Chapitre 3

Suites réelles

3.1 Définitions et exemples

Ce chapitre sur les *suites* constitue une porte d'entrée dans l'analyse, puisque nous y rencontrerons déjà quelques-unes de difficultés centrales du cours. En particulier, on y discutera pour la première fois de la notion de *limite*.

Informel 3.1. Si on souhaite aborder quelques-unes des principales difficultés liées aux suites et à l'analyse, de manière informelle, en évitant le langage mathématique (qui est souvent responsable du blocage des novices), on pourra consulter le texte suivant : **Le marchand de billes** (`billes.pdf`).

3.1.1 Définition

Définition 3.2. Une **suite** est une famille infinie ordonnée de réels, indexée par des entiers :

$$a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$$

On utilisera la notation compacte suivante : $(a_n)_{n \geqslant n_0}$

La suite peut commencer par un indice n_0 quelconque, mais le plus souvent on considérera $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$. Quand le premier indice n'importe pas ou peu (ce qui sera le cas lorsqu'on étudiera le comportement de a_n pour des indices n *grands*), on écrira parfois (a_n) au lieu de $(a_n)_{n \geqslant n_0}$.

3.1.2 Représentations

On se représente en général une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ de deux façons.

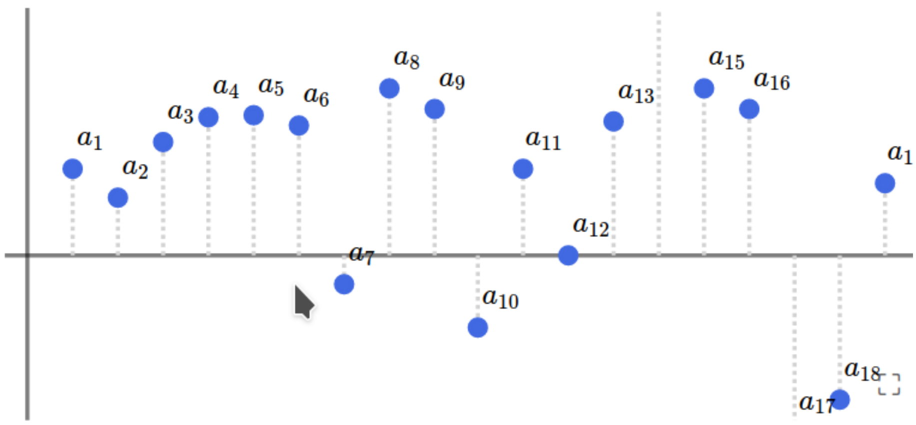
a) Soit comme un ensemble de points sur la droite, $\{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$:

Du fait que cet ensemble est ordonné, cette image peut aussi s'interpréter comme une *trajectoire* : une particule est au point a_1 au temps $n = 1$, puis au point a_2 au temps $n = 2$, etc.

b) Soit comme le graphe de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n) := a_n\,, \end{aligned}$$

ce qui revient à représenter les paires de points $(n, f(n)) = (n, a_n)$ dans le plan cartésien :



3.1.3 Exemples

Souvent, une suite est définie simplement en disant comment le n-ème terme a_n se calcule explicitement en fonction de l'indice n. Lorsqu'une suite est définie ainsi, chaque terme peut être calculé directement, indépendamment des autres, à l'aide d'une formule.

Exemple 3.3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie ainsi : pour chaque $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{3n^3 + n - 5}{5n^2 + 7}\,.$$

Dans cet exemple, $a_{10'000}$ peut se calculer directement, sans avoir forcément besoin de calculer les autres. $\diamond$

Exemple 3.4. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$, définie ainsi : $a_0 = 0$, puis pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = 4a_{n-1}(1 - a_{n-1})\,.$$

Cette suite est définie *par récurrence* : à part le premier, chaque terme est défini en fonction du précédent. Donc on ne peut calculer $a_{10'000}$ que si on a déjà calculé $a_{9'999}$, $a_{9'998}$, etc. Ce type de suite sera étudié dans un chapitre à part. $\diamond$

On peut définir une suite de façon tout à fait arbitraire, ce qui mène rapidement à des suites difficiles à étudier :

Exemple 3.5. Considérons l'expansion décimale du nombre π,

$$\pi = 3.14159265358979323846264 33\dots,$$

et définissons la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$, comme suit :

$$a_1 = 1\,, \quad a_2 = 4\,, \quad a_3 = 1\,, \quad a_4 = 5\,, \quad a_5 = 9\,, \quad a_6 = 2\,, \quad \dots$$

Plus précisément : a_n est l'entier représentant le n-ème chiffre après la virgule dans l'expansion décimale de π. Une suite facile à définir, mais très difficile à étudier... ◇

Informel 3.6. Donc plus tard, quand on dira "soit (a_n) une suite", il faudra garder à l'esprit que cela signifie que chacun de ses terme est bien défini, mais qu'un terme n'a pas forcément de lien avec les autres.

3.1.4 Suites majorées, minorées, bornées

Une propriété simplificatrice, pour une suite, est que ses termes ne soient globalement pas trop grands :

Définition 3.7. Une suite (a_n) est

- ⋆ **majorée** si il existe une constante M telle que $a_n \leqslant M$ pour tout n,
- ⋆ **minorée** si il existe une constante m telle que $a_n \geqslant m$ pour tout n,
- ⋆ **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Informel 3.8. Une suite bornée est une suite qui "vit" dans un intervalle, dans le sens où on peut trouver deux nombres finis $m < M$ tels que

$$a_n \in [m, M] \quad \forall n\,.$$

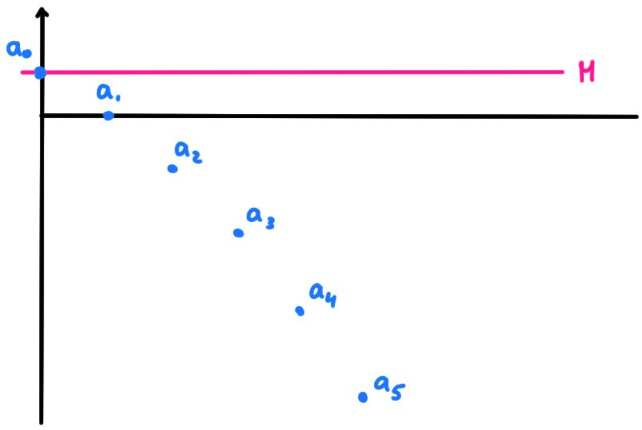
Exemple 3.9. Considérons la suite

$$a_n = 1 - n^2\,, \qquad n \geqslant 0\,.$$

Alors $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée. En effet, $n^2 \geqslant 0$ pour tout n, et donc

$$a_n = 1 - n^2 \leqslant 1\,, \qquad \forall n \geqslant 0\,.$$

et donc en prenant $M = 1$, on a $a_n \leqslant M$ pour tout n.



Par contre, a_n n'est pas minorée (et donc pas bornée). En effet, montrons que pour toute constante m, il existe un indice n tel que $a_n < m$. Ceci est vrai lorsque $m \geqslant 0$ puisque $a_n \leqslant 0$ dès que $n \geqslant 1$. Si maintenant $m < 0$, alors $a_n = 1 - n^2 < m$ si et seulement si $n > \sqrt{1-m}$ (on a simplement résolu l'inéquation). Donc en prenant n'importe quel entier n plus grand que $\sqrt{1-m}$, on a bien que $a_n < m$. Ceci montre qu'il n'existe aucun minorant pour cette suite. ◇

Exemple 3.10. Considérons la suite

$$a_n = 2\sin(5n+1) - 3\cos(\sqrt{n}), \qquad n \geqslant 0.$$

Puisque

$$\begin{aligned} |a_n| &= \big|2\sin(5n+1) - 3\cos(\sqrt{n})\big| \\ &\leqslant |2\sin(5n+1)| + |-3\cos(\sqrt{n})| \\ &= 2|\sin(5n+1)| + 3|\cos(\sqrt{n})| \\ &\leqslant 2+3 = 5, \end{aligned}$$

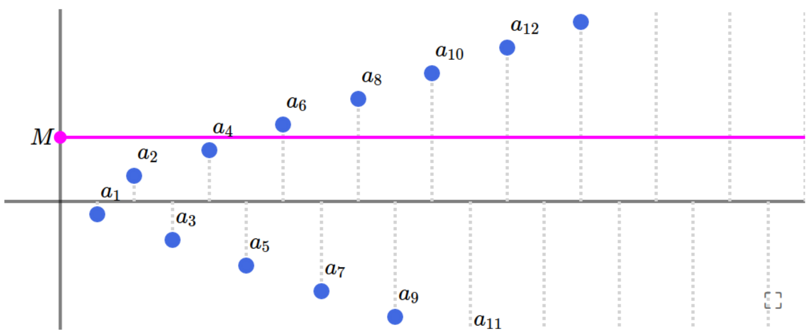
la suite est bornée :

$$-5 \leqslant a_n \leqslant +5, \qquad \forall n.$$

◇

Exemple 3.11. La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$, où $a_n :=$ $n$ème chiffre de l'expansion décimale de π en base 10, est bornée, car minorée par 0, et majorée par 9. ◇

Exemple 3.12. La suite $a_n = (-1)^n n$ n'est pas majorée.



En effet, fixons un seuil $M > 0$ (sous-entendu : aussi grand que l'on veut), et prenons un entier pair $n = 2k$ quelconque, tel que $k > M/2$. On a alors

$$a_n = a_{2k} = (-1)^{2k} 2k = 2k > M.$$

Cette suite n'est pas minorée non plus. En effet, fixons un seuil $m < 0$ (sous-entendu : aussi grand que l'on veut, négatif), et prenons un entier impair $n = 2k+1$ quelconque, tel que $k > -(m-1)/2$. On a alors

$$a_n = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1}(2k+1) = -(2k+1) < m.$$

◇

3.1.5 Suites monotones

Définition 3.13. Une suite (a_n) est

- ⋆ **croissante** si $a_n \leqslant a_{n+1}$ pour tout n,
- ⋆ **strictement croissante** si $a_n < a_{n+1}$ pour tout n,
- ⋆ **décroissante** si $a_n \geqslant a_{n+1}$ pour tout n,
- ⋆ **strictement décroissante** si $a_n > a_{n+1}$ pour tout n.

Si (a_n) satisfait une de ces propriétés, elle est dite **monotone**.

Exemple 3.14. La suite $a_n = n^2$, $n \geqslant 0$, est strictement croissante puisque

$$a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + \underbrace{2n+1}_{>0} > n^2 = a_n \,.$$

◇

Exemple 3.15. La suite **harmonique** $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$, est strictement décroissante puisque

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$$

◇

Exemple 3.16. Considérons la suite $a_n = \frac{n}{n+1}$ On peut écrire

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}\,,$$

ce qui implique, puisque $2 > 1$,

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n+1} = a_n\,,$$

et donc que (a_n) est croissante.

◇

3.2 Limite : $a_n \to L$

“**Infini** : En quoi on ne peut concevoir ni remarquer aucune limite. ”

Le Robert Méthodique

La notion centrale de l'analyse est celle de *limite*, et on va l'aborder ici pour la première fois, dans le cadre simple des suites réelles. Définir rigoureusement ce que signifie “tendre vers L” est une des difficultés rencontrées dans ce cours. Nous allons donc commencer par le cas $L = 0$ avant de passer au cas général.

3.2.1 Tendre vers zéro

Avant tout, pour un réel, "être proche de zéro" signifie que la distance qui le sépare de 0, c'est-à-dire sa valeur absolue, est petite. Donc pour voir si les valeurs d'une suite s'approchent de zéro, il est naturel de considérer la distance

$$\mathrm{dist}(a_n, 0) = |a_n - 0| = |a_n|\,,$$

et de quantifier précisément ce qu'on entend par "cette distance devient toujours plus petite à mesure que n augmente".

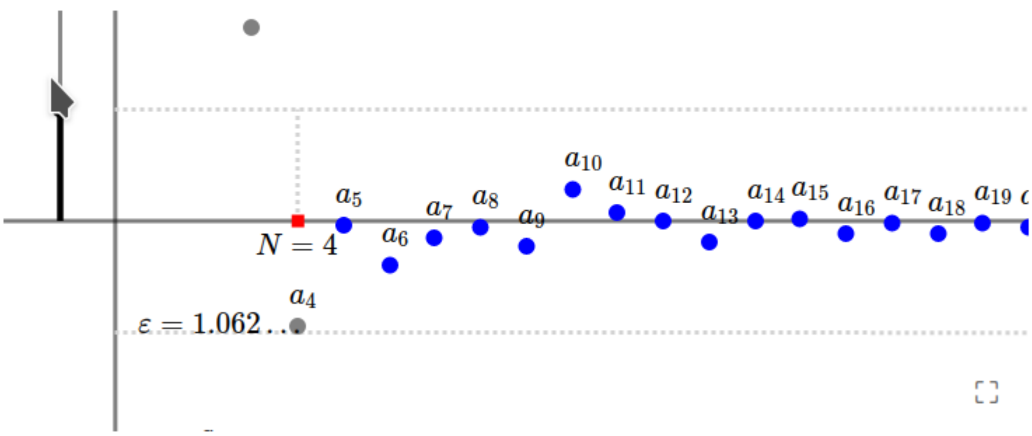
Définition 3.17. On dit qu'une suite (a_n) **tend vers zéro (lorsque** $n \to \infty$**)** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N (qui dépend de ε) tel que $|a_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, c'est-à-dire tel que

$$a_n \in [-\varepsilon, \varepsilon] \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

On écrira alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ou simplement $a_n \to 0$.

Une autre façon de formuler cette définition : (a_n) tend vers zéro lorsque $n \to \infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$ (une fenêtre), tous les éléments de la suite, à l'exception d'un nombre fini d'entre eux, sont dans l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Sur l'animation ci-dessous, choisir un $\varepsilon > 0$, et trouver un N tel que $a_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ pour tout $n \geqslant N$:



Exemple 3.18. Considérons la suite

$$a_n = \frac{1}{n}\,, \qquad n \geqslant 1\,.$$

Montrons que cette suite tend vers zéro, dans le sens défini ci-dessus.

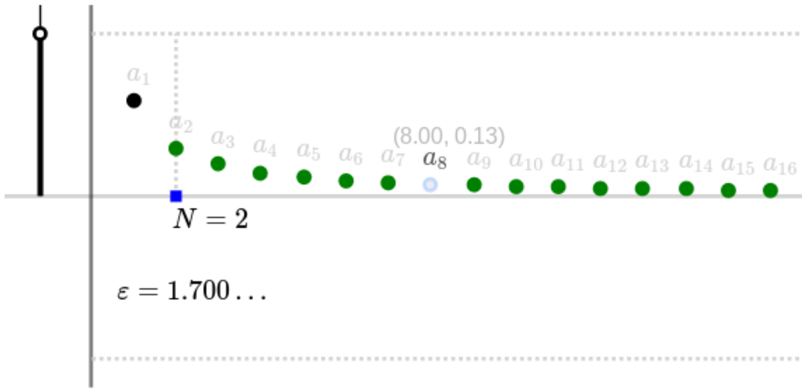
Fixons un $\varepsilon > 0$, et vérifions que l'on peut toujours trouver un entier N tel que

$$|a_n| \leqslant \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

Pour ce faire, remarquons que la condition $|a_n| \leqslant \varepsilon$ est en fait équivalente à $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$, et comme cette dernière est équivalente à $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Pour l'entier N, on peut prendre n'importe quel entier plus grand ou égal à $\frac{1}{\varepsilon}$. On peut par exemple prendre (rappelons que $\lfloor x \rfloor$:=partie entière de x) :

$$N := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1\,.$$

On a ainsi trouvé un entier N tel que $n \geqslant N$ implique $|a_n| \leqslant \varepsilon$.



◇

Informel 3.19. On voit, dans ce dernier exemple, comme le N cherché dépend de ε ! Car en général, plus $\varepsilon > 0$ est petit, plus il faut augmenter n pour faire rentrer a_n dans l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

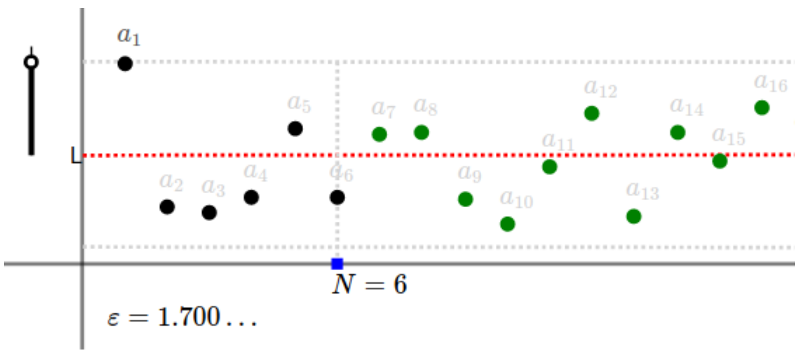
3.2.2 Tendre vers $L \in \mathbb{R}$

La définition de "tendre vers L" est seulement une adaptation de la définition de "tendre vers zéro" : pour que a_n tende vers L, il faut que la suite $a'_n := a_n - L$ tende vers zéro.

Définition 3.20. Soit $L \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite (a_n) **tend vers L (lorsque $n \to \infty$)** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier positif N tel que $|a_n - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, c'est -à-dire tel que

$$a_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon] \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

On dira alors que L est la **limite** de la suite (a_n), et on écrira $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ou simplement $a_n \to L$.



Lorsqu'il existe un $L \in \mathbb{R}$ tel que (a_n) tend vers L, on dit que la suite **converge** ; si elle ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Exemple 3.21. Considérons la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$a_n = \frac{3n+2}{2n+1}\,.$$

Montrons, par le calcul, que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}\,,$$

au sens de la définition précédente.

Fixons un $\varepsilon > 0$, et vérifions que l'on peut trouver un entier N tel que

$$\left|a_n - \frac{3}{2}\right| \leqslant \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

D'abord, écrivons explicitement la différence

$$\left|a_n - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3n+2}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}\,.$$

On voit que cette dernière expression peut être rendue arbitrairement petite en prenant n suffisamment grand. Plus précisément : fixons un $\varepsilon > 0$. Une simple manipulation montre que

$$\frac{1}{2(2n+1)} \leqslant \varepsilon$$

est équivalent à

$$n \geqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\Big)\,.$$

Pour N, il suffit donc de prendre n'importe quel entier plus grand ou égal au réel $\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\Big)$.

Pour être tout à fait précis, définissons (rappel : $\lfloor x \rfloor$ =valeur entière de x)

$$N := \Big\lfloor \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\Big)\Big\rfloor + 1\,.$$

Par cette définition de N, $n \geqslant N$ implique que $|a_n - \frac{3}{2}| \leqslant \varepsilon$, ce que l'on voulait.

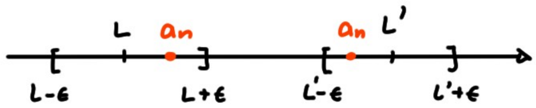
Remarquons que peu importe comment on choisit N, ce dernier est de plus en plus grand à mesure $\varepsilon > 0$ devient plus petit. ◇

3.3 Propriétés de la limite

Listons les propriétés principales de la limite. La première n'a rien de surprenant :

Lemme 11. *La limite d'une suite convergente est unique.*

Preuve: Supposons que $a_n \to L$ et $a_n \to L'$, avec $L \neq L'$. Supposons par exemple que $L < L'$. Soit $\varepsilon > 0$ pris suffisamment petit, de manière à ce que $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ et $[L'-\varepsilon, L'+\varepsilon]$ soient disjoints. Par exemple $\varepsilon := \frac{L'-L}{3}$:

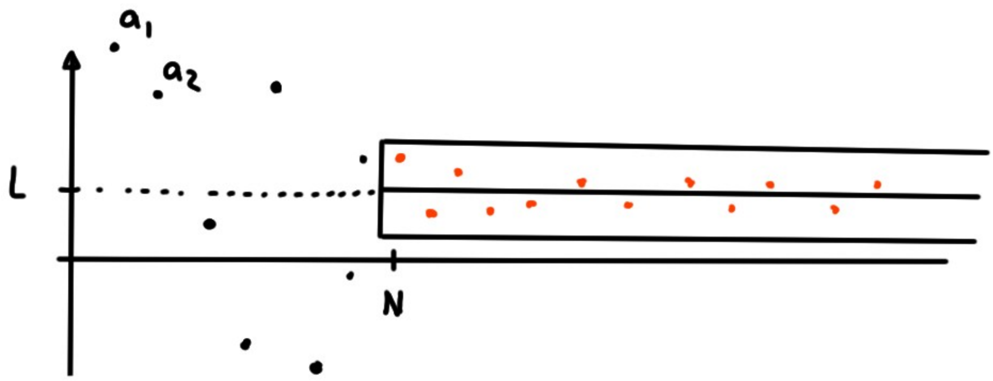


Comme $a_n \to L$, il existe N tel que $a_n \in [L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ pour tout $n \geqslant N$. Comme $a_n \to L'$, il existe N' tel que $a_n \in [L'-\varepsilon, L'+\varepsilon]$ pour tout $n \geqslant N'$. Mais ceci est une contradiction puisque $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ et $[L'-\varepsilon, L'+\varepsilon]$ sont disjoints. □

La deuxième est que les valeurs des termes d'une suite convergente ne peuvent pas devenir trop grands :

Lemme 12. *Si une suite converge, alors elle est bornée.*

Preuve: Soit (a_n) une suite convergente. Il faut montrer qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que $|a_n| \leqslant C$ pour tout n. Or si la suite converge, disons $a_n \to L$, on peut prendre $\varepsilon := 1$ et considérer l'entier N tel que $a_n \in [L-1, L+1]$ pour tout $n \geqslant N$.



En particulier on a, pour tout $n \geqslant N$, $|a_n| \leqslant |a_n - L| + |L| \leqslant |L| + 1$. Soit

$$C := \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, |L|+1\}\,.$$

On a clairement $|a_n| \leqslant C$ pour tout $n \leqslant N$, mais aussi $|a_n| \leqslant |L| + 1 \leqslant C$ pour tout $n \geqslant N$. □

Finalement, listons quelques propriétés, qui permettent de calculer des limites à l'aide d'autres limites connues.

Lemme 13. *(Opérations sur les limites) Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes : $a_n \to L_1$, $b_n \to L_2$. Alors*

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 + L_2$

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = L_1 L_2$

c) Si $L_2 \neq 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2}$

d) Si $a_n \leqslant b_n$ pour tout n suffisamment grand, alors $L_1 \leqslant L_2$.

Preuve: 1. Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| &= |(a_n - L_1) + (b_n - L_2)| \\ &\leqslant |a_n - L_1| + |b_n - L_2| \,.\end{aligned}$$

Fixons un $\varepsilon > 0$, et posons $\varepsilon' := \varepsilon/2$. Comme $a_n \to L_1$, il existe N_a tel que $|a_n - L_1| \leqslant \varepsilon'$ pour tout $n \geqslant N_a$. Comme $b_n \to L_2$, il existe N_b tel que $|b_n - L_2| \leqslant \varepsilon'$ pour tout $n \geqslant N_b$. On a donc, pour tout $n \geqslant N := \max\{N_a, N_b\}$,

$$|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| \leqslant |a_n - L_1| + |b_n - L_2| \leqslant 2\varepsilon' = \varepsilon \,.$$

2. Comme a_n converge, elle est bornée : il existe $C > 0$ telle que $|a_n| \leqslant C$ pour tout n. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}|a_n b_n - L_1 L_2| &= |a_n b_n - a_n L_2 + a_n L_2 - L_1 L_2| \\ &\leqslant |a_n||b_n - L_2| + |L_2||a_n - L_1| \\ &\leqslant C|b_n - L_2| + |L_2||a_n - L_1| \,.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit N_a tel que $|a_n - L_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2|L_2|}$ pour tout $n \geqslant N_a$ (serait dommage que $L_2 = 0$!), et soit N_b tel que $|b_n - L_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C}$ pour tout $n \geqslant N_b$. On a alors que pour tout $n \geqslant N := \max\{N_a, N_b\}$,

$$\begin{aligned}|a_n b_n - L_1 L_2| &\leqslant C|b_n - L_2| + |L_2||a_n - L_1| \\ &\leqslant C\frac{\varepsilon}{2C} + |L_2|\frac{\varepsilon}{2|L_2|} = \varepsilon \,.\end{aligned}$$

Les propriétés 3. et 4. sont laissées en exercice. □

Remarque 3.22. Dans la dernière propriété, les "$\leqslant$" ne peuvent pas être remplacés par des "$<$"! En effet, on peut très bien avoir deux suites convergentes telles que $a_n < b_n$ pour tout n suffisamment grand, mais telles que $\lim_{n\to\infty} a_b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Comme exemple simple, on peut considérer les suites définies par $a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$. ◇

3.4 Le Théorème des deux gendarmes

Théorème 3.23. *Soit (x_n) une suite. Si il existe deux suites (a_n), (b_n), telles que*

a) $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ *pour tout n suffisamment grand,*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$,

alors (x_n) converge, et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

Preuve: Soit N_0 un entier tel que $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant N_0$.

Fixons $\varepsilon > 0$.

- ⋆ Puisque $a_n \to L$, il existe N_a tel que $a_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ pour tout $n \geqslant N_a$.
- ⋆ Puisque $b_n \to L$, il existe N_b tel que $b_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ pour tout $n \geqslant N_b$.

Définissons l'entier
$$N := \max\{N_0, N_a, N_b\}\,.$$
Si $n \geqslant N$, alors on a en particulier que $a_n \geqslant L - \varepsilon$ et $b_n \leqslant L + \varepsilon$, ce qui implique
$$L - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant x_n \leqslant b_n \leqslant L + \varepsilon\,.$$
De ces dernières inégalités, on tire que $|x_n - L| \leqslant \varepsilon$.

On a donc bien montré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que $|x_n - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Ceci signifie que $x_n \to L$. □

Exemple 3.24. Considérons la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, définie par
$$x_n = \frac{2 + \cos(19n^2 + n^7)}{n}\,.$$
La partie contenant $\cos(\cdots)$ étant compliquée, on peut utiliser le fait qu'elle est bornée : $-1 \leqslant \cos(\cdots) \leqslant +1$, ce qui permet d'écrire
$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{=a_n} = \frac{2-1}{n} \leqslant x_n \leqslant \frac{2+1}{n} = \underbrace{\frac{3}{n}}_{=b_n}$$
Mais, puisque
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
et
$$\lim_{n\to\infty} b_n = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,,$$
le théorème des deux gendarmes implique que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. ◇

Informel 3.25. Une bonne utilisation du théorème, pour montrer qu'une suite (x_n) et que sa limite vaut L, nécessite de trouver deux "gendarmes" (a_n) et (b_n) qui non seulement encadrent (x_n), mais qui possèdent en plus la même limite ! Dans des situations simples, comme dans l'exemple précédent, on obtient souvent des gendarmes efficaces en majorant/minorant certaines parties de x_n qui ne sont pas essentielles dans le comportement pour des indices n grands. Mais parfois, trouver des gendarmes qui ont la même limite peut s'avérer plus difficile !

Exemple 3.26. Considérons la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, définie par
$$x_n = \frac{2^n}{n!}\,, \qquad n \geqslant 1\,.$$
Comme le numérateur est un produit de n fois le même nombre "2", alors que le dénominateur est un produit de n nombres dont presque tous sont *plus grands que* 2, le dénominateur doit croître beaucoup plus vite que le numérateur. Ceci suggère que $x_n \to 0$, ce que l'on va essayer de montrer à l'aide du théorème des deux gendarmes.
Comme $x_n \geqslant 0$, il suffit de trouver une suite b_n telle que

- ⋆ $0 \leqslant x_n \leqslant b_n$, et

⋆ $b_n \to 0$.

Or si on écrit explicitement, pour tout $n \geqslant 3$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}{n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdots 1} \\ &= \frac{2}{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{n-1}}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\frac{2}{n-2}}_{\leqslant 1} \cdots \underbrace{\frac{2}{3}}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\frac{2}{2}}_{=1} \cdot \frac{2}{1} \\ &\leqslant \frac{4}{n} =: b_n \,. \end{aligned}$$

Puisque $b_n \to 0$, ceci implique bien que $x_n \to 0$. ◇

Voyons ensuite une conséquence utile et générale du théorème des deux gendarmes :

Corollaire 8. *Si (x_n) est bornée et si $y_n \to 0$, alors $x_n y_n \to 0$.*

Preuve: Comme (x_n) est bornée, il existe $C > 0$ telle que $-C \leqslant x_n \leqslant C$ pour tout n. On a donc $0 \leqslant |x_n y_n| = |x_n||y_n| \leqslant C|y_n|$, ce qui donne

$$-C|y_n| \leqslant x_n y_n \leqslant C|y_n| \,.$$

Puisque $y_n \to 0$, ceci implique $\pm C|y_n| \to 0$. Par le Théorème des deux gendarmes, on conclut que $|x_n y_n| \to 0$, ce qui implique $x_n y_n \to 0$. □

3.5 Les suites monotones et bornées

On a vu qu'une suite convergente est forcément bornée. Mais le contraire n'est pas vrai : une suite bornée ne converge pas forcément.

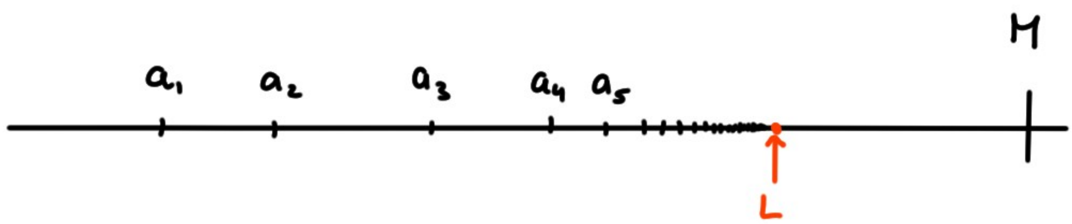
Exemple 3.27. La suite $a_n = (-1)^n$ ne converge pas, mais elle est bornée, puisque $|a_n| = 1$, ce qui implique $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$ pour tout n. ◇

Par contre, si une suite est bornée *et monotone*, alors elle converge :

Théorème 3.28. *Soit (a_n) une suite.*

a) Si (a_n) est croissante et majorée, elle converge.

b) Si (a_n) est décroissante et minorée, elle converge.



Preuve: Soit (a_n) une suite croissante et majorée. Considérons l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$ défini comme étant l'ensemble de tous les points de la suite :

$$A := \{a_1, a_2, a_3, \dots\}\,.$$

Puisque la suite est bornée, A est majoré ; on peut donc considérer le réel L défini par

$$L := \sup A\,.$$

Nous allons montrer que $a_n \to L$.

Par définition, le supremum est un majorant, et donc a $a_n \leqslant L$ pour tout n. De plus, comme le supremum est le *plus petit* majorant, on a que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_* tel que $L - \varepsilon \leqslant a_{n_*}$. Or comme la suite est croissante, on a

$$L - \varepsilon \leqslant a_{n_*} \leqslant a_{n_*+1} \leqslant a_{n_*+2} \leqslant \cdots \leqslant L\,,$$

ce qui implique $|a_n - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_*$.

On a ainsi montré que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|a_n - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout n suffisamment grand. Ceci montre que $a_n \to L$.

(Dans le deuxième cas, lorsque la suite est décroissante et minorée, on adapte cet argument après avoir défini $L := \inf A$.) □

Si le résultat peut paraître intuitif, la preuve a montré qu'il repose entièrement sur l'existence d'un supremum pour les ensembles majorés de $\mathbb{R}$.

Le théorème ci-dessus garantit que si une suite est monotone et bornée, alors elle possède une limite L, qui est soit un supremum (si la suite est croissante et majorée), soit un infimum (si la suite est décroissante et minorée). Parfois, on peut calculer cette limite L explicitement :

Exemple 3.29. Considérons la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$a_n = \frac{n}{n+1}\,.$$

Nous avons montré précédemment que cette suite est strictement croissante. Or elle est aussi majorée, puisque $n < n+1$ implique

$$a_n = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} = 1\,.$$

Le théorème ci-dessus garantit donc qu'elle converge, et que sa limite est égale à

$$L = \sup\{a_0, a_1, a_2, \dots\}\,.$$

On peut vérifier (exercice !) que $L = 1$. ◇

L'exemple suivant présente un cas dans lequel le théorème permet de montrer qu'une certaine suite converge, mais sans pour autant donner la valeur de la limite.

Exemple 3.30. Soit (b_n) la suite définie ainsi :

$$\begin{aligned}
b_1 &:= \frac{1}{1^2} \\
b_2 &:= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \\
b_3 &:= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \\
&\vdots \\
b_n &:= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
b_{n+1} &:= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Cette suite est croissante puisque $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)^2} > b_n$. Pour montrer qu'elle est bornée, remarquons que pour tout $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \cdot k} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\,.$$

En utilisant cette inégalité pour $k = 2, 3, \ldots, n$, on obtient une borne supérieure dans laquelle beaucoup de termes se **téléscopent** :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&< \tfrac{1}{1^2} + \big(\tfrac{1}{1} \underbrace{- \tfrac{1}{2}\big) + \big(\tfrac{1}{2}}_{=0} \underbrace{- \tfrac{1}{3}\big) + \big(\tfrac{1}{3}}_{=0} \underbrace{- \tfrac{1}{4}\big) + \big(\tfrac{1}{4}}_{=0} - \cdots \underbrace{- \tfrac{1}{n-1}\big) + \big(\tfrac{1}{n-1}}_{=0} - \tfrac{1}{n}\big)
\end{aligned}$$

On a donc que

$$b_n < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2\,.$$

On a ainsi montré que (b_n) est majorée par $M = 2$, et comme elle est aussi croissante, elle converge : il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} b_n = L\,.$$

Puisque $1 \leqslant b_n < 2$, on a aussi que $1 \leqslant L \leqslant 2$. ◇

Informel 3.31. Euler a montré en 1734 que cette limite vaut

$$L = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} = 1.664934\ldots\,.$$

3.6 Suites qui tendent vers l'infini

Un comportement possible, pour une suite qui ne possède pas de limite lorsque $n \to \infty$, est de *tendre vers l'infini*.

Définition 3.32. Soit (a_n) une suite.

a) On dit que (a_n) **tend vers** $+\infty$ **(lorsque** $n \to \infty$**)** si pour tout $M > 0$ il existe un entier positif N_0 (qui dépend en général de M) tel que

$$a_n \geqslant M \qquad \forall n \geqslant N_0\,.$$

On notera (formellement) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ou simplement $a_n \to +\infty$.

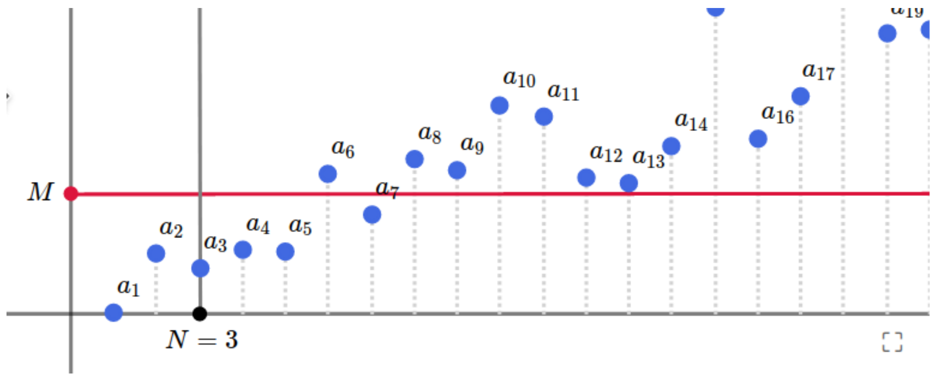
b) On dit que (a_n) **tend vers** $-\infty$ **(lorsque** $n \to \infty$**)** si pour tout $M < 0$ il existe un entier positif N_0 (qui dépend en général de M) tel que

$$a_n \leqslant M \qquad \forall n \geqslant N_0\,.$$

On notera (formellement) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ou simplement $a_n \to -\infty$.

Informel 3.33. Donc a_n tend vers $+\infty$ si elle dépasse et *reste* au-dessus de n'importe quel **seuil** $M > 0$ (sous-entendu : arbitrairement grand) lorsque son indice n est pris suffisamment grand.

Sur l'animation suivante, fixer une valeur du seuil $M > 0$, puis chercher un N tel que $a_n \geqslant M$ pour tout $n \geqslant N$:



Exemple 3.34. Montrons que la suite (a_n) définie par

$$a_n = \frac{2n-5}{7}$$

tend vers $+\infty$. Pour cela, fixons un seuil arbitraire $M > 0$, et remarquons que

$$a_n \geqslant M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2n-5}{7} \geqslant M \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant 7M+5\,.$$

Soit donc $N := \lfloor 7M+5 \rfloor + 1$. Si $n \geqslant N$, alors $n \geqslant 7M+5$ et donc $a_n \geqslant M$. Comme on peut trouver un tel N pour tout seuil $M > 0$, ceci montre bien que $a_n \to \infty$. $\diamond$

Exemple 3.35. Considérons ensuite

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}\,,$$

et montrons que $a_n \to \infty$. Pour un seuil $M > 0$, on a

$$a_n \geqslant M \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - Mn - M \geqslant 0$$

Le polynôme $P(x) = x^2 - Mx - M$ possède deux racines,

$$x_\pm = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4M}}{2}\,,$$

et il est positif partout en dehors de l'intervalle $[x_-, x_+]$. En définissant $N := [x_+] + 1$, on a bien $a_n \geqslant M$ dès que $n \geqslant N$. ◇

3.6.1 Propriétés des suites qui tendent vers l'infini

Tout comme les suites convergentes, celles qui tendent vers l'infini obéissent à certaines propriétés.

Théorème 3.36. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites. Si $a_n \to +\infty$,*

a) alors $\frac{1}{a_n} \to 0$.

b) et si $b_n \to +\infty$, alors $a_n + b_n \to +\infty$ et $a_n b_n \to +\infty$.

c) et si b_n est bornée, alors $a_n + b_n \to +\infty$ et $\frac{b_n}{a_n} \to 0$.

d) et s'il existe $\delta > 0$ tel que $b_n \geqslant \delta$ pour tout n suffisamment grand, alors $a_n b_n \to +\infty$.

*e) et si $b_n \geqslant a_n$ pour tout n suffisamment grand, alors $b_n \to +\infty$. (Théorème du "**Chien méchant**")*

Exemple 3.37. Considérons la suite

$$x_n = n^3 - 7\sin(\tfrac{n}{2})\cos(\sqrt{n})\,,$$

que l'on peut écrire comme $x_n = a_n + b_n$, où

$$a_n = n^3\,, \qquad b_n = -7\sin(\tfrac{n}{2})\cos(\sqrt{n})\,.$$

On voit que $a_n \to \infty$. On ne sait pas grand chose sur le signe de b_n, mais on sait qu'elle est bornée puisque

$$|b_n| = \left|-7\sin(\tfrac{n}{2})\cos(\sqrt{n})\right| \leqslant 7\,,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty\,.$$

◇

Exemple 3.38. Considérons

$$x_n = \sqrt{n}(2 + \cos(n^5)) \,,$$

que l'on peut écrire comme $x_n = a_n b_n$, où

$$a_n = \sqrt{n} \,, \qquad b_n = 2 + \cos(n^5) \,.$$

On a $a_n \to \infty$, mais b_n n'a visiblement pas de limite. Pourtant, on peut remarquer que $\cos(n^5) \geqslant -1$, et donc

$$b_n = 2 + \cos(n^5) \geqslant 2 - 1 = 1 =: \delta > 0 \,.$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty \,.$$

◇

3.7 Comportements polynômiaux, logarithmiques, exponentiels

3.7.1 Suites et fonctions élémentaires

La plupart des suites définies à l'aide de fonctions élémentaires sont des suites qui tendent vers l'infini :

- ⋆ Les **puissances entières positives** $p \in \mathbb{N}^*$: $a_n = n^p \to +\infty$.
- ⋆ Les **exponentielles de base** $r > 1$: $a_n = r^n \to \infty$.
- ⋆ Les **polynômes de degré** p : $a_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_p n^p$, avec $c_p \neq 0$:

$$a_n \to \begin{cases} +\infty & \text{si } c_p > 0 \,, \\ -\infty & \text{si } c_p < 0 \,. \end{cases}$$

- ⋆ Les **logarithmes de base** $r > 1$: $a_n = \log_r(n) \to +\infty$
- ⋆ Les **logarithmes de base** $0 < r < 1$: $a_n = \log_r(n) \to -\infty$

Or toutes ces suites ne tendent pas vers l'infini de la même manière : certaines *tendent vers l'infini plus vite que d'autres.*

3.7.2 Hiérarchie de comportements à l'infini

Définition 3.39. Soient (a_n) et (b_n) deux suites qui tendent vers l'infini :

$$a_n \to \infty \,, \qquad b_n \to \infty \,.$$

On dit que b_n tend vers l'infini **plus vite** que a_n si

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0 \,.$$

Exemple 3.40. Les suites $a_n = n^2$ et $b_n = n^3$ tendent toutes deux vers l'infini, mais b_n tend vers l'infini plus vite que a_n, car

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \to 0\,.$$

◇

Il est donc naturel d'établir une certaine hiérarchie parmis les comportements typiques des suites qui tendent vers l'infini. Les comportements les plus classiques sont ceux de types *polynomial (puissances), logarithmique et exponentiel*.

Théorème 3.41. *(Comportements à l'infini)*

a) ***Un exponentielle tend vers l'infini plus vite que n'importe quelle puissance*** *: pour toute base $r > 1$ et toute puissance $\alpha > 0$,*

$$\frac{n^\alpha}{r^n} \to 0\,.$$

b) ***Une puissance tend vers l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de logarithme*** *: pour toute base $r > 1$, et toutes puissances $\alpha, \beta > 0$,*

$$\frac{\big(\log_r(n)\big)^\beta}{n^\alpha} \to 0\,.$$

Preuve: 1. Remarquons d'abord que si on sait traiter les cas où α est entier, alors on sait aussi traiter le cas d'un α quelconque. (En effet, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{n^\alpha}{r^n} \leqslant \frac{n^{\lfloor\alpha\rfloor+1}}{r^n}$, donc si $\frac{n^{\alpha'}}{r^n} \to 0$, avec $\alpha' = \lfloor\alpha\rfloor + 1 \geqslant \alpha$, alors $\frac{n^\alpha}{r^n} \to 0$ aussi.)

Pour simplifier, considérons le cas $\alpha = r = 2$. On aimerait donc montrer que

$$\frac{n^2}{2^n} \to 0\,.$$

L'idée est d'utiliser la formule du binôme pour montrer que le dénominateur est plus grand qu'une puissance supérieure à n^2. En effet, la formule du binôme avec $x = y = 1$ donne

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,.$$

Or comme tout les termes de cette dernière somme sont positifs, la somme est plus grande que n'importe lequel de ces termes. Dans notre cas, il suffit de ne garder que le terme correspondant à $k = 3$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,.$$

Ceci implique que

$$0 \leqslant \frac{n^2}{2^n} \leqslant \frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)}\,.$$

On voit que dans ce dernier quotient, le numérateur se comporte en n^2, alors que le dénominateur se comporte en n^3, ce qui implique que sa limite est nulle. Plus précisément,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \underbrace{\frac{6}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}}_{\to 6} = 0\,.$$

Par le théorème des deux gendarmes, on conclut donc que $\frac{n^2}{2^n} \to 0$.

Dans le cas général, pour une exponentielle de base $r > 1$ et une puissance entière α quelconque, on peut adapter la preuve ci-dessus. En effet, en écrivant $r = 1+\delta$, où $\delta > 0$, et en utilisant à nouveau la formule du binôme, on peut minorer

$$r^n = (1+\delta)^n \geqslant \binom{n}{\alpha+1}\delta^{\alpha+1}\,.$$

Le reste de la preuve s'adapte facilement, et mène à $\frac{n^\alpha}{r^n} \to 0$.

Une preuve semblable de cette première affirmation, même si ça ne se voit pas tout de suite, peut se trouver **ici** (lien web).

2. On peut démontrer la deuxième affirmation à l'aide de la première. □

Informel 3.42. Le théorème implique par exemple que

$$\frac{(\log n)^{1000}}{n^{0.0001}} \to 0\,.$$

Pourtant, la petitesse du quotient est difficile à *observer* (avec une calculatrice par exemple), dans le sens où il faut que n soit vraiment *très grand* pour que ce quotient commence à se rapprocher de zéro...

3.8 Calculs de limites et indéterminations

La plupart des limites intéressantes que nous rencontrerons dans ce cours sont des limites qui ne se calculent pas simplement à l'aide des propriétés simples de la limite. En fait, les limites *importantes* nécessiteront toutes une étude plus approfondie. Ces limites feront toutes intervenir ce qu'on appelle *une indétermination*.

Un limite est **indéterminée** lorsqu'elle fait intervenir une combinaison de grandeurs qui ne rentre dans le cadre d'aucune règle simple, et dont on ne peut pas immédiatement déterminer le comportement.

Listons quelques-uns des principaux cas d'indétermination :

Si a_n	et b_n	... alors la limite de...	... est une indétermination
$\to +\infty$	$\to -\infty$	$a_n + b_n$	"$\infty - \infty$"
$\to 0$	$\to +\infty$	$a_n b_n$	"$0 \cdot \infty$"
$\to 0$	$\to 0$	$\frac{a_n}{b_n}$	"$\frac{0}{0}$"
$\to \infty$	$\to \infty$	$\frac{a_n}{b_n}$	"$\frac{\infty}{\infty}$"
$\to 1$	$\to +\infty$	$a_n^{b_n}$	"1^∞"
$\to +\infty$	$\to 0$	$a_n^{b_n}$	"∞^0"
$\to 0$	$\to 0$	$a_n^{b_n}$	"0^0"

Il se trouve que toutes ces indéterminations sont équivalentes (voir plus bas).

Nous ne traiterons pas les indéterminations de façon générale puisque justement, leur présence indique qu'une étude au cas par cas est nécessaire. Nous allons donc discuter certaines de ces indéterminations, et présenter les techniques qui permettent de les résoudre, en étudiant des exemples. Plusieurs de ces techniques seront utilisées plus tard, aussi dans l'étude de limites de types différents (comme $x \to x_0$).

3.8.1 Indéterminations du type "$\infty - \infty$"

Souvent, une suite est définie par une différence de deux nombres qui deviennent de plus en plus grands à mesure que n augmente. Or la différence de deux nombres grands peut, a priori, avoir n'importe quel type de comportement.

Exemple 3.43. Considérons

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^3 - 5n^2\right),$$

dans laquelle $a_n = n^3 \to +\infty$ et $b_n = 5n^2 \to \infty$. Comme a_n tend vers l'infini plus vite que b_n, dû au fait qu'il contient un terme de degré $3 > 2$, on a avantage à mettre n^3 en évidence et obtenir un produit,

$$a_n - b_n = n^3 - 5n^2 = n^3\left(1 - \frac{5}{n}\right) = a_n' b_n'$$

Maintenant, on a toujours $a_n' = n^3 \to \infty$, mais puisque $b_n' = 1 - \frac{5}{n} \to 1$, on a en particulier $b_n' \geqslant \frac{1}{2} > 0$ pour tout n suffisamment grand. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n' b_n' = +\infty\,.$$

$\diamond$

L'identité élémentaire

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

peut être utilisée souvent lorsqu'on a affaire à une différence $a - b$. Par exemple, en étudiant des différences de racines $a - b = \sqrt{A} - \sqrt{B}$, on pourra **multiplier et diviser par le conjugué** $\sqrt{A} + \sqrt{B}$:

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = (\sqrt{A} - \sqrt{B})\frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

Exemple 3.44. Considérons

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\},$$

qui est bien du type "$\infty-\infty$". En multipliant et divisant par le conjugué,

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\,.\end{aligned}$$

Ce quotient n'est plus indéterminé :

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0\,.$$

◇

Parfois, on pourra (même si c'est assez rare) résoudre une indétermination "$\infty-\infty$", de la forme $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$, en extrayant explicitement de a_n et de b_n la même partie divergente :

Exemple 3.45. Considérons le cas "$\infty-\infty$" suivant :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log(e^{\sqrt{n}}+2)-\log(e^{\sqrt{n}}+1)\right)$$

Ici, on peut remarquer qu'en écrivant

$$\begin{aligned}a_n &= \log(e^{\sqrt{n}}+2)=\log(e^{\sqrt{n}}(1+2e^{-\sqrt{n}}))=\sqrt{n}+\log(1+2e^{-\sqrt{n}})\,,\\ b_n &= \log(e^{\sqrt{n}}+1)=\log(e^{\sqrt{n}}(1+e^{-\sqrt{n}}))=\sqrt{n}+\log(1+e^{-\sqrt{n}})\,,\end{aligned}$$

ce qui montre que a_n et b_n contiennent tous deux un "$\sqrt{n}$", qui tend vers l'infini, et qui disparaît lorsqu'on fait la différence :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(\log(1+2e^{-\sqrt{n}})-\log(1+e^{-\sqrt{n}})\right)\\ &= \log(1)-\log(1)\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

C'est donc un cas d'une indétermination "$\infty-\infty$" dans laquelle on peut montrer que les infinis se "compensent exactement". ◇

3.8.2 Indéterminations du type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Informel 3.46. Lorsqu'on est en présence d'un quotient $\frac{a_n}{b_n}$ dans lequel a_n et b_n sont les deux *grands*, on essaiera d'extraire ce qui est à l'origine de cette grandeur, en mettant un *terme dominant* en évidence. On pourra alors faire des simplifications dans la fraction $\frac{a_n}{b_n}$, et éventuellement faire disparaître l'indétermination.

Exemple 3.47. Considérons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 17n + 1}{5n^3 + \sin(n)}\,,$$

qui est effectivement une indétermination de la forme "$\frac{\infty}{\infty}$", puisque

- $\star$ $a_n = 3n^3 - 17n + 1 \to +\infty$ (polynôme de degré 3, dont le coefficient principal est $3 > 0$),
- $\star$ $b_n = 5n^3 + \sin(n) \to +\infty$ ($5n^3 \to \infty$ et $\sin(n)$ est bornée).

Ce que l'on peut faire ici est **extraire les termes dominants** dans a_n et b_n, qui sont les termes contenant la puissance n^3 :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3n^3 - 17n + 1}{5n^3 + \sin(n)} = \frac{n^3(3 - \frac{17}{n^2} + \frac{1}{n^3})}{n^3(5 + \frac{\sin(n)}{n^3})} = \frac{3 - \frac{17}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{\sin(n)}{n^3}} = \frac{a'_n}{b'_n}$$

En simplifiant par n^3 on a obtenu un quotient $\frac{a'_n}{b'_n}$, qui dans la limite $n \to \infty$ n'est *plus* indéterminé. En effet, $a'_n \to 3$ et $b'_n \to 5$, et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a'_n}{b'_n} = \frac{3}{5}\,.$$

$\diamond$

3.8.3 Indéterminations du type "$\frac{0}{0}$"

Nous reviendrons au indéterminations "$\frac{0}{0}$", puisqu'elles sont au coeur du problème de la *dérivation*, un outil central de l'analyse.

Pour l'instant, donnons déjà une limite classique :

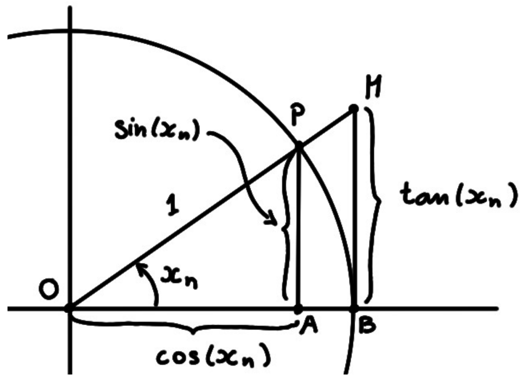
Théorème 3.48. *Soit (x_n) une suite représentant des mesures d'angles en radians. Si $x_n \neq 0$ pour tout n, et si $x_n \to 0$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1\,.$$

Informel 3.49. Attention, il est important de mentionner que le sinus, dans $\sin(x_n)$, est calculé en supposant que l'angle x_n est mesuré en **radians**. Sinon, la limite n'est pas la même !

Preuve: Comme la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est paire, on peut supposer que $x_n > 0$ pour tout n.

Puisque $x_n \to 0$, on a $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$ pour tout n suffisamment grand. Considérons donc un angle sur le cercle trigonométrique, dont la mesure en radians x_n est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:



Remarquons que le triangle OAP est inclus dans le secteur circulaire OBP, qui est lui-même inclus dans le triangle OBM. On a donc

$$\text{aire}(\triangle\, OAP) \leqslant \text{aire}(\text{secteur } OBP) \leqslant \text{aire}(\triangle\, OBM)\,.$$

On explique **ici** (lien web) comment calculer l'aire d'un secteur. Ainsi, en exprimant chacune de ces aires en fonction de x_n,

$$\tfrac{1}{2}\cos(x_n)\sin(x_n) \leqslant \tfrac{1}{2}x_n 1^2 \leqslant \tfrac{1}{2}\tan(x_n)\,.$$

Ce deux inégalités sont équivalentes à

$$\underbrace{\cos(x_n)}_{a_n} \leqslant \frac{\sin(x_n)}{x_n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{\cos(x_n)}}_{b_n}\,.$$

Puisque $x_n \to 0$, on a $a_n = \cos(x_n) \to 1$ et $b_n \to \frac{1}{1} = 1$. On conclut donc avec le théorème des deux gendarmes. □

3.8.4 Sur l'équivalence entre les indéterminations

Toutes les indéterminations du tableau présenté plus haut sont équivalentes, dans le sens où on peut toujours transformer une indétermination en une autre. Voyons les principaux cas.

- ⋆ Supposons par exemple que la limite de $\frac{a_n}{b_n}$ soit "$\frac{\infty}{\infty}$". Cela implique que $\frac{1}{b_n} \to 0$, et donc en écrivant $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, la limite devient du type "$\infty \cdot 0$".
- ⋆ Supposons ensuite que la limite de $\frac{a_n}{b_n}$ soit "$\frac{\infty}{\infty}$". En écrivant

  $$\frac{a_n}{b_n} = \exp\Big(\log\frac{a_n}{b_n}\Big) = \exp\big(\log(a_n) - \log(b_n)\big)\,,$$

  on voit que l'on fait apparaître $\log(a_n) - \log(b_n)$, qui dans la limite est du type "$\infty - \infty$".
- ⋆ Soit finalement $a_n^{b_n}$ une suite qui dans la limite $n \to \infty$ est du type "1^∞". En écrivant $a_n^{b_n} = \exp(b_n \log(a_n))$, comme $a_n \to 1$ implique $\log(a_n) \to 0$, $b_n \log(a_n)$ est du type "$\infty \cdot 0$".

3.9 Série géométrique et applications

Théorème 3.50. *Soit $r \in \mathbb{R}$, et, pour tout $n \geqslant 1$, définissons la suite*

$$s_n := 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + r^n \,. \tag{3.1}$$

Dans la limite $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r \geqslant 1\,,\\ \frac{1}{1-r} & \text{si } |r| < 1\,,\\ \text{n'existe pas} & \text{si } r \leqslant -1\,. \end{cases}$$

Preuve: Rappelons que si $r = 1$, alors $s_n = n + 1$, ce qui implique $s_n \to +\infty$. Ensuite, si $r \neq 1$, on a vu que

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\,.$$

On peut alors considérer séparément les cas :

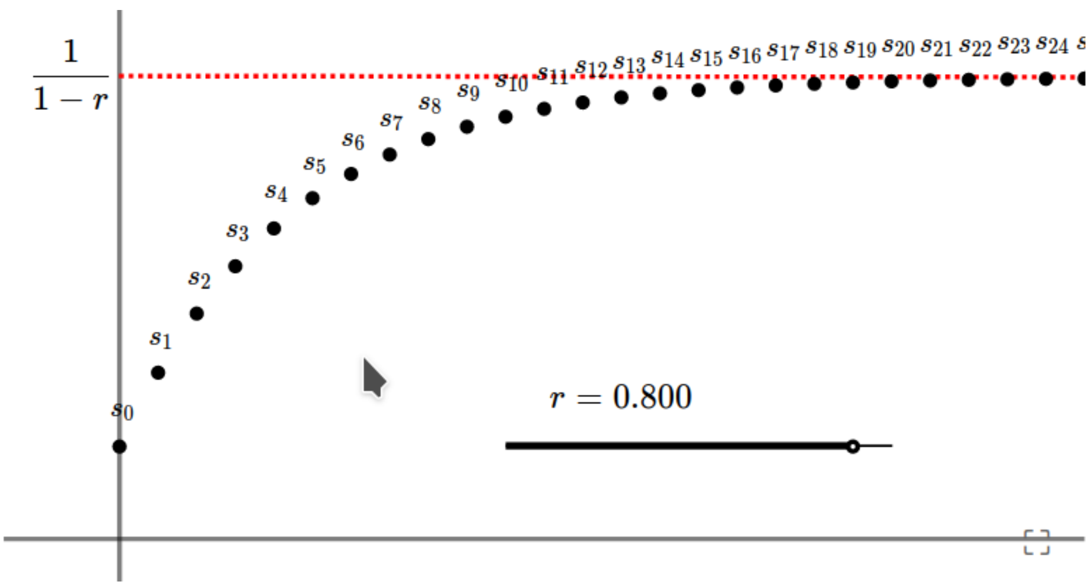
- $\underline{r > 1}$. Dans ce cas, on écrit plutôt

  $$s_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}\,.$$

  Comme $r^{n+1} \to \infty$, on a $s_n \to +\infty$.
- $\underline{-1 < r < 1}$. Dans ce cas. $|r^n| = |r|^n \to 0$ car $|r| < 1$, et donc $s_n \to \frac{1}{1-r}$.
- $\underline{r = -1}$. Dans ce cas, $s_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^{n+1})$, et donc ne converge pas.
- $\underline{r < -1}$. Dans ce cas, r^n n'a pas de limite lorsque $n \to \infty$ (oscille).

□

On peut observer le comportement de la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ en fonction de $-1 < r < 1$ sur l'animation suivante. (On peut en particulier voir comme la suite n'est plus monotone pour des valeurs négatives de r)



Dans le cas $|r| < 1$, on écrit souvent le résultat sous la forme

$$\boxed{1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}}$$

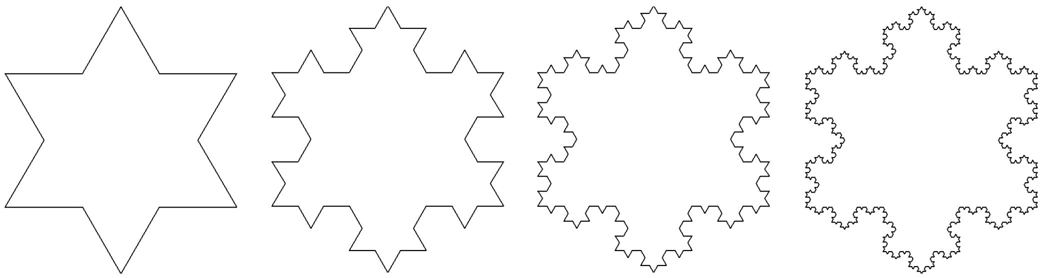
La somme infinie, dans le côté gauche, s'appelle la **série géométrique**. (On étudiera les *séries* dans un chapitre ultérieur.)

Exemple 3.51.

$$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots &= 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{2})^4 + \cdots \\ &= \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\,. \end{aligned}$$

◇

Exemple 3.52. Calculons l'aire du Flocon de von Koch (Suédois, 1870-1924). (Pour plus de détails, voir la vidéo ci-dessus.)



On part d'un triangle d'aire $A_0 = 1$, puis à chaque étape $n \geqslant 1$, on rajoute le triangle-tiers sur chaque côté. À l'étape n, l'aire du triangle rajouté vaut

$$a_n = (1/9)^n\,,$$

et le nombre de triangles rajoutés vaut

$$\sigma_n = 3 \cdot 4^{n-1}\,.$$

L'aire après la $n$ème étape vaut donc

$$A_n = A_{n-1} + \sigma_n a_n\,.$$

En itérant cette expression, on obtient

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + \sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 + \cdots + \sigma_n a_n \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\frac{4^2}{9^2} + \frac{1}{3}\frac{4^3}{9^3} + \ldots \frac{1}{3}\frac{4^{n-1}}{9^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{3}\Big\{1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \frac{4^3}{9^3} + \ldots \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\Big\} \end{aligned}$$

On reconnaît l'apparition d'une série géométrique de raison $r = \frac{4}{9} < 1$, et donc

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = 1 + \frac{1}{3}\frac{9}{5} = \frac{8}{5}\,.$$

◇

3.9.1 Application : existence du nombre e

Dans cette section, on étudie la suite

$$e_n := \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\,.$$

Dans la limite $n \to \infty$, e_n mène à une indétermination de la forme "1^∞", et il n'est pas clair, a priori, de comment se comporte vraiment e_n.

Informel 3.53. Donnons deux arguments légitimes, *mais faux*, concernant le comportement de e_n dans la limite $n \to \infty$.

- ⋆ On peut penser, que lorsque n est grand, le terme $\frac{1}{n}$ devient négligeable, et donc écrire
$$e_n \simeq (1+0)^n = 1\,,$$
ce qui mène à penser que la limite de e_n est égale à 1.
- ⋆ En se rappelant que même s'il est petit, le terme $\varepsilon = \frac{1}{n}$ est toujours strictement positif, ce qui mène à penser, puisque $1+\varepsilon > 1$, que
$$e_n \simeq (1+\varepsilon)^n \to \infty\,.$$

On va pourtant montrer que le vrai comportement de cette suite ne suit aucun de ces scénarios. On peut déjà s'en convaincre en **testant** (lien web) soi-même, avec x_n =CODE>$pow(1+1/n,n)$<CODE...

Théorème 3.54. ⚠ *Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie ci-dessus. Alors*

a) *(e_n) est strictement croissante,*

b) *(e_n) est bornée : $2 \leqslant e_n < 3$ pour tout $n \geqslant 1$.*

Par conséquent, il existe $e \in [2,3]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} e_n = e\,.$$

Preuve: Pour commencer, utilisons la formule du binôme pour écrire e_n sous une forme qui permette de mieux étudier sa dépendance en n :

$$\begin{aligned}
e_n = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (\tfrac{1}{n})^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (\tfrac{1}{n})^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdots n} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} (1-\tfrac{1}{n})\cdots(1-\tfrac{k-1}{n})
\end{aligned}$$

On utilise deux fois cette expression.

⋆ Affirmation :(e_n) est croissante. En utilisant l'expression précédente, pour $n+1$

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\big(1 - \underbrace{\tfrac{1}{n+1}}_{<\frac{1}{n}}\big)\cdots\big(1 - \underbrace{\tfrac{k-1}{n+1}}_{<\frac{k-1}{n}}\big)\\
&> 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\big(1 - \tfrac{1}{n}\big)\cdots\big(1 - \tfrac{k-1}{n}\big)\\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\big(1 - \tfrac{1}{n}\big)\cdots\big(1 - \tfrac{k-1}{n}\big) = e_n\,.
\end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière égalité, on a utilisé le fait que si $k = n+1$, alors $1 - \frac{k-1}{n} = 0$. Comme e_n est strictement croissante, on a en particulier que $e_n > e_1 = 2$.

⋆ Affirmation :(e_n) est majorée par $M = 3$. En utilisant encore une fois l'expression ci-dessus,

$$\begin{aligned}
e_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\underbrace{\big(1 - \tfrac{1}{n}\big)}_{<1}\cdots\underbrace{\big(1 - \tfrac{k-1}{n}\big)}_{<1}\\
&< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que pour tout $k \geqslant 2$,

$$k! = \underbrace{k}_{\geqslant 2} \cdot \underbrace{(k-1)}_{\geqslant 2} \cdots \underbrace{3}_{\geqslant 2} \cdot 2 \cdot 1 \geqslant 2^{k-1}\,,$$

et donc

$$e_n < 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3\,.$$

On a donc montré que (e_n) est croissante et majorée, donc elle converge. Puisque $2 \leqslant e_n < 3$ pour tout n, sa limite appartient aussi à cet intervalle. □

On connaît aujourd'hui des **milliards de chiffres** (lien web) de l'expansion décimale de e. Ses **premiers termes** (lien web) sont

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497\ldots$$

Euler a montré en 1737 que e est un nombre irrationnel.

3.10 Critère de d'Alembert pour les suites

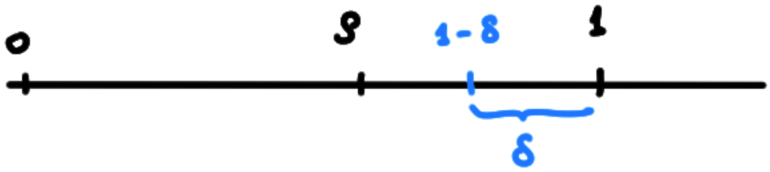
Théorème 3.55. *(Critère de d'Alembert pour les suites) Soit (a_n) une suite telle que la limite suivante existe :*

$$\rho := \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

⋆ *Si $0 \leqslant \rho < 1$, alors $a_n \to 0$.*

⋆ *Si $\rho > 1$, alors (a_n) diverge, et si en plus $a_n \geqslant 0$ pour tout n suffisamment grand, alors $a_n \to +\infty$.*

Preuve: Supposons pour commencer que $0 \leqslant \rho < 1$. On peut donc choisir un $\delta > 0$ tel que $\rho < 1 - \delta$,



et trouver un entier N tel que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant 1 - \delta \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

En utilisant cette inégalité pour N,

$$|a_{N+1}| \leqslant (1-\delta)|a_N|\,,$$

en l'utilisant pour $N+1$,

$$|a_{N+2}| \leqslant (1-\delta)|a_{N+1}| \leqslant (1-\delta)^2|a_N|\,,$$

et ainsi de suite, en l'utilisant pour $N+k$,

$$|a_{N+k}| \leqslant (1-\delta)|a_{N+(k-1)}| \leqslant \cdots \leqslant (1-\delta)^k|a_N|\,,$$

ce qui implique, puisque $(1-\delta)^k \to 0$ lorsque $k \to \infty$, que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{k\to\infty} |a_{N+k}| = 0\,.$$

Ceci implique $a_n \to 0$.

Supposons maintenant que $\rho > 1$, et fixons un $\delta > 0$ tel que $\rho > 1 + \delta$. On a alors l'existence d'un entier N tel que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1 + \delta \qquad \forall n \geqslant N\,.$$

En utilisant cette inégalité pour N,

$$|a_{N+1}| \geqslant (1+\delta)|a_N|\,,$$

en l'utilisant pour $N+1$,

$$|a_{N+2}| \geqslant (1+\delta)|a_{N+1}| \geqslant (1+\delta)^2|a_N|\,,$$

et ainsi de suite, en l'utilisant pour $N+k$,

$$|a_{N+k}| \geqslant (1+\delta)|a_{N+(k-1)}| \geqslant \cdots \geqslant (1+\delta)^k|a_N|\,,$$

ce qui implique, puisque $(1+\delta)^k \to +\infty$ lorsque $k \to \infty$, que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{k\to\infty} |a_{N+k}| = +\infty\,.$$

Ainsi, (a_n) n'a pas de limite, et si $a_n \geqslant 0$ pour tout n suffisamment grand, alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty\,.$$

$\square$

Informel 3.56. Ce critère est utile, mais surtout pour déduire le comportement des suites telles que $|a_n|$ tend soit très vite vers *l'infini*, soit très vite vers *zéro*. Car si une suite a_n tend vers une limite L qui est différente de zéro, $L \neq 0$, alors $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \to 1$, un cas qui n'est pas traité par le critère. (Voir exemples plus bas.)

Exemple 3.57. Considérons la suite

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}\,.$$

On a montré précédemment que cette suite tendait vers zéro, en montrant que le comportement exponentiel l'emporte sur le polynomial. Voyons comment le critère de d'Alembert permet d'obtenir le même résultat. Calculons

$$\begin{aligned}\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n}\right| \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2} < 1\,.\end{aligned}$$

Par le critère, ceci implique que $a_n \to 0$. ◇

Le critère est souvent utile dans l'étude du comportement de quotients présentant une indétermination du type "$\frac{\infty}{\infty}$", et où on ne voit pas clairement comment extraire un terme dominant.

Exemple 3.58. Considérons

$$x_n = \frac{n!}{n^n}\,,$$

également considérée précédemment. Écrivons le quotient

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\,.$$

Ainsi,

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2.718\dots} < 1\,.$$

On conclut que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. ◇

Il est important de souligner que le critère de d'Alembert ne dit rien dans le cas où $\rho = 1$. Or beaucoup de suites très simples, dont le comportement est bien connu, sont des suites pour lesquelles $\rho = 1$. Voyons trois exemples.

Exemple 3.59. Pour la suite $a_n = \frac{1}{n}$, on a

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1\,,$$

donc le critère ne permet pas de conclure. (Pourtant, on sait bien que $a_n \to 0$!) ◇

Exemple 3.60. Pour la suite $a_n = n$, on a aussi $\rho = 1$, donc le critère ne permet pas de conclure. (Pourtant, on sait bien que $a_n \to \infty$!) ◇

Exemple 3.61. Pour la suite $a_n = (-1)^n$, on a aussi $\rho = 1$, donc le critère ne permet pas de conclure. (Pourtant, on sait bien que a_n n'a pas de limite !) ◇

3.11 Limite supérieure, limite inférieure

On sait qu'une suite bornée peut ne pas converger (ne pas avoir de limite). On va voir ici que l'on peut pourtant toujours définir deux nombres, appelés *limite supérieur* et *limite inférieure*, qui donnent des informations sur le comportement de la suite à l'infini.

Soit (a_n) une suite bornée. On définit deux nouvelles suites, (M_n) et (m_n) :

$$\begin{aligned} M_n &:= \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\,, \\ m_n &:= \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\,. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$m_n \leqslant a_n \leqslant M_n \qquad \forall n\,. \tag{3.2}$$

Lemme 14. *Les suites (M_n) et (m_n) sont monotones et bornées. Plus précisément,*

- ⋆ *(M_n) est décroissante et minorée.*
- ⋆ *(m_n) est croissante et majorée.*

En particulier, ces deux suites sont convergentes.

Preuve: Définissons $A_n := \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$. Puisque $A_{n+1} \subset A_n$, on a d'une part que $\sup A_{n+1} \leqslant \sup A_n$, ce qui donne

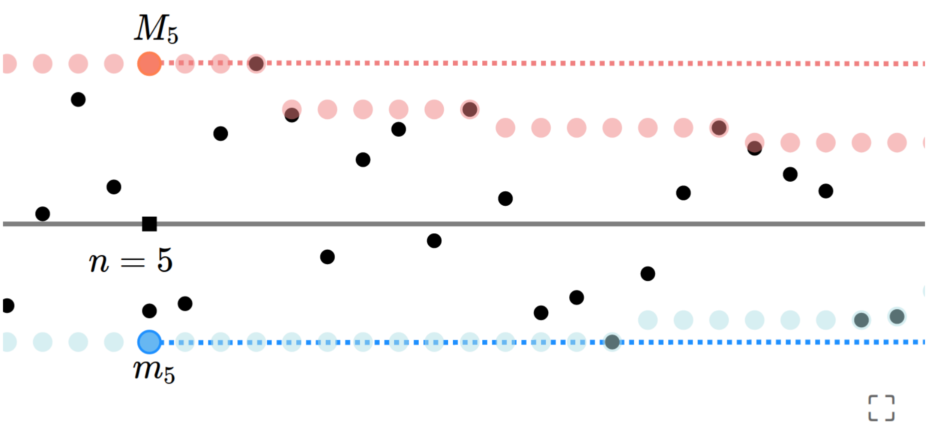
$$M_{n+1} \leqslant M_n,$$

et d'autre part que $\inf A_{n+1} \geqslant \inf A_n$, ce qui donne

$$m_{n+1} \geqslant m_n\,.$$

Comme (a_n) est bornée, (M_n) est minorée, et (m_n) est majorée. On a donc existence des limites $\lim_{n\to\infty} M_n$ et $\lim_{n\to\infty} m_n$. □

On observe ces propriétés sur l'animation ci-dessous. La suite (a_n) est représentée par les points noirs, (M_n) par les points rouges, et (m_n) par les points bleus :



Définition 3.62. Soit (a_n) une suite bornée, (M_n) et (m_n) définies comme ci-dessus.

a) La **limite supérieure de** (a_n) est définie par

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} M_n \,.$$

b) La **limite inférieure de** (a_n) est définie par

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} m_n \,.$$

Remarque 3.63.

- ⋆ Par définition, on a $m_n \leqslant M_n$ pour tout n, et donc

$$\liminf_{ni\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \,.$$

- ⋆ Une suite bornée peut ne pas converger, mais ses limites supérieures et inférieures existent toujours.

◇

Exemple 3.64. Considérons la suite $a_n = (-1)^n$, qui comme on le sait est bornée mais ne possède pas de limite. D'une part, $M_n = +1$ pour tout n, et donc

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +1 \,.$$

D'autre part, $m_n = -1$ pour tout n, et donc

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1 \,.$$

◇

On peut utiliser les $\liminf$ / $\limsup$ pour formuler un critère pour l'existence de la *vraie* limite d'une suite :

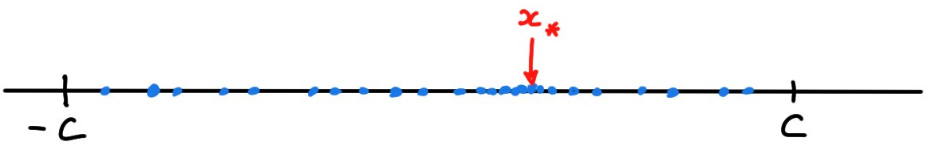
Théorème 3.65. *Soit (a_n) une suite bornée. Alors (a_n) converge et sa limite vaut $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ si et seulement si*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L \,.$$

Preuve: (Voir la vidéo) □

3.12 Le Théorème de Bolzano-Weierstrass

Informel 3.66. Supposons qu'à l'aide d'un crayon noir, on place une infinité de points dans un intervalle $[-C, C]$. Les points sont placés les uns après les autres, et peuvent être choisis *de façon tout à fait arbitraire*. Et bien il existe forcément un point de l'intervalle proche duquel vont s'accumuler une infinité de points noirs.



Définition 3.67. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite, et $0 \leqslant n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ une suite d'entiers, strictement croissante. Alors $(a_{n_k})_{k\geqslant 0}$ est une **sous-suite** de $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

Exemple 3.68. Considérons la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$a_n = \sin(n\tfrac{\pi}{4})\,.$$

Entre $n = 0$ et $n = 8$, cette suite prend les valeurs

$$0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\,.$$

Ensuite, la périodicité de la fonction $\sin(x)$ fait que ce motif se répète. Considérons quelques sous-suites particulières.

- ⋆ Si on considère les entiers $n_1 < n_2 < \cdots$ définis par $n_k = 2k$, alors la sous-suite $(a_{n_k})_{k\geqslant 0}$ est la suite $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$
- ⋆ Si on considère les entiers $n_1 < n_2 < \cdots$ définis par $n_k = 4k$, alors la sous-suite $(a_{n_k})_{k\geqslant 0}$ est une suite constante puisque $a_{n_k} = a_{4k} = \sin(k\pi) = 0$ pour tout k.

Bien-sûr, on peut considérer des sous-suites arbitraires, par exemple celle obtenue en prenant $n_k = k^2 + [\sqrt{n}]$, le long desquelles on n'observe pas forcément une régularité. ◇

Théorème 3.69. *(Théorème de Bolzano-Weierstrass) De toute suite bornée $(a_n)_n$ on peut extraire une sous-suite convergente. Plus précisément : Si $|a_n| \leqslant C$ pour tout n, alors il existe $L \in [-C, C]$ et une sous-suite $(a_{n_k})_k$ telle que $a_{n_k} \to L$.*

Preuve: Soit $L := \limsup_{n\to\infty} x_n$, c'est-à-dire

$$L = \lim_{n\to\infty} M_n\,,$$

où $M_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$. Considérons une suite $(\varepsilon_j)_{j\geqslant 1}$ positive, tendant vers zéro. (Pour fixer les idées, on peut choisir $\varepsilon_j := \frac{1}{j}$.)

- ⋆ $\underline{j = 1}$: Par définition de la limite, il existe n_1' tel que

  $$L - \tfrac{\varepsilon_1}{2} \leqslant M_{n_1'} \leqslant L + \tfrac{\varepsilon_1}{2}\,.$$

  Par définition du supremum, il existe $n_1 \geqslant n_1'$ tel que

  $$L - \varepsilon_1 \leqslant a_{n_1} \leqslant L + \varepsilon_1\,.$$

- ⋆ $\underline{j = 2}$: Par définition de la limite, il existe $n_2' > n_1$ tel que

  $$L - \tfrac{\varepsilon_2}{2} \leqslant M_{n_2'} \leqslant L + \tfrac{\varepsilon_2}{2}\,.$$

  Par définition du supremum, il existe $n_2 \geqslant n_2'$ tel que

  $$L - \varepsilon_2 \leqslant a_{n_2} \leqslant L + \varepsilon_2\,.$$

⋆ etc.

Ainsi, on a construit une suite (n_k) strictement croissante telle que pour tout k,

$$L - \varepsilon_k \leqslant a_{n_k} \leqslant L + \varepsilon_k \,.$$

Ceci signifie bien que $a_{n_k} \to L$. □

Avant de voir des exemples, remarquons que la conclusion du théorème n'est plus vraie en général si la suite n'est pas bornée :

Exemple 3.70. La suite $a_n = n$ n'est pas bornée, et elle ne possède aucune sous-suite convergente. ◇

Exemple 3.71. Considérons la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$a_n = \cos(e^{3n} + e^{n^2}\sin(5n^3))\,.$$

Puisque $|a_n| \leqslant 1$, le théorème garantit l'existence d'un réel $L \in [-1, 1]$ et d'une sous suite $(a_{n_k})_k$ telle que $a_{n_k} \to L$ lorsque $k \to \infty$. ◇

Voyons un exemple simple dans lequel la sous-suite peut être donnée explicitement.

Exemple 3.72. Considérons la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}\,,$$

qui est bornée puisque $|a_n| = \frac{n}{n+1} \leqslant 2$. Cette suite ne converge pas, mais le théorème garantit l'existence d'au moins une sous-suite convergente, et les candidats sont

Effectivement :

⋆ Si on ne regarde que les indices *pairs*, c'est-à-dire que l'on considère $n_k = 2k$, alors on obtient la sous-suite

$$a_{n_k} = a_{2k} = \frac{2k}{2k+1}\,,$$

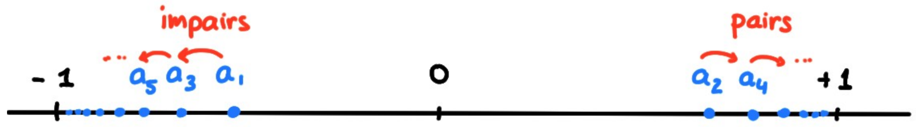
qui converge vers 1 lorsque $k \to \infty$.

⋆ Si on ne regarde que les indices *impairs*, c'est-à-dire que l'on considère $n_k = 2k + 1$, alors on obtient la sous-suite

$$a_{n_k} = a_{2k+1} = -\frac{2k+1}{2k+2}\,,$$

qui converge vers -1 lorsque $k \to \infty$.

Donc dans cet exemple, on peut extraire de la suite deux sous-suites différentes, qui ont des limites différentes :



Remarquons encore que $\limsup_{n\to\infty} a_n = +1$, et $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$. ◇

3.13 Suites de Cauchy

Remarquons que si une suite (a_n) converge, alors *la distance entre deux de ses éléments consécutifs tend vers zéro* :

$$|a_{n+1} - a_n| \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty\,.$$

En effet, si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, on peut écrire

$$|a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - L) - (a_n - L)| \leqslant \underbrace{|a_{n+1} - L|}_{\to 0 \text{ quand } n\to\infty} + \underbrace{|a_n - L|}_{\to 0 \text{ quand } n\to\infty}\,.$$

Mais on peut en fait en dire un peu plus : *la distance entre deux de ses éléments quelconques tend vers zéro à mesure que leurs indices grandissent*.

$$|a_m - a_n| \to 0 \quad \text{lorsque } m, n \to \infty\,.$$

En effet, on peut toujours écrire

$$|a_m - a_n| = |(a_m - L) + (L - a_n)| \leqslant \underbrace{|a_m - L|}_{\to 0 \text{ quand } m\to\infty} + \underbrace{|a_n - L|}_{\to 0 \text{ quand } n\to\infty}\,.$$

Cette propriété porte un nom :

Définition 3.73. (a_n) est une **suite de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que

$$|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon \quad \forall m, n \geqslant N\,.$$

On a donc démontré, ci-dessus, que *toute suite convergente est une suite de Cauchy*, qui est la première moitié du théorème fondamental suivant :

Théorème 3.74. *Dans $\mathbb{R}$, une suite (a_n) est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Preuve: Soit (a_n) une suite convergente : $a_n \to L$. Fixons $\varepsilon > 0$, et considérons un entier N tel que $|a_n - L| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant N$. Si on considère deux entiers $m, n \geqslant N$, on peut utiliser l'inégalité triangulaire et écrire

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |(a_m - L) + (L - a_n)| \\ &\leqslant |a_m - L| + |a_n - L| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Et donc (a_n) est une suite de Cauchy.

Pour montrer que toute suite de Cauchy est également convergente, voir la vidéo ci-dessus. □

Exemple 3.75. Considérons

$$a_n := 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

Étudions la différence $|a_n - a_m|$. En prenant $n > m \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \\
&= \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \\
&\leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} \\
&\leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\
&= \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{2^j} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - (\frac{1}{2})^m}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= (\tfrac{1}{2})^{m-1} - (\tfrac{1}{2})^{n-1} \\
&\leqslant (\tfrac{1}{2})^{m-1} .
\end{aligned}$$

On a utilisé $k! \geqslant 2^{k-1}$ (pour tout $k \geqslant 2$), fait le changement d'indice $j = k - 1$, et utilisé la formule pour une somme géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$.

Donc si on fixe $\varepsilon > 0$, puisqu'il existe N tel que $\frac{1}{2^{m-1}} \leqslant \varepsilon$ pour tout $m \geqslant N$, on peut conclure que si $n \geqslant m \geqslant N$, alors

$$|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon .$$

Ceci montre que (a_n) est une suite de Cauchy. Par le théorème, la limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe. ◇

Le fait que dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy et convergente est une des propriétés centrales des réels; ici, c'est une conséquence (pas directe, certes) de l'Axiome qui garantit que dans $\mathbb{R}$ tout ensemble non-vide majoré possède un supremum. Et en fait, on peut même montrer que la convergence des suites de Cauchy est *équivalente* à l'existence du supremum.

Il est important de souligner que cette équivalence n'a pas lieu dans les rationnels. En effet, on peut introduire la même notion de suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, et montrer que toute suite convergente $a_n \in \mathbb{Q}$ est une suite de Cauchy. Par contre, il existe des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ *qui ne convergent pas* dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, la suite

$$a_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

est une suite de rationnels (puisque a_n est une somme finie de rationnels), et on peut montrer comme ci-dessus que c'est une suite de Cauchy, et donc qu'elle converge.

Par contre, on peut montrer que la limite de a_n est $e = 2.718\ldots$, qui est irrationnel (voir par exemple **ici (Michael Penn)** (lien web), ou **là** (lien web)). Donc (a_n) est une suite de Cauchy (de rationnels), qui converge dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$.

On dit que $\mathbb{R}$ est un **corps complet** (car toute suite de Cauchy converge), alors que $\mathbb{Q}$ est aussi un corps, mais qui n'est pas complet.