Chapitre 11

Séries entières et séries de Taylor

11.1 Introduction

Supposons qu'une fonction f possède des développements limités en x_0, *de tous les ordres* :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + R_1(x) \\
f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + R_2(x) \\
f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + R_3(x) \\
&\vdots \\
f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 \cdots + a_n(x-x_0)^n + R_n(x) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Que se passe-t-il si on prend $n \to \infty$?

Remarquons qu'au-dessus, on a fait attention de nommer le reste différemment en fonction de l'ordre du DL.

Puisqu'un développement limité d'ordre de plus en plus grand implique une approximation de $f(x)$ toujours meilleure, on s'attend à ce que la limite "$n \to \infty$" mène à une reconstruction *exacte* de $f(x)$, dans laquelle il n'y a plus d'approximation.

Décrivons plus précisément ce processus de limite. *Fixons* un point x dans le voisinage de x_0.

a) D'abord, à mesure que n devient plus grand, le polynôme de la partie principale contient toujours plus de termes. Dans la limite $n \to \infty$ il devient une *série de puissances* (un "polynôme de degré infini") :

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \,,$$

et pour que cette série fasse du sens, il faut pouvoir montrer qu'elle converge pour le x qu'on a fixé.

b) Ensuite, afin de garantir que cette série décrit exactement la fonction, il faut s'assurer que la suite de restes, au point x qu'on a fixé, tend vers zéro :

$$R_n(x) \to 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty$$

(Attention : ici x est fixé, c'est n qui tend vers l'infini !)

Si on peut vérifier ces deux conditions, cela signifie que la valeur de f en x peut se calculer à l'aide de la série :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k .$$

On verra plus tard que ce programme est possible, sous certaines hypothèses.

Mais avant cela, nous allons introduire et étudier plus systématiquement les séries de puissance du type ci-dessus.

11.2 Séries entières

Indépendamment du problème énoncé ci-dessus, on peut étudier les séries (infinies) de puissances sans qu'elles soient nécessairement liées à une suite de développements limités :

Définition 11.1. Une série de la forme

$$\sum_{k \geqslant 0} a_k (x - x_0)^k$$

où $(a_k)_{k \geqslant 0}$ est une suite donnée, $x_0 \in \mathbb{R}$, est appelée **série entière** (ou **série de puissances**, en anglais : **power series**).

Une série entière est un type particulier de série, où x joue le rôle de paramètre ; sa convergence/divergence dépend en général de x. Pour pouvoir utiliser cette série comme une fonction, on s'intéresse donc aux valeurs de x pour lesquelles elle converge :

$$D := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ converge} \right\} ,$$

Remarque 11.2. D contient toujours au moins le point $x = x_0$! ◇

On peut alors définir une fonction sur D, à l'aide de la somme de la série :

$$\begin{aligned} \psi : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \psi(x) := \sum_{k \geqslant 0} a_k (x - x_0)^k . \end{aligned}$$

La fonction ψ est, par nature, difficile à étudier. Considérons d'abord un cas simple bien connu :

Exemple 11.3. Considérons la série entière associée à la suite constante $a_k = 1$, au point $x_0 = 0$:

$$\psi(x) = \sum_{k \geqslant 0} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

On reconnaît la série géométrique, qui comme on sait converge si et seulement si $x \in D =]-1, 1[$. ◇

Remarque 11.4. Ce que l'on sait aussi, dans le cas particulier de ce dernier exemple, c'est que si $x \in]-1, 1[$, alors on peut *sommer* la série, et donc calculer explicitement la fonction :

$$\psi(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{(!!!)}$$

Donc on peut formuler ce résultat comme suit : lorsque $x \in]-1, 1[$, la série entière convergente $\sum_{k \geqslant 0} x^k$ peut être utilisée pour *représenter* la fonction $\frac{1}{1-x}$. ◇

11.2.1 Rayon et intervalle de convergence

L'ensemble des x pour lesquels la série converge a une structure assez simple :

Théorème 11.5. *Il existe un réel $0 \leqslant R \leqslant +\infty$ tel que*

$$\sum_{k \geqslant 0} a_k (x - x_0)^k \begin{cases} \textit{converge si } |x - x_0| < R\,, \\ \textit{diverge si } |x - x_0| > R\,. \end{cases}$$

*On appelle R le **rayon de convergence** de la série.*

De plus, dans le cas où on peut donner un sens à la limite

$$\sigma := \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,,$$

alors

$$R = \begin{cases} +\infty & \textit{si } \sigma = 0\,, \\ \frac{1}{\sigma} & \textit{si } 0 < \sigma < \infty\,, \\ 0 & \textit{si } \sigma = \infty\,. \end{cases}$$

Preuve: Écrivons notre série entière sous la forme $\sum_{k \geqslant 0} b_k(x)$, où

$$b_k(x) := a_k (x - x_0)^k\,.$$

Commençons par supposer que la limite suivante existe :

$$\sigma(x) := \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|b_n(x)|}\,,$$

on sait, par le critère de Cauchy, que

$$\sum_{k \geqslant 0} b_k(x) \begin{cases} \text{converge si} & \sigma(x) < 1\,, \\ \text{diverge si} & \sigma(x) > 1\,. \end{cases}$$

Or si on regarde de plus près,

$$\sigma(x) = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x - x_0|\sigma\,,$$

ce qui implique que

$$\sum_{k\geqslant 0} b_k(x) \begin{cases} \text{converge si} & |x - x_0| < \frac{1}{\sigma}\,, \\ \text{diverge si} & |x - x_0| > \frac{1}{\sigma}\,. \end{cases}$$

Donc en définissant R par $R := \frac{1}{\sigma}$, on obtient bien le résultat. □

Remarque 11.6. ⋆ On peut vérifier que la limite σ peut s'exprimer sous une autre forme, utile dans certaines situations :

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,,$$

⋆ La conclusion du théorème ci-dessus reste vraie si σ est défini par

$$\sigma := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

◇

Le théorème ci-dessus garantit que l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels une série entière converge est nécessairement un intervalle, appelé **intervalle de convergence** :

- ⋆ Si $R = 0$, la série converge uniquement lorsque $x = x_0$, et donc $D = \{x_0\}$ (un intervalle ne contenant que le point x_0).
- ⋆ Si $0 < R < \infty$, alors D est un intervalle, d'un des 4 types suivants :

$$\begin{aligned} &]x_0 - R, x_0 + R[\,, \\ &[x_0 - R, x_0 + R[\,, \\ &]x_0 - R, x_0 + R]\,, \\ &[x_0 - R, x_0 + R]\,. \end{aligned}$$

- ⋆ Si $R = \infty$, elle converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $D = \mathbb{R}$.

Informel 11.7. Dans le cas où $0 < R < \infty$, on déterminera le type d'intervalle en étudiant la convergence de la série entière $\sum_k a_k(x - x_0)^k$ au bord de l'intervalle, c'est-à-dire en $x = x_0 \pm R$.

Une fois que D est connu, la série entière permet donc de définir la *fonction*

$$\begin{aligned} \psi : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \psi(x) := \sum_{k\geqslant 0} a_k(x - x_0)^k\,. \end{aligned}$$

Considérons pour commencer des exemples de séries entières centrées en $x_0 = 0$:

$$\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$$

Par le théorème ci-dessus, on sait que l'intervalle de convergence est forcément de la forme

a) $D = \{0\}$ (lorsque $R = 0$),
b) $D = \mathbb{R}$ (lorsque $R = \infty$).
c) $D =]-R, R[$, $[-R, R[$, $]-R, R]$ ou $[-R, R]$ (lorsque $0 < R < \infty$), et on déterminera précisément le cas en étudiant la série en $x = \pm R$.

Exemple 11.8. Considérons

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} x^k .$$

Dans ce cas,

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\tfrac{(-1)^n}{2^n}\right|} = \frac{1}{2} ,$$

et donc $R = \frac{1}{\sigma} = 2$: la série converge pour tout $-2 < x < 2$, et diverge si $x > 2$ ou $x < -2$. Regardons maintenant ce qui se passe en $x = \pm 2$.

⋆ En $x = +2$ la série est

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots ,$$

et donc elle diverge.

⋆ En $x = -2$ la série est

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots ,$$

donc elle diverge aussi.

On conclut donc que l'intervalle de convergence est $D =]-2, 2[$. ◇

Exemple 11.9. Considérons

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k$$

Ici,

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{2\frac{\log(n)}{n}} = e^0 = 1 ,$$

donc $R = 1$. Comme la série diverge lorsque $x = \pm 1$, on a que $D =]-1, 1[$. ◇

Exemple 11.10. Considérons

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k$$

Ici,

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty ,$$

donc $R = 0$. Donc la série converge si et seulement si $x = 0$: $D = \{0\}$ ◇

Exemple 11.11. Considérons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

Utilisons la version "d'Alembert" :

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1/(n+1)}{1/n}\right| = 1 ,$$

donc $R = 1$. Regardons $x = \pm 1$:

⋆ En $x = +1$, la série est

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots ,$$

qui est la série harmonique, qui diverge.

⋆ En $x = -1$, la série est

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots ,$$

qui est (à un signe près) la série harmonique alternée, qui converge.

On conclut que l'intervalle de convergence est $D = [-1, 1[$. ◇

Exemple 11.12. Considérons

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

On trouve

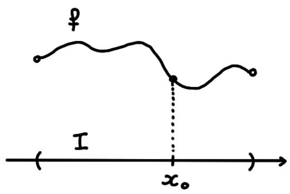
$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = 0 ,$$

et donc $R = \infty$: la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc son intervalle de convergence est $D = \mathbb{R}$. (Cette série peut être utilisée pour **définir la fonction exponentielle** e^x (lien web).) ◇

11.3 Séries de Taylor pour représenter des fonctions

Revenons à notre problème initial, qui était de prendre la limite $n \to \infty$ pour une fonction qui possède, pour tout n, un $DL(n)$.

Soit I un intervalle ouvert, f une fonction définie sur I, et $x_0 \in I$ un point fixé.



On sait, depuis la formule de Taylor, que si f est de classe C^{n+1} sur I, alors elle possède un $DL(n)$ en x_0. Donc si on veut que f possède des DL de tous les ordres, on peut imposer qu'elle soit *infiniment dérivable* sur I.

Définition 11.13. L'ensemble des fonctions **infiniment dérivables sur** I est défini par

$$C^\infty(I) := \left\{ f : I \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \in C^k(I)\ \forall k \geqslant 1 \right\}$$

Exemple 11.14. Les fonctions fondamentales, telles que polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmes, sont toutes infiniment dérivables sur leur domaine de définition. ◇

Donc si $f \in C^\infty(I)$, elle possède un développement limité à tous les ordres en x_0, dont les coefficients sont donnés par $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$:

$$\begin{aligned}
&f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x)\\
&f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + R_2(x)\,.\\
&f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \tfrac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + R_3(x)\,.\\
&\quad\vdots\\
&f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \tfrac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \cdots + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)\,.\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant décrire les contraintes à imposer pour garantir que dans la limite $n \to \infty$, les parties principales permettent de reconstruire entièrement $f(x)$.

On l'a déjà dit, dans la limite, les parties principales donnent naissance à une série entière :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\,,$$

Il sera donc essentiel de s'assurer que *le x qu'on considère appartient à l'intervalle de convergence de cette série.*

Mais ça n'est pas encore suffisant : on voudra aussi que *la limite des restes soit nulle*, pour le x qu'on considère :

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Le procédé peut donc être résumé de la façon suivante :

a) On calculera le rayon de convergence R et l'intervalle de convergence de la série entière
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\,,$$
noté I_s.

b) On déterminera tous les $x \in I$ pour lesquels $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$; on notera I_r l'ensemble de ces x.

Informel 11.15. Rappelons qu'à n fixé, $R_n(x)$ étant le reste du $DL(n)$ de f autour de x_0,

$$\lim_{x\to x_0} R_n(x) = 0\,.$$

Mais ici, ce que l'on fait est différent : on fixe un x proche de x_0, et on demande que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0\,.$$

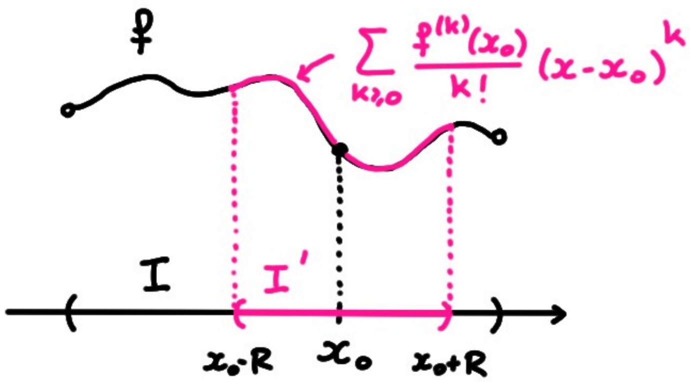
Si ces deux étapes peuvent être vérifiées rigoureusement, on aura montré que sur l'ensemble

$$I' := I \cap I_s \cap I_r\,.$$

f peut être **représentée** à l'aide de la série

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \forall x \in I' ,$$

appelée **série de Taylor** (ou **développement de Taylor**). Lorsque $x_0 = 0$, on l'appelle **série de MacLaurin** (ou **développement de MacLaurin**).



Définition 11.16. Une fonction infiniment dérivable f, définie au voisinage du point x_0, **possède un développement de Taylor (DT) en** x_0 si elle peut être représentée par sa série de Taylor dans ce voisinage :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k .$$

Si la fonction peut effectivement être représentée par sa série de Taylor, cela signifie qu'elle peut être entièrement reconstruite, dans un voisinage de x_0, à l'aide de la connaissance de *toutes* ses dérivées en x_0.

11.4 Exemples

Étudions maintenant quelques développements de Taylor classiques. Nous utiliserons le procédé décrit plus haut sur quelques exemples simples, puis listerons aussi d'autres développements, dont la justification rigoureuse ne sera pas donnée, puisqu'elle requiert d'autres techniques.

Exemple 11.17. Étudions le développement de MacLaurin de $f(x) = e^x$.

Puisque $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout k, $f \in C^\infty(I)$, avec $I = \mathbb{R}$. Pour tout n fixé, son $DL(n)$ autour de 0 est donné par

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) ,$$

où $R_n(x) = x^n \varepsilon_n(x)$, avec

$$\varepsilon_n(x) = x\frac{e^u}{(n+1)!} ,$$

où u est un nombre entre 0 et x. Voyons si on peut prendre la limite $n \to \infty$, en vérifiant les deux étapes décrites plus haut.

a) D'abord, la série de MacLaurin associée est

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} x^k \,.$$

On a vu que cette série a un rayon de convergence infini, elle converge donc pour tout x : $I_s = \mathbb{R}$.

b) Ensuite, pour calculer la limite du reste, on commence par l'estimer comme suit : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| = |x^n \varepsilon_n(x)| &= \left| x^{n+1} \frac{e^u}{(n+1)!} \right| \\ &\leqslant |x|^{n+1} \frac{e^{|u|}}{(n+1)!} \\ &\leqslant e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Dans cette dernière inégalité, on a utilisé le fait que u est entre 0 et x, et donc $|u| \leqslant |x|$. Maintenant, puisque x est fixé, le critère de d'Alembert (pour les suites) implique que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \,,$$

on a donc bien que le reste tend vers zéro : $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, pour tout $x \in I_r = \mathbb{R}$.

Ceci implique que l'exponentielle peut être écrite à l'aide de sa série de MacLaurin, pour tout réel $x \in I' = I \cap I_s \cap I_r = \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^x = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} x^k \,.}$$

◇

Remarque 11.18. En général, dans les livres d'analyse, la fonction exponentielle est **définie** par sa série de MacLaurin, ce qui représente toutes sortes d'avantages. Mais bien-sûr, si on la définit par sa série, il faut ensuite démontrer que des propriétés classiques, comme par exemple $e^{x+y} = e^x e^y$ ou $(e^x)' = e^x$, sont effectivement vérifiées. ◇

Exemple 11.19. Considérons le sinus hyperbolique,

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \,.$$

Puisqu'on a déjà la série de Taylor de e^x, et que celle-ci converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-x)^k}{k!} \Big) \\ &= \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} \frac{(1-(-1)^k)}{2} x^k \,. \end{aligned}$$

Mais puisque

$$\frac{1-(-1)^k}{2} = \begin{cases} 0 & k \text{ pair,} \\ 1 & k \text{ impair,} \end{cases}$$

seuls les termes d'indices impairs demeurent. On a donc

$$\boxed{\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k \geqslant 0} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

De même pour le cosinus hyperbolique,

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,$$

$$\boxed{\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k \geqslant 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

◇

Exemple 11.20. Considérons le développement de MacLaurin de $f(x) = \sin(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. On peut écrire ses dérivées de façon compacte,

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\tfrac{\pi}{2})\,,$$

ce qui donne $f^{(n)}(0) = \sin(n\frac{\pi}{2})$. On a donc que toutes les dérivées d'ordre pair sont nulles, $f^{(2k)}(0) = 0$, alors que $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, ce qui donne une série de Taylor

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}\,.$$

On vérifie facilement que cette série converge pour tout $x \in I_s := \mathbb{R}$. Le reste étant $R_n(x) = x^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}$, et puisque $|f^{(n+1)}(u)| \leqslant 1$, on a aussi que $R_n(x) \to 0$ pour tout $x \in I_r := \mathbb{R}$. Ceci montre que la série de Taylor décrit f sur toute la droite :

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

On peut procéder de même pour montrer que

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

◇

Voyons un exemple où on est forcé de restreindre les valeurs de x pour pouvoir implémenter notre programme :

Exemple 11.21. Considérons $f(x) = \log(1+x)$, définie sur $I =]-1, +\infty[$. Sur I, f est infiniment dérivable, et ses dérivées sont données par

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k}\,.$$

Ainsi, sa série de MacLaurin est

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\,,$$

et on a vu que l'intervalle de convergence de cette série entière est $I_s :=]-1, 1]$, L'étude du reste est plus délicate. Si $x \in I_s$,

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= |x^n \varepsilon_n(x)| \\ &= \left| x^{n+1} \frac{f^{(k+1)(u)}}{(n+1)!} \right| \\ &= \frac{1}{n+1} \left| \frac{x}{1+u} \right|^{n+1}\end{aligned}$$

On voit que pour tendre vers zéro, il faut s'assurer que $|\frac{x}{1+u}| \leqslant 1$. Distinguons les cas. D'une part, si $x \geqslant 0$, alors $u \geqslant 0$, et donc

$$\left| \frac{x}{1+u} \right| = \frac{x}{1+u} \leqslant x \leqslant 1\,,$$

ce qui permet d'écrire

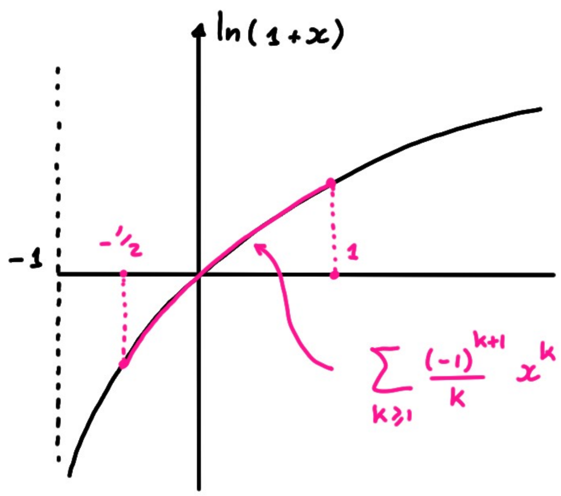
$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty\,.$$

D'autre part, si $-1 < x \leqslant 0$ alors $1+u \geqslant 1+x > 0$ et donc

$$\left| \frac{x}{1+u} \right| = \frac{-x}{1+u} \leqslant \frac{-x}{1+x}\,.$$

Donc pour garantir $|\frac{x}{1+u}| \leqslant 1$, on peut imposer $\frac{-x}{1+x} \leqslant 1$, qui est équivalent à $x \geqslant -\frac{1}{2}$. Donc $R_n(x) \to 0$ dès que $x \in I_r := [-\frac{1}{2}, 1]$. Ainsi, on a montré que

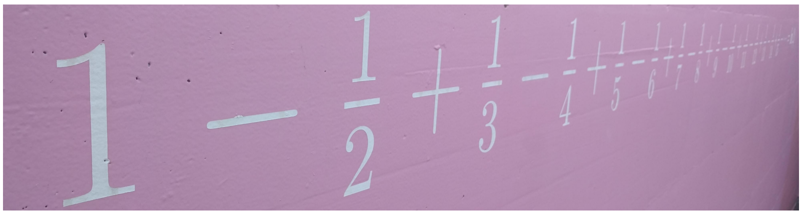
$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\,, \quad \forall x \in [-\tfrac{1}{2}, 1]}$$



On ne le fera pas ici, mais on peut en fait montrer que la série de MacLaurin représente la fonction sur tout l'intervalle $]-1,1]$. ◇

Si on utilise le développement ci-dessus en $x = 1$ (juste sur le bord de l'intervalle où on a le droit de l'utiliser !), on peut écrire

$$\log(2) = \log(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$$



Remarque 11.22. On peut aussi montrer, avec une méthode qui n'a rien à voir avec les développements limités (voir **ici** (lien web)), que

$$\log(2) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots$$

◇

Exemple 11.23. On peut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,.}$$

◇

Remarque 11.24. Puisque $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, on peut utiliser cette série de Taylor pour représenter π :

$$\pi = 4\frac{\pi}{4} = 4\arctan(1) = 4\Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots\Big)$$

Chaque somme partielle de cette série fournit une approximation du nombre π. Par exemple, à l'ordre 11,

$$\pi \simeq 4\Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}\Big) = 2.9760\cdots.$$

Cette approximation n'est pas très bonne, car les sommes partielles de cette série se rapprochent assez lentement de leur limite. **En fait** (lien web), il faudrait aller jusqu'à l'ordre 300 pour avoir seulement deux décimales correctes :

$$\begin{aligned}\pi \simeq& 4\Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{299} - \frac{1}{301}\Big)\\ =& 3.14821509\cdots.\end{aligned}$$

Il existe d'autres séries **voir Wiki)** (lien web) qui permettent d'approximer π, dont les sommes partielles s'approchent beaucoup plus rapidement de leur limite. Considérons par exemple la formule de **Chudnovsky** (1987) :

$$\pi = 2\sum_{k\geqslant 0} \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!}\,.$$

Avec 11 termes,

$$\begin{aligned}\pi \simeq & 2\Big(1 + \frac{2}{3!} + \frac{2^2 2!^2}{5!} + \cdots + \frac{2^{11}(11!)^2}{23!}\Big)\\ &= 3.1413584\ldots\end{aligned}$$

◇

11.4.1 Des fonctions que l'on ne peut pas représenter par une série de Taylor ?

Voyons maintenant un exemple d'une fonction qui est infiniment dérivable en un point mais qui ne peut *pas* être représentée par sa série de Taylor, même si cette dernière est bien définie :

Exemple 11.25. Considérons

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

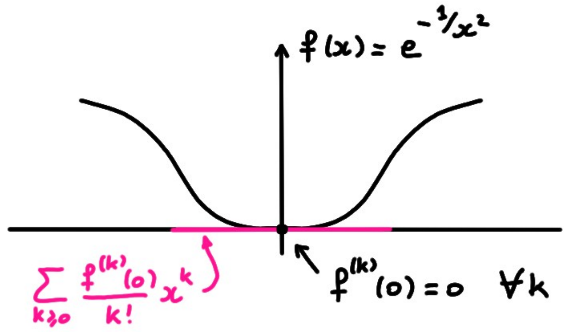
Clairement, f est infiniment dérivable partout en dehors de $x = 0$. En travaillant un peu plus (laissé en exercice), on peut montrer que f est également infiniment dérivable en $x = 0$, et que ses dérivées en ce point sont toutes nulles :

$$f^{(k)}(0) = 0 \qquad \forall k \geqslant 1\,.$$

On en déduit que le $DL(n)$ en $x_0 = 0$ existe, et est donnée par

$$f(x) = \underbrace{0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \cdots + 0\cdot x^n}_{=0} + \underbrace{R_n(x)}_{=f(x)}$$

On en déduit que sa série de MacLaurin est la série entière dont *tous les termes sont nuls* ; elle converge donc en tout $x \in \mathbb{R}$, mais ne représente évidemment pas la fonction...



Ce qui se passe, ici, c'est que le reste est *égal* à la fonction elle-même, et donc pour tout $x \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$. ◇