Chapitre 4

Suites définies par récurrence

4.1 Définition, exemples

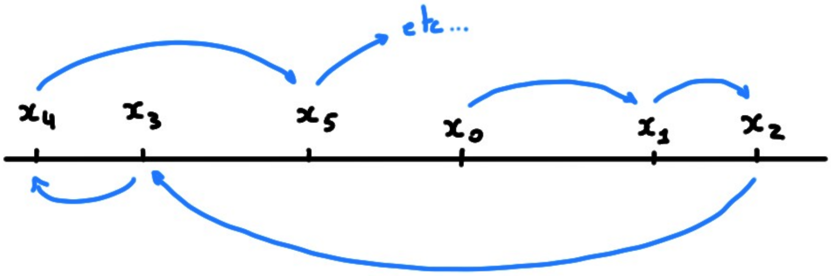
Une suite est définie **par récurrence** lorsque chacun de ses termes est défini en fonction du précédent. Plus précisément :

Définition 4.1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, et x un réel. On définit alors la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ par :

- ⋆ son premier terme (appelé aussi **condition initiale**) : $x_0 := x$,
- ⋆ puis, par récurrence pour $n \geqslant 0$,

$$x_{n+1} := g(x_n) \,.$$

On peut voir une telle suite comme un **système dynamique**, où x_n est la position d'une particule sur la droite au temps n ; à chaque instant la particule détermine sa prochaine position en fonction de l'actuelle. La suite $x_0, x_1, x_2, \dots$ est alors la **trajectoire** de la particule.



À l'inverse de la plupart des exemples de suites rencontrés jusqu'ici, pour lesquels le n-ème terme de la suite était défini explicitement comme fonction de l'entier n (comme "$x_n = \frac{n}{n+1}$"), l'étude des suites définies par récurrence est en général bien plus difficile (on ne peut pas facilement extraire des "termes dominants", etc.).

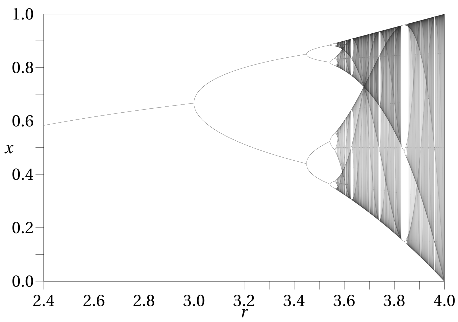
À titre de curiosité, mentionnons deux exemples célèbres.

Exemple 4.2. Un exemple fameux est celui de la **suite logistique** (lien web), associée à la fonction $g(x) = rx(1-x)$, où $r > 0$ est un paramètre fixé :

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$$

Ici, x_n modélise la taille d'une population à sa n-ème génération.

Le comportement de cette suite, dans la limite $n \to \infty$, dépend fortement de la valeur du paramètre r. Pour des petites valeurs de r, on peut montrer (voir exercices) que $x_n \to 0$, quelle que soit la condition initiale $x_0 \in [0,1]$. Par contre, pour des grandes valeurs de r, le comportement de x_n devient plus compliqué. Pour des valeurs $r > 3.8$, le comportement de la suite devient *chaotique*. (Voir l'animation à la fin du chapitre.)



Source : **Wikipedia : Logistic map** (lien web) ◇

Exemple 4.3. Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$g(x) := \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si x est pair,} \\ 3x+1 & \text{si x impair.} \end{cases}$$

En choisissant une condition initiale $x_0 \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres entiers, et est construite en commençant avec x_0, puis en définissant

$$x_{n+1} := g(x_n)\,.$$

La compréhension du comportement de cette suite dans la limite $n \to \infty$ est un des grands problèmes ouverts "fameux" des mathématiques.

On remarque, en essayant plusieurs conditions initiales, que la suite termine sur la boucle "$4, 2, 1$". Par exemple, en prenant $x_0 = 3$, la suite est

$$3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$$

En prenant $x_0 = 12$,

$$12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$$

La **Conjecture de Collatz** affirme que la suite termine toujours par la boucle "$4, 2, 1$", quelle que soit la condition initiale. Voir **Veritasium : The simplest math problem no one can solve** (lien web) ◇

4.1.1 Contenu de ce chapitre

Il n'existe pas de "théorie générale" permettant de comprendre le comportement asymptotique de toutes les suites définies par récurrence, donc nous nous contenterons de considérer quelques exemples, et de présenter quelques techniques qui permettent de les étudier.

4.2 Étude d'un cas simple

Commençons par un exemple simple de suite définie par récurrence,

$$x_{n+1} = g(x_n)\,,$$

avec la fonction affine

$$g(x) = 1 + \frac{x}{2}\,.$$

Ce cas a l'avantage de pouvoir être étudié par plusieurs méthodes ; on apprendra donc quelques "trucs" qui seront utiles pour la suite.

Nous étudions donc la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, avec une condition initiale x_0, et

$$x_{n+1} = 1 + \tfrac{1}{2} x_n\,.$$

Voyons trois méthodes très différentes, qui mènent toutes à la même conclusion sur le comportement de cette suite dans la limite $n \to \infty$.

4.2.1 Méthode 1 : Observer, puis travailler

On regarde si les premiers termes suggèrent un certain comportement, puis on essaie de montrer rigoureusement que la suite suit effectivement ce comportement pour tout n.

Par exemple, commençons avec $x_0 = 5$, et regardons quelques termes :

$$x_0 = 5,\ x_1 = 3.5\,,\ x_2 = 2.75\,,\ x_3 = 2.375\,,\ x_4 = 2.1875\,, \dots$$

Ces premiers termes semblent indiquer que la suite décroît.

Pour commencer, essayons donc de montrer que cette suite est monotone. Pour ce faire, considérons la différence $x_{n+1} - x_n$, en écrivant explicitement deux termes consécutifs, chacun en fonction du précédent :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + \tfrac{1}{2}x_n \\ x_n &= 1 + \tfrac{1}{2}x_{n-1} \end{aligned}$$

En soustrayant, on obtient

$$x_{n+1} - x_n = \tfrac{1}{2}(x_n - x_{n-1})\,,$$

et comme cette dernière vaut pour tout n, on peut l'itérer :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \tfrac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) \\ &= \tfrac{1}{2^2}(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= \tfrac{1}{2^n}(x_1 - x_0) \\ &= \tfrac{1}{2^n}\big((1 + \tfrac{x_0}{2}) - x_0\big) = \tfrac{1}{2^n}(1 - \tfrac{x_0}{2}) \end{aligned}$$

Cette suite d'égalités montre en particulier que pour tout n, le signe de $x_{n+1} - x_n$ est le même que celui de $1 - \frac{x_0}{2}$:

$$x_{n+1} - x_n = \tfrac{1}{2^n}(1 - \tfrac{x_0}{2}) \begin{cases} < 0 & \text{si } x_0 > 2 \\ = 0 & \text{si } x_0 = 2 \\ > 0 & \text{si } x_0 < 2\,. \end{cases}$$

On peut donc conclure sur la monotonie de notre suite :

- ⋆ (x_n) est strictement décroissante si $x_0 > 2$,
- ⋆ (x_n) est constante égale à 2 si $x_0 = 2$,
- ⋆ (x_n) est strictement croissante si $x_0 < 2$,

Dans le cas où $x_0 = 2$, la suite reste constante $x_n = 2$, et donc

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2\,.$$

Dans le cas où $x_0 \neq 2$, la suite n'est pas constante mais elle est strictement monotone, donc on peut espérer montrer qu'elle converge en la majorant (dans le cas où elle croît) ou en la minorant (dans le cas où elle décroît).

- ⋆ Si $x_0 < 2$, on montre par récurrence que (x_n) reste majorée par $M = 2$. En effet, l'affirmation est vraie pour $n = 0$, et si on suppose que $x_n < 2$, alors

$$x_{n+1} = 1 + \underbrace{\frac{x_n}{2}}_{<1} < 1 + 1 = 2\,.$$

⋆ Si $x_0 > 2$, on montre par récurrence que (x_n) reste minorée par $m = 2$. En effet, l'affirmation est vraie pour $n = 0$, et si on suppose que $x_n > 2$, alors

$$x_{n+1} = 1 + \underbrace{\frac{x_n}{2}}_{>1} > 1 + 1 = 2\,.$$

On sait donc, dans les deux cas ($x_0 < 2$ et $x_0 > 2$), que la suite est convergente, puisque monotone et bornée. Donc on a garanti l'existence de la limite

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

Reste à savoir ce que vaut L...

Or si on reprend encore une fois la relation qui définit toute la suite,

$$x_{n+1} = 1 + \tfrac{1}{2}x_n\,,$$

maintenant que l'on sait que $x_n \to L$, on peut prendre la limite $n \to \infty$ des deux côtés :

$$\underbrace{x_{n+1}}_{\to L} = 1 + \tfrac{1}{2}\underbrace{x_n}_{\to L}\,.$$

Ainsi, L doit être solution de l'équation

$$L = 1 + \tfrac{1}{2}L\,.$$

En résolvant, on obtient $L = 2$. On a donc montré que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Remarque 4.4. Il est utile d'apprécier ce que nous venons de faire en prenant une calculatrice et en observant qu'effectivement, en commençant par n'importe quel $x_0 \in \mathbb{R}$, et en calculant $x_1 = 1+\frac{x_0}{2}$, $x_2 = 1+\frac{x_1}{2}$, etc., on observe la monotonie de la suite (en fonction du choix de x_0), et sa convergence vers 2. ◇

4.2.2 Méthode 2 : Chercher la dépendance en n

On essaie d'*exprimer chaque x_n explicitement en fonction de n*. Pour cela, il est bien d'écrire les quelques premiers termes, pour essayer de voir apparaître une certaine structure

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 + \tfrac{1}{2}x_0\\
x_2 &= 1 + \tfrac{1}{2}x_1 = 1 + \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2}x_0) = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 x_0\\
x_3 &= 1 + \tfrac{1}{2}x_2 = 1 + \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2}x_1) = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 x_0\,.
\end{aligned}$$

On peut donc conjecturer que pour tout n,

$$x_n = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^{n-1} + (\tfrac{1}{2})^n x_0\,.$$

On a vérifié que cette expression est vraie pour $n = 1, 2, 3$. Maintenant, si elle est vraie pour n, alors

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= 1 + \tfrac{1}{2}x_n\\
&= 1 + \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^{n-1} + (\tfrac{1}{2})^n x_0)\\
&= 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^n + (\tfrac{1}{2})^{n+1} x_0\,,
\end{aligned}$$

et donc elle est vraie aussi pour $n+1$. Par récurrence, elle est vraie pour tout n.

Maintenant, on remarque dans l'expression générale de x_n une somme géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$:

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^{n-1} = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-(\tfrac{1}{2})^n)\,.$$

On a donc réussi à exprimer x_n explicitement en fonction de n :

$$x_n = 2(1-(\tfrac{1}{2})^n) + (\tfrac{1}{2})^n x_0\,,$$

ce qui permet de calculer la limite $n \to \infty$. En effet, $(\frac{1}{2})^n \to 0$ et $(\frac{1}{2})^n x_0 \to 0$, quelle que soit la valeur de x_0. Donc la limite ne dépend pas de la condition initiale, et vaut

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

4.2.3 Méthode 3 : Chercher une suite de Cauchy.

On essaie de montrer que la suite converge, en montrant que *c'est une suite de Cauchy*.

D'après le calcul fait dans la Méthode 1,

$$|x_{k+1} - x_k| = \tfrac{1}{2^k}|1 - \tfrac{x_0}{2}| \quad \forall k\,.$$

On peut alors étudier, pour $n > m$,

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \big|(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_{m+1} - x_m)\big| \\
&\leqslant \sum_{k=m}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| \\
&\leqslant |1 - \tfrac{x_0}{2}| \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\
&= |1 - \tfrac{x_0}{2}| \Big\{ \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-(\frac{1}{2})^m}{1-\frac{1}{2}} \Big\} \\
&= |1 - \tfrac{x_0}{2}| \Big\{ \frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} \Big\}\,,
\end{aligned}$$

qui tend vers zéro lorsque $n, m \to \infty$, quelle que soit la valeur de x_0. Ceci montre que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy, et donc qu'elle converge :

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

On obtient la valeur de L comme on l'a fait avant, en prenant la limite $n \to \infty$ des deux côtés de la relation $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2}$. On a donc montré que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

4.3 Remarques générales

L'étude de l'exemple de la section précédente a montré qu'une information utile peut être obtenue en prenant la limite $n \to \infty$ des deux côtés de la relation

$$x_{n+1} = g(x_n)\,.$$

Ceci mène à la définition suivante.

Définition 4.5. Un réel x_* est un **point fixe de** g si $g(x_*) = x_*$.

Exemple 4.6. $g(x) = 1 + \frac{x}{2}$ possède un unique point fixe $x_* = 2$. ⋄

Exemple 4.7. $g(x) = 4x(1 - x)$ possède deux points fixes, $x_*^1 = 0$ et $x_*^2 = \frac{3}{4}$. ⋄

Exemple 4.8. $g(x) = e^x$ ne possède aucun point fixe. ⋄

A priori, l'existence ou non d'un point fixe n'est pas *forcément* reliée au comportement de la suite dans la limite $n \to \infty$, mais la recherche de points fixes est un bon point de départ dans l'étude d'une suite définie par récurrence.

Par exemple, si on sait que g possède un point fixe x_*, et si on utilise ce point comme condition initiale

$$x_0 := x_* \,,$$

alors la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ est constante :

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) = g(x_*) = x_* \\ x_2 &= g(x_1) = g(x_*) = x_* \\ x_3 &= g(x_2) = g(x_*) = x_* \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ce qui est plus intéressant est d'utiliser la connaissance de points fixes pour guider l'étude de la suite.

Pour commencer, si une condition de régularité est satisfaite par g, alors l'éventail de scénarios possibles pour le comportement de la suite est considérablement réduit :

Théorème 4.9. *Si une suite définie par récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$ est convergente, et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue , alors la limite de x_n est un point fixe de g.*

Preuve: Si $x_n \to L$, alors $x_{n+1} \to L$ et la continuité de g au point L implique $g(x_n) \to g(L)$. Donc en prenant la limite $n \to \infty$ des deux côtés de la relation

$$x_{n+1} = g(x_n)\,,$$

on obtient

$$L = g(L)\,.$$

Donc L est un point fixe de g. □

Voyons un exemple où la recherche de points fixes est utile dans l'étude de la limite :

Exemple 4.10. Considérons la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, avec condition initiale $x_0 = 4$, et $g(x) = 2 - \frac{1}{x}$, c'est-à-dire

$$x_{n+1} = g(x_n) = 2 - \frac{1}{x_n}\,.$$

Cherchons les points fixes de g :

$$2 - \frac{1}{x_*} = x_* \quad \Leftrightarrow \quad (x_* - 1)^2 = 0\,.$$

Donc $x_* = 1$ est l'unique point fixe de g, et c'est a priori un candidat pour la limite. Puisque notre condition initiale est $x_0 = 4 > 1$, on peut essayer de voir si la suite décroît. C'est effectivement ce qu'indiquent les premières valeurs :

$$\begin{aligned}
&x_0 = 4 \\
&x_1 = 2 - \frac{1}{x_0} = 2 - \frac{1}{4} = 1.75 \\
&x_2 = 2 - \frac{1}{x_1} = 2 - \frac{1}{1.75} = 1.428\dots \\
&x_3 = 2 - \frac{1}{x_2} = 2 - \frac{1}{1.428\dots} = 1.3 \\
&x_4 = 2 - \frac{1}{x_3} = 2 - \frac{1}{1.3\dots} = 1.230\dots \\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

On a donc un scénario qui semble raisonnable : montrer rigoureusement que la suite converge, puis que sa limite vaut $x_* = 1$.

Montrons d'abord que la suite est minorée par 1. Pour la condition initiale, on a $x_0 = 4 > 1$. Ensuite, si on suppose que $x_n > 1$, alors

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} > 2 - \frac{1}{1} = 1\,.$$

Ceci montre en particulier que x_n est toujours bien définie.

Ensuite, en calculant

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= 2 - \frac{1}{x_n} - x_n \\
&= \frac{2x_n - 1 - x_n^2}{x_n} \\
&= \frac{-(x_n - 1)^2}{x_n} \leqslant 0\,,
\end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que $x_n > 1 > 0$) on voit que (x_n) est décroissante.

Étant minorée et décroissante, la suite converge :

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

Puisque toute la suite évolue sur le domaine $]0, +\infty[$, sur lequel g est continue, on en déduit par le théorème du dessus que L ne peut être qu'un point fixe de g ; comme il n'y en a qu'un, $x_* = 1$, on en déduit que $L = 1$. ◇

Informel 4.11. En fait, on a calculé la valeur d'une **fraction continue**

$$2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cdots}}}} = 1$$

Une fonction continue g peut posséder plusieurs points fixes. Dans ce cas, si la suite converge le théorème ne dit pas vers quel point fixe elle converge. Dans un tel cas, une étude détaillée est nécessaire (voir les exercices).

Mais le théorème est utile dans le cas suivant : si g est continue et ne possède *pas* de point fixe, alors (x_n) n'a pas de limite. (En effet, si elle convergeait, alors sa limite serait un point fixe, une contradiction.)

Exemple 4.12. Considérons une suite (x_n) pour laquelle

$$x_{n+1} = x_n^2 + 3\,.$$

Ici, puisque $g(x) = x^2 + 3$ est continue et n'a pas de point fixe (car l'équation $g(x) = x$ n'a pas de solutions), on en déduit que x_n ne peut pas converger, quelle que soit la condition initiale choisie. ◇

Quiz 4.3.1. *Soit* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par* $a_0 := 1$, $a_{n+1} = g(a_n)$. *Quelles affirmations sont toujours vraies ?*

1) □ $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *est toujours convergente,* $a_n \to L$, *et* $L = g(L)$.
2) □ *Si* $a_n \to L$, *alors* $L = g(L)$.
3) □ *Si* $a_n \to L$ *et si* $g(x) > 0$ *pour tout* $x > 0$, *alors* $L > 0$.
4) □ *Si* g *est croissante, alors* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *est croissante.*
5) □ *Si* g *est décroissante, alors* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *est décroissante.*
6) □ *Si* g *est monotone, alors* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *est monotone.*

4.4 Approche graphique

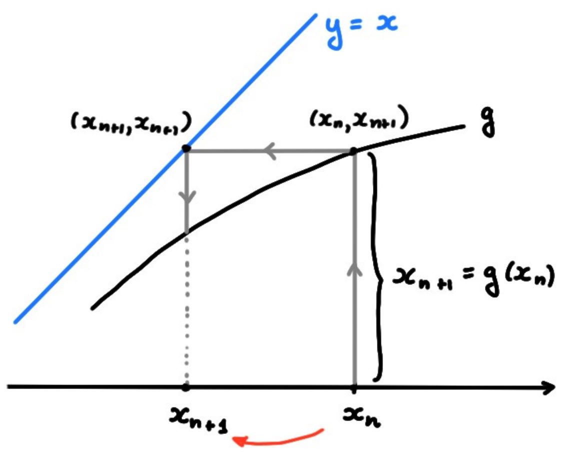
La difficulté, dans l'étude d'une suite $x_{n+1} = g(x_n)$, est parfois de savoir par où commencer. Montrer que la suite est majorée/minorée ? Si oui, avec quel majorant/minorant ? Montrer que la suite est croissante/décroissante ?

Nous allons voir maintenant que le *graphe* de g peut être une aide précieuse dans cette analyse, et peut donner des pistes.

Remarque 4.13. L'approche graphique que nous allons présenter est utile car elle suggère des façons de commencer à étudier la suite, mais elle ne fournit en aucun cas une étude rigoureuse. ◇

Supposons que le graphe de la fonction g est connu, et que la valeur de x_n a déjà été calculée. Montrons comment construire x_{n+1} **graphiquement** à partir de x_n et du graphe de g :

1) Commencer en $(x_n, 0)$
2) Monter verticalement sur le graphe de g, au point $(x_n, g(x_n)) = (x_n, x_{n+1})$
3) Glisser horizontalement jusque vers la diagonale $y = x$, au point (x_{n+1}, x_{n+1})
4) Redescendre sur $(x_{n+1}, 0)$

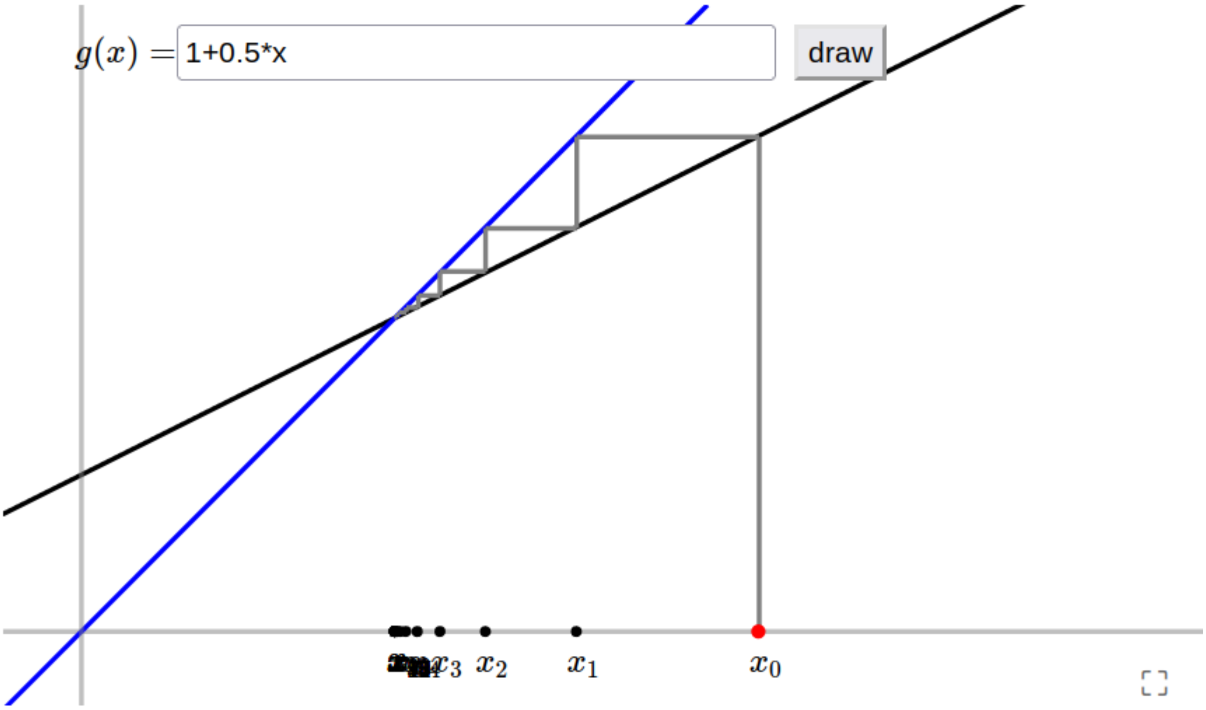


Bien-sûr, on peut sur le même dessin représenter x_{n+2} à partir de x_{n+1}, etc. Donc en partant de x_0, on a un moyen graphique de suivre la trajectoire $x_0, x_1, x_2, \ldots$

Exemple 4.14. Reprenons le premier exemple considéré dans ce chapitre, associée à

$$g(x) = 1 + \frac{x}{2}\,.$$

Sur l'animation ci-dessous, observer le comportement de la suite en fonction de la condition initiale x_0 :



On observe graphiquement tout ce que nous avions obtenu analytiquement. En particulier, on voit le point fixe $x_* = 2$, à l'intersection entre le graphe de g et la droite $y = x$. Puis, une fois la condition initiale x_0 choisie,

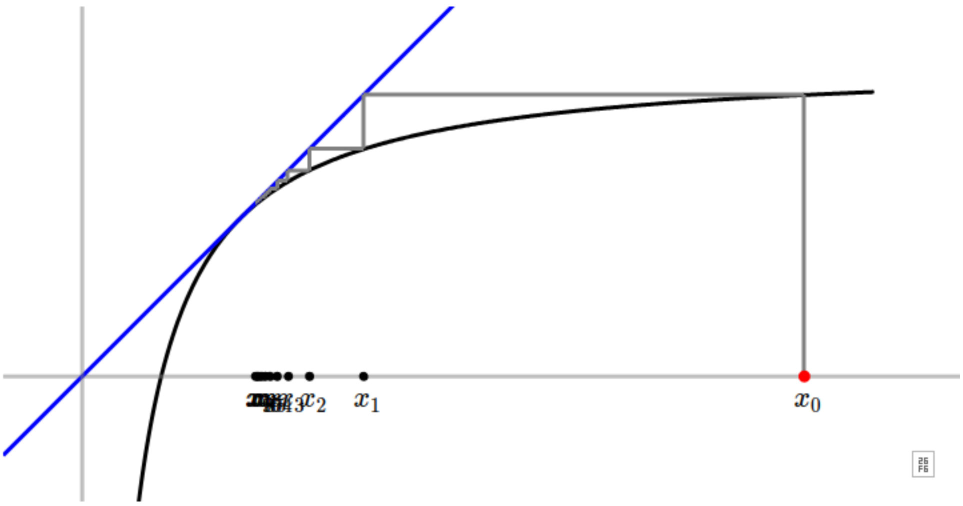
- ⋆ x_n est décroissante si $x_0 > 2$
- ⋆ x_n est croissante si $x_0 < 2$
- ⋆ dans les deux cas, x_n converge vers le point fixe

◇

Exemple 4.15. Considérons la suite traitée dans la section précédente, associée à

$$g(x) = 2 - \frac{1}{x}\,,$$

avec la condition initiale $x_0 = 4$:

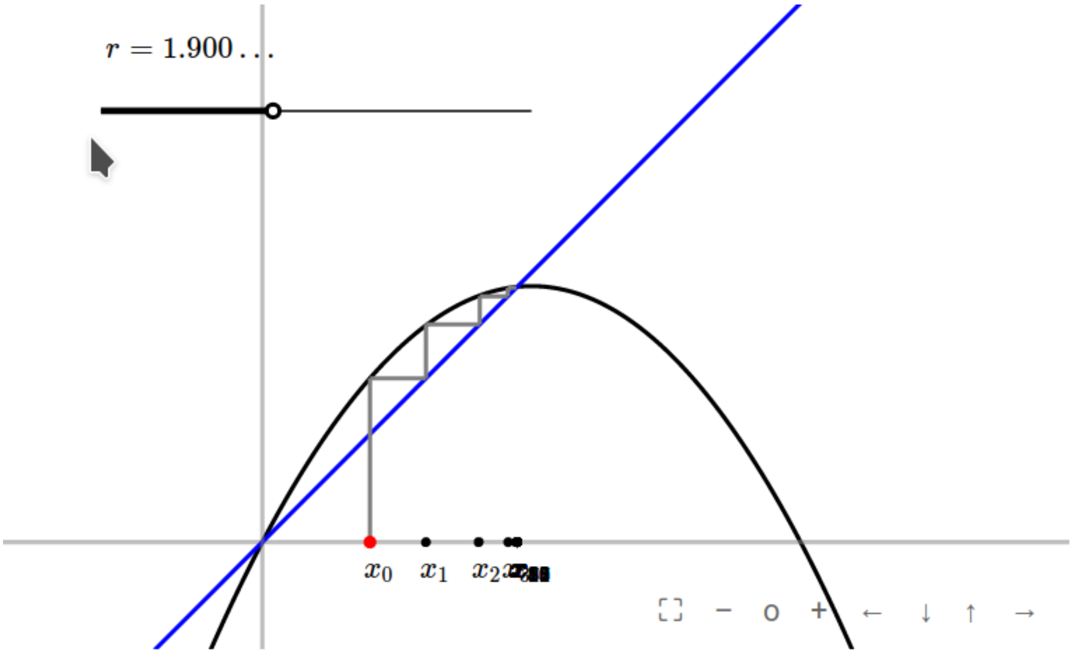


On remarque que le graphe de g est tangent à la diagonale au point fixe, et comme n'importe quelle condition initiale au-dessus du point fixe mène toujours à la même limite, qui est atteinte en décroissant, comme vu précédemment. D'autres conditions initiales mènent à la même limite, mais sans que la suite soit forcément monotone. ◇

Exemple 4.16. Considérons la suite logistique de l'introduction,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)\,.$$

L'animation ci-dessous montre les grandes différences dans le comportement asymptotique de la suite, en fonction de la valeur du paramètre $r > 0$. (Pour ne pas rendre le dessin incompréhensible, on n'a représenté que les 20 premiers termes de la suite.)



◇