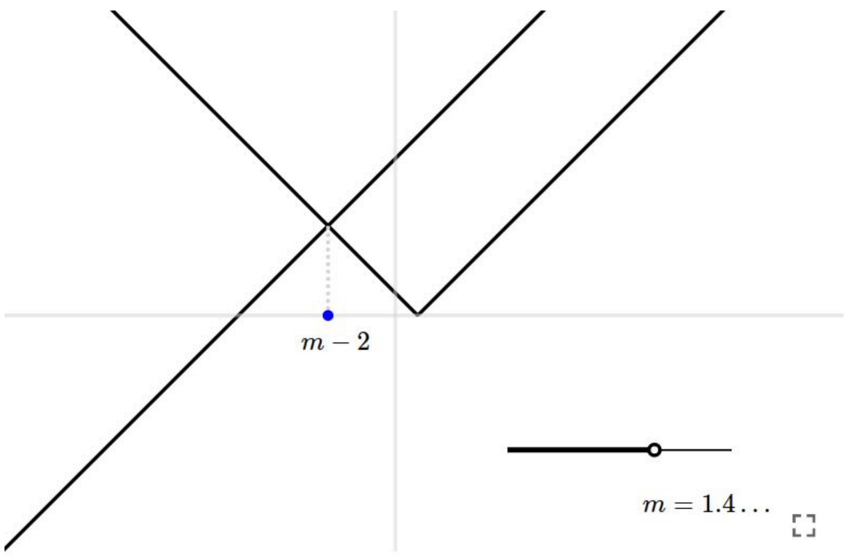
$$\begin{aligned} m - 2 \in [-m, +\infty[\qquad &\Leftrightarrow \qquad m - 2 \geqslant -m \\ &\Leftrightarrow \qquad m \geqslant 1\,. \end{aligned}$$

On a donc :
- Si $m \geqslant 1$, alors $S_2 = \{m - 2\}$.
- Si $m < 1$, alors $S_2 = \emptyset$.

Finalement on résume la discussion en prenant l'ensemble solution $S = S_1 \cup S_2$ en fonction de m :

$$S = \begin{cases} \emptyset & \text{si } m < 1\,, \\ [-1, +\infty[& \text{si } m = 1\,, \\ \{m-2\} & \text{si } m > 1\,. \end{cases}$$

On observe ces solutions sur l'animation ci-dessous. En bleu, l'ensemble des solutions $x \in S$, donnant l'ensemble des points où le graphe de $|x - m + 4|$ coupe la droite $x + m$:



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

◇

2.5.5 Inéquations $|f(x)| \leqslant g(x)$

On va ensuite généraliser l'inéquation

$$|x| \leqslant a \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x \leqslant a \\ \text{et} \\ x \geqslant -a \end{cases}$$

au cas où x et a sont remplacés par des fonctions de x.

Soient f et g deux fonctions réelles. Pour $x \in D_{\text{déf,f}} \cap D_{\text{déf,g}} = D_{\text{déf}}$, on a l'équivalence

$$|f(x)| \leqslant g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} f(x) \leqslant g(x) \\ \text{et} \\ f(x) \geqslant -g(x)\,. \end{cases}$$

Comme déjà expliqué, il n'est pas nécessaire de discuter du signe de $g(x)$.

Remarque 2.47. L'équivalence reste vraie en remplaçant les inégalités larges par les inégalités strictes. ◇

Exemple 2.48. Résolvons, en $x \in \mathbb{R}$, l'inéquation

$$|x| + \frac{x-1}{2} < 0\,.$$

Sur $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$,

$$|x| < -\frac{x-1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x < -\frac{x-1}{2} & (1) \\ \text{et} \\ x > \frac{x-1}{2}\,. & (2) \end{cases}$$

1. Résolvons (1) sur $D_{\text{déf}}$: $3x < 1$ et donc $S_1 =]-\infty, \frac{1}{3}[$.
2. Résolvons (2) sur $D_{\text{déf}}$: $x > -1$, et donc $S_2 =]-1, +\infty[$.

En conclusion,

$$S = S_1 \cap S_2 =]-1, \tfrac{1}{3}[\,.$$

◇

Exemple 2.49. Résolvons, en $x \in \mathbb{R}$, l'inéquation

$$|x-m| - 1 < 2x\,,$$

où le paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Sur $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$,

$$|x-m| < 2x+1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x-m < 2x+1 & (1) \\ \text{et} \\ x-m > -2x-1\,. & (2) \end{cases}$$

1. Résolvons (1) sur $D_{\text{déf}}$: $-m-1 < x$, d'où $S_1 =]-m-1, +\infty\,[$.
2. Résolvons (2) sur $D_{\text{déf}}$: $3x > m-1$, d'où $S_2 = \left]\frac{m-1}{3}, +\infty\right[$.

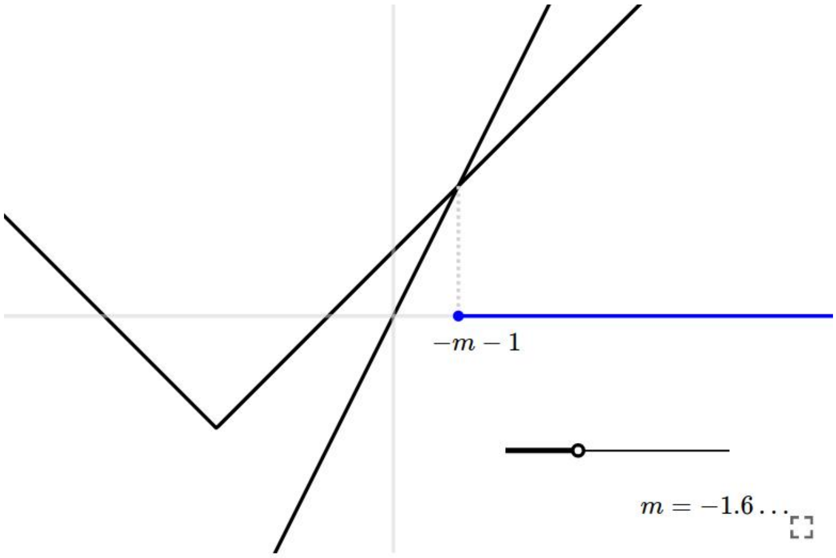
Pour pouvoir conclure, il faut calculer $S = S_1 \cap S_2$. Or cette intersection va dépendre de m, et pour le comprendre, il faut quel intervalles, S_1 ou S_2, a son extrémité gauche plus petite que celle de l'autre. On peut donc par exemple regarder quand S_2 a son extrémité gauche inférieure à celle de S_1 :

$$-m - 1 \geqslant \frac{m-1}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad m \leqslant -\frac{1}{2}.$$

On peut donc conclure que

- si $m \leqslant -\frac{1}{2}$, alors $S = S_1 \cap S_2 = S_1 =]-m-1, +\infty[$,
- si $m > -\frac{1}{2}$, alors $S = S_1 \cap S_2 = S_2 = \left]\frac{m-1}{3}, +\infty\right[$.

Graphiquement, l'animation ci-dessous permet de vérifier que l'ensemble S décrit bien les points pour lesquels le graphe de $y = |x - m| - 1$ est au-dessous de la droite $y = 2x$:



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

◇

2.5.6 Inéquations $|f(x)| \geqslant g(x)$

On va ensuite généraliser l'inéquation

$$|x| \geqslant a \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x \geqslant a \\ \text{ou} \\ x \leqslant -a \end{cases}$$

au cas où x et a sont remplacés par des fonctions de x.

Soient f et g deux fonctions réelles. Pour $x \in D_{\text{déf,f}} \cap D_{\text{déf,g}} = D_{\text{déf}}$, on a l'équivalence

$$|f(x)| \geqslant g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} f(x) \geqslant g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) \leqslant -g(x)\,. \end{cases}$$

Remarque 2.50. L'équivalence reste vraie en remplaçant les inégalités larges par les inégalités strictes. ◇

Exemple 2.51. Résolvons, en $x \in \mathbb{R}$, l'inéquation
$$|x-2| > \frac{2x-4}{x}\,.$$
Sur $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}^*$, on a
$$|x-2| > \frac{2x-4}{x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x-2 > \frac{2x-4}{x} & (1) \\ \text{ou} & \\ x-2 < -\frac{2x-4}{x}\,. & (2) \end{cases}$$

1. Résolvons (1) sur $D_{\text{déf}}$:
$$x-2-\frac{2x-4}{x} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{(x-2)^2}{x} > 0\,,$$
d'où $S_1 = \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$.
2. Résolvons (2) sur $D_{\text{déf}}$:
$$x-2+\frac{2x-4}{x} < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{(x-2)(x+2)}{x} < 0$$
Tableau des signes :

x		-2		0		2	
$x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-2)(x+2)/x$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

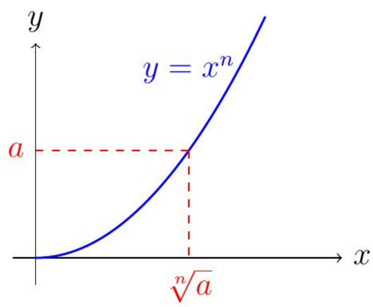
D'où $S_2 =]-\infty, -2\,[\,\cup\,]\,0\,,\,2\,[$.

On a ainsi comme ensemble solution :
$$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -2[\cup]0,2[\cup]2,+\infty[\,.$$
◇

2.6 Équations et inéquations avec racines

2.6.1 Racines positives (ou arithmétiques)

Définition 2.52. Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Le réel positif x vérifiant
$$x^n = a$$
est appelé **racine $n^{\text{ème}}$ positive de** a. Il est noté $x = \sqrt[n]{a}$.



La racine $2^{\text{ème}}$, appelée **racine carrée**, est notée $\sqrt{a}$ (au lieu de $\sqrt[2]{a}$).

Exemple 2.53.
- 4 est racine cubique de 64, puisque $4^3 = 64$, donc $\sqrt[3]{64} = 4$,
- $\sqrt{9} = 3$,
- $\sqrt{-4}$ n'est pas défini.

◇

Propriété Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
2. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.
3. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Démonstration. 1. est juste une reformulation de la définition. Les autres propriétés découlent des propriétés des puissances entières.

- Si on pose $x = (\sqrt[n]{a})^m$, alors
$$x^n = \left((\sqrt[n]{a})^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn} = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^m = a^m\,,$$
ce qui signifie bien que $x = \sqrt[n]{a^m}$.
- Si on pose $x = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, alors
$$x^n = \left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab\,,$$
ce qui signifie bien que $x = \sqrt[n]{ab}$.
- Si on pose $x = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$, alors
$$x^{mn} = \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left((\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a\,,$$
ce qui signifie bien que $x = \sqrt[mn]{a}$.

□

Remarque 2.54. Les propriétés usuelles des puissances restent valables en posant
$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} \quad a \in \mathbb{R}_+^*, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\,.$$

◇

Exemple 2.55. $7^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$, $\sqrt{3x^2} = |x|\sqrt{3}\,.$ ◇

2.6.2 Racines réelles

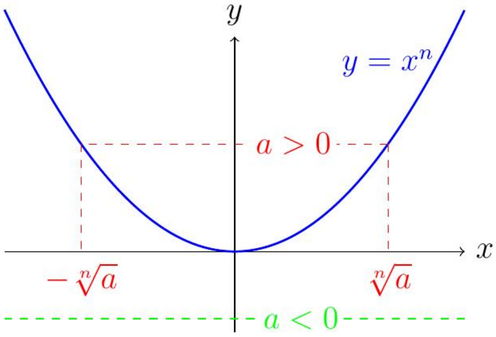
Définition 2.56. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est une racine n^{e} réelle de a si x vérifie $x^n = a$.

Exemples 2.57.
- 2 et -2 sont racines carrées réelles de 4,
- -3 est racine cubique réelle de -27.

◇

Discussion graphique des solutions en x à l'équation $x^n = a$.

- n pair



Le graphe admet Oy comme axe de symétrie, et les solutions de l'équation $x^n = a$ sont

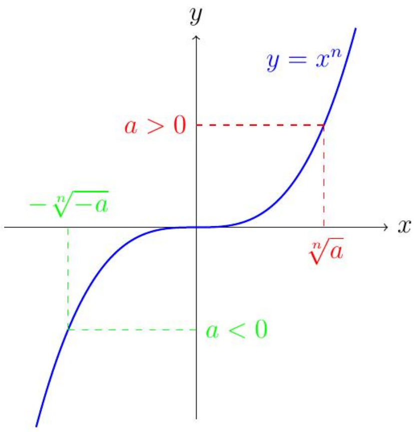
— si $a > 0$: 2 racines distinctes,

$$S = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}$$

— si $a = 0$: racine double, $S = \{0\}$

— si $a < 0$: pas de racine, $S = \emptyset$

- n impair



Le graphe admet l'origine $(0, 0)$ comme centre de symétrie, et quel que soit $a \in \mathbb{R}$, la solution de $x^n = a$ est toujours unique : $S = \{\sqrt[n]{a}\}$.

Dans le cas d'une puissance impaire, on peut donc étendre la racine $n^{\text{ème}}$ aux réels négatifs :

Définition 2.58. Si $a \in \mathbb{R}_-$ et $n \in \mathbb{N}^*$ est impair, on définit $\sqrt[n]{a} := -\sqrt[n]{-a}$.

Cette dernière donne bien la racine $n^{\text{ème}}$ négative de a, puisque

$$\left(-\sqrt[n]{-a}\right)^n = -\sqrt[n]{-a}^{\,n} = -(-a) = a\,.$$

Exemples 2.59.
- $x^4 = 16$ admet 2 racines réelles $x_1 = \sqrt[4]{16} = 2$ et $x_2 = -\sqrt[4]{16} = -2$
- $x^3 + 8 = 0$ admet l'unique solution $x = \sqrt[3]{-8} = -2$.

◇

Conséquences :

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Alors
$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ impair,} \\ |a| & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$
En particulier,
$$\sqrt{a^2} = |a| \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$
- Si n est pair, et si a et b ont le même signe, alors
$$a = b \Longleftrightarrow a^n = b^n$$
Si n est pair, et si a et b sont positifs, alors
$$a < b \Longleftrightarrow a^n < b^n$$
- Si n impair, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} a = b \qquad &\Longleftrightarrow \qquad a^n = b^n, \\ a < b \qquad &\Longleftrightarrow \qquad a^n < b^n\,. \end{aligned}$$

En particulier, et sera utilisé pour résoudre des équations à racines carrées :

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \text{ si et seulement si } a \text{ et } b \text{ sont de même signes}$$

et

$$a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b \text{ si et seulement si } a \text{ et } b \text{ sont positifs ou nuls.}$$

2.6.3 Equations avec racine carrée

Commençons par considérer une équation du type

$$\sqrt{f(x)} = g(x)\,, \qquad x \in D_{\text{déf}}\,.$$

La racine carrée étant définie seulement sur les positifs, on a

$$D_{\text{déf}} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ et } g(x) \text{ sont définis, et } f(x) \geqslant 0\}\,.$$

Pour résoudre l'équation, on aimerait « élever au carré »pour ne plus avoir de racine. Mais puisque l'équivalence

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{f(x)}^2 = g(x)^2$$

n'est vraie que si $\sqrt{f(x)}$ et $g(x)$ sont de même signes, et puisque $\sqrt{f(x)}$, lorsqu'il est bien défini, est toujours positif, on doit donc introduire une **condition de positivité** :

$$D_{\text{pos}} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geqslant 0\}\,.$$

On a donc :

Théorème 2.60. *Soient f et g deux fonctions réelles. Pour $x \in D_{déf}$, on a l'équivalence*

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad g(x) \geqslant 0 \text{ et } f(x) = g^2(x)\,.$$

Exemple 2.61. Résolvons l'équation

$$\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 4x - 6\,.$$

Comme le discriminant de $x^2 - 3x + 6$ est $\Delta = -15 < 0$ et comme le coefficient devant x^2 est 1 (strictement positif), on a que

$$D_{\text{déf}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 6 \geqslant 0\} = \mathbb{R}\,.$$

Ecrivons la condition de positivité : $4x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{2}$, d'où

$$D_{\text{pos}} = \left[\tfrac{3}{2}, +\infty\right[\,.$$

Sous la condition de positivité, on peut élever les deux membres au carré. Sur $D_{\text{pos}} \cap D_{\text{déf}}$, l'équation de départ est donc équivalente à

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 6 &= (4x - 6)^2 \\ &= 16x^2 - 48x + 36 \end{aligned}$$

En regroupant les termes de mêmes degrés, celle-ci devient

$$\begin{aligned} 15x^2 - 45x + 30 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = 2\,. \end{aligned}$$

Comme $1 \notin D_{\text{pos}}$, on conclut : $S = \{2\}$.

Remarquons qu'en effet, $x = 1$ n'est *pas* solution puisque

$$\underbrace{\sqrt{1^2 - 3 \cdot 1 + 6}}_{=2} \neq \underbrace{4 \cdot 1 - 6}_{=-2}$$

◇

Exemple 2.62. Résolvons l'équation

$$\sqrt{x + m^2} = x + m\,,$$

en fonction du paramètre réel m.

D'abord,

$$D_{\text{déf}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x + m^2 \geqslant 0\} = \left[-m^2, +\infty\right[\,,$$

et

$$D_{\text{pos}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x + m \geqslant 0\} = [-m, +\infty[\,.$$

Sur $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}}$, l'équation de départ est équivalente à

$$\begin{aligned} x + m^2 &= (x + m)^2 \\ &= x^2 + 2mx + m^2 \end{aligned}$$

Si on regroupe les termes de mêmes degrés,

$$\begin{aligned} x^2 + (2m - 1)x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(x + 2m - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = 1 - 2m \end{aligned}$$

Voyons maintenant, en fonction de m, si ces nombres sont effectivement solutions de l'équation, c'est-à-dire appartiennent à $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}}$. Pour la première,

- $0 \in D_{\text{déf}} \iff 0 \geqslant -m^2 \iff m \in \mathbb{R}$.
- $0 \in D_{\text{pos}} \iff 0 \geqslant -m \iff m \geqslant 0$.

Donc 0 est solution si et seulement si $m \geqslant 0$.

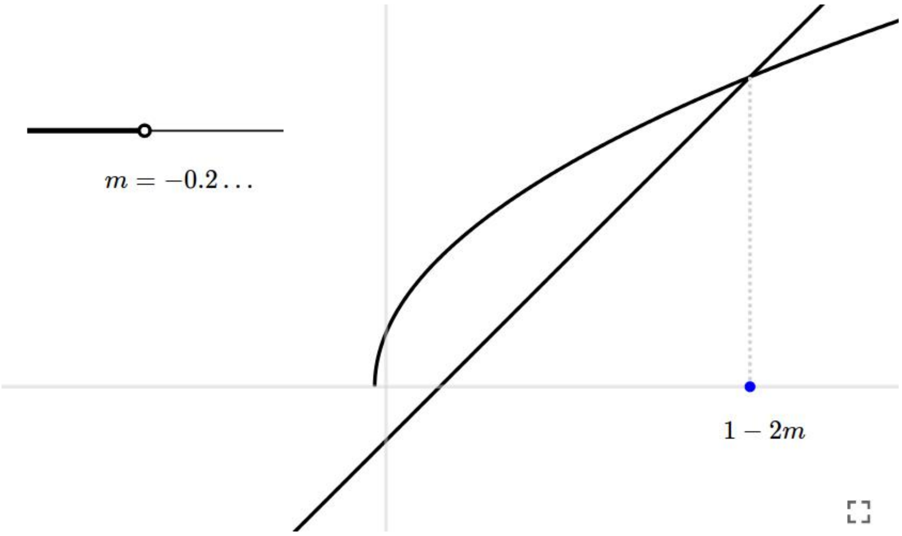
- $1-2m \in D_{\text{déf}} \iff 1-2m \geqslant -m^2 \iff (1-m)^2 \geqslant 0 \iff m \in \mathbb{R}$.
- $1-2m \in D_{\text{pos}} \iff 1-2m \geqslant -m \iff m \leqslant 1$.

Donc $1-2m$ est solution si et seulement si $m \leqslant 1$.

En résumé,

$$S = \begin{cases} \{1-2m\} & \text{si } m < 0\,, \\ \{0, 1-2m\} & \text{si } m \in [0,1]\,, \\ \{0\} & \text{si } m > 1\,. \end{cases}$$

On observe la dépendance de S sur l'animation ci-dessous, en regardant où la courbe $y = \sqrt{x+m^2}$ coupe la droite $y = x+m$, en fonction de m :



Animation disponible sur botafogo.saitis.net/analyse-A

◇

2.6.4 Inéquations avec racine carrée

Tout comme dans une équation, on cherchera dans une inéquation contenant une racine carrée à « élever au carré »pour se débarrasser de la racine. Il convient cependant de prendre quelques précautions, l'équivalence $a \leqslant b \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$ n'étant vraie que pour $a, b \geqslant 0$. Le domaine de définition est le même que dans le cas des équations.

Théorème 2.63. *Soient f et g deux fonctions réelles. Pour $x \in D_{déf}$, on a les équivalences*

$$\sqrt{f(x)} \leqslant g(x) \iff g(x) \geqslant 0 \text{ et } f(x) \leqslant g^2(x)\,,$$
$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff g(x) \geqslant 0 \text{ et } f(x) < g^2(x)\,.$$

En effet, dans le premier cas, si $g(x) < 0$, l'inéquation ne peut avoir de solution puisque $\sqrt{f(x)}$ est toujours positif. Ainsi, si la condition de positivité $g(x) \geqslant 0$ est satisfaite, les deux membres de l'inéquation sont positifs et la mise au carré conduit au même ensemble solution.

Exemple 2.64. Résolvons
$$\sqrt{6-x} \leqslant 3+2x\,.$$
D'abord, $D_{\text{déf}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 6-x \geqslant 0\} =]-\infty, 6]$. On a donc, sur $D_{\text{déf}}$, l'équivalence
$$\sqrt{6-x} \leqslant 3+2x \quad \Longleftrightarrow \quad 3+2x \geqslant 0, \text{ et } 6-x \leqslant (3+2x)^2\,.$$
La condition de positivité $x \geqslant -\frac{3}{2}$ donne $D_{\text{pos}} = [-\frac{3}{2}, +\infty[$. Sur $D_{\text{pos}} \cap D_{\text{déf}} = [-\frac{3}{2}, 6]$, on peut maintenant résoudre
$$\begin{aligned} 6-x \leqslant 9+12x+4x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4x^2+13x+3 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (4x+1)(x+3) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, -3] \cup [-\tfrac{1}{4}, +\infty[\,. \end{aligned}$$
En ne gardant que les éléments qui sont dans $D_{\text{pos}} \cap D_{\text{déf}} = [-\frac{3}{2}, 6]$, on a donc : $S = \left[-\frac{1}{4}\,,\,6\right]$.
◇

Théorème 2.65. *Soient f et g deux fonctions réelles. Pour $x \in D_{\text{déf}}$, on a les équivalences*
$$\sqrt{f(x)} \geqslant g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) < 0 \\ \textit{ou} \\ g(x) \geqslant 0 \textit{ et } f(x) \geqslant g^2(x) \end{cases}$$
$$\sqrt{f(x)} > g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) < 0 \\ \textit{ou} \\ g(x) \geqslant 0 \textit{ et } f(x) > g^2(x) \end{cases}.$$

En effet, si x est tel que $g(x) < 0$, alors l'inéquation est vérifiée puisque $\sqrt{f(x)} \geqslant 0$. C'est donc une partie de la solution. D'un autre côté, pour les x tels que $g(x) \geqslant 0$ les deux membres de l'inéquation sont positifs et la mise au carré conduit au même ensemble solution, sous la restriction $g(x) \geqslant 0$. C'est l'autre partie de la solution.

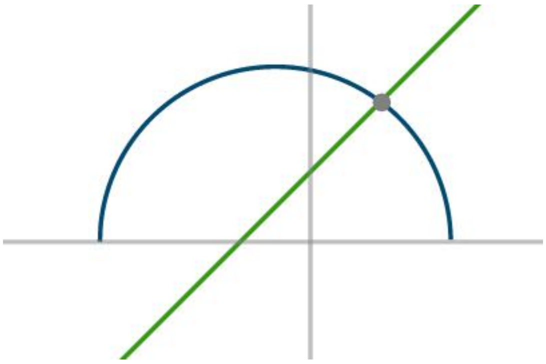
Exemple 2.66. Résolvons l'inéquation
$$\sqrt{-x^2-x+6} \geqslant x+1\,.$$
D'abord,
$$D_{\text{déf}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x^2-x+6 \geqslant 0\} = [-3, 2]\,.$$
Sur $D_{\text{déf}}$, on a
$$\begin{aligned} &\sqrt{-x^2-x+6} \geqslant x+1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x+1 < 0 & (1) \\ \text{ou} \\ x+1 \geqslant 0 \quad \text{et } -x^2-x+6 \geqslant (x+1)^2\,. & (2) \end{cases} \end{aligned}$$
Les solutions de (1) sont $x < -1$, et en ne gardant que celles dans $D_{\text{déf}}$, on obtient $S_1 = [-3,\, -1\,[$.

Pour résoudre (2), on peut inclure la condition de positivité, $x \geqslant -1$ dans $D_{\text{pos}} = [-1, +\infty[$, puis résoudre

$$\begin{aligned} -x^2 - x + 6 \geqslant x^2 + 2x + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 3x - 5 \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2x+5)(x-1) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [-\tfrac{5}{2}, 1] \end{aligned}$$

Ainsi, en ne gardant que les x qui sont aussi dans $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}} = [-1, 2]$, on a $S_2 = [-1, 1]$.

Pour conclure : $S = S_1 \cup S_2 = [-3, 1]$.



◇