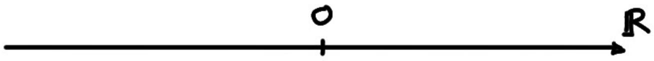
Chapitre 1

Nombres réels : $\mathbb{R}$

1.1 Introduction

On se représente souvent $\mathbb{R}$ comme tous les points d'une droite :

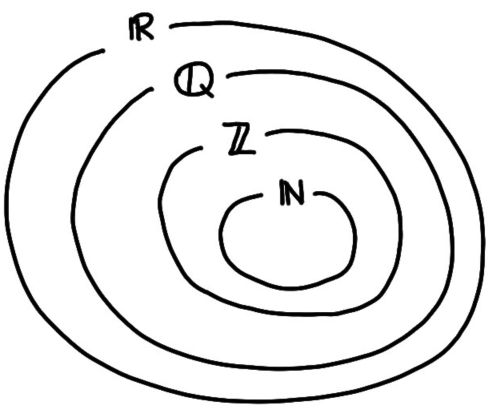


Même si cette image est utile pour l'intuition (en particulier pour se représenter des distances ou comparer des grandeurs), elle ne constitue évidemment pas une définition rigoureuse. En particulier, elle n'exprime pas le fait que les réels se prêtent bien au *calcul*, à savoir à la manipulation abstraite de quantités, qu'elles soient positives ou négatives, (très) petites ou (très) grandes.

De plus, les concepts fondamentaux de l'analyse (limite, continuité, dérivabilité, intégrabilité) se définissent précisément à l'aide de quelques notions simples qui utilisent toute la structure des réels.

Donc avant de commencer à présenter l'analyse à proprement parler, on se doit de définir quelles sont exactement les propriétés qui caractérisent $\mathbb{R}$. On listera en particulier les règles de calcul qui donneront aux réels la structure de ce qu'on appelle un *corps*.

1.1.1 Nombres et mesures



La construction des nombres commence, en général, avec l'introduction des **nombres naturels/entiers**, avec lesquels on peut déjà *compter* ("un mouton, deux moutons, trois moutons, ...") :

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} .$$

Puis viennent s'ajouter les **entiers relatifs**, obtenus à partir de $\mathbb{N}$ en rajoutant toutes les quantités entières négatives ("il fait froid : -15 degrés !", ou "$3 - 7 = -4$") :

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} .$$

L'étape suivante est de considérer en plus toutes les proportions possibles entre deux grandeurs entières ("un demi litre de lait", "une heure et quart", "deux tiers des étudiants",...), pour obtenir les **nombres rationnels** :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z} \,, q \neq 0 \right\} .$$

Les rationnels contiennent $\mathbb{Z}$ (prendre $q = 1$), donc ils contiennent des nombres arbitrairement grands, et peuvent être utilisés pour décrire des grandeurs astronomiques. Mais ils contiennent aussi des quotients aussi petits que l'on veut ($\frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{1}{100} = 0.01$, etc.), et peuvent donc être utilisés pour décrire des grandeurs atomiques ou subatomiques.

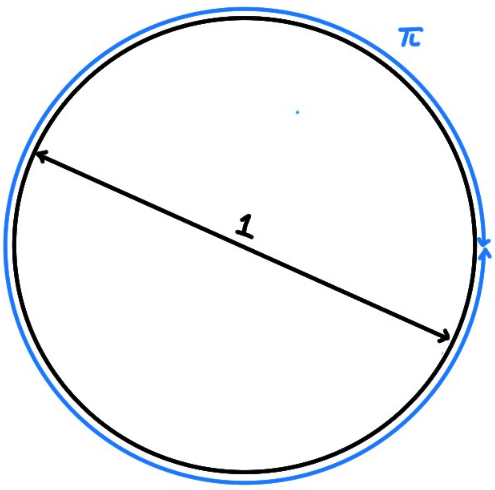
Pourquoi, alors, ne pas se contenter de garder $\mathbb{Q}$ pour faire de l'analyse ?

Même s'il permet a priori de mesurer des grandeurs à toutes les échelles possibles nécessaires de l'univers, $\mathbb{Q}$ souffre d'un défaut majeur : *il ne permet pas de tout mesurer* ! En effet, beaucoup de grandeurs physiques sont des quantités *irrationnelles*.

Voyons deux exemples.

1.1.2 Irrationnalité du nombre π

Le nombre π est défini comme la longueur de la circonférence d'un disque dont le diamètre est égal à 1 :



Il est surprenant d'apprendre que le développement décimal de ce nombre ne présente pas de régularité apparente :

$$\pi = 3.14159265358979323846264 33\ldots$$

On peut facilement trouver des rationnels qui approximent π à un niveau essentiellement arbitraire de précision (les décimales en rouge indiquent à partir d'où le rationnel cesse de donner une bonne approximation) :

$$\begin{aligned} \frac{22}{7} &= 3.14285714286... \\ \frac{333}{106} &= 3.14150943396... \\ \frac{103993}{33102} &= 3.14159265301... \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Pourtant, Johann Heinrich Lambert a montré en 1761 que π est **irrationnel** : *il n'existe aucune paire $p, q \in \mathbb{N}^*$ telle que*

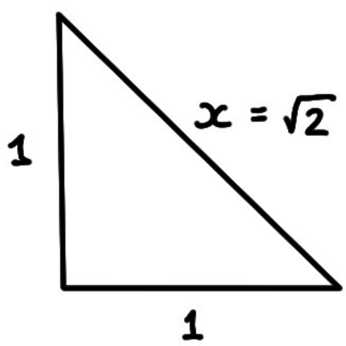
$$\pi = \frac{p}{q}\,.$$

Pour une preuve relativement courte, mais qui requiert beaucoup des notions d'analyse présentées dans ce cours, voir **cette vidéo** (lien web), ou encore **celle-ci** (lien web) (les deux présentent la même preuve de l'irrationnalité de π, due à Niven).

1.1.3 Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Bien avant la preuve de Lambert, un problème géométrique encore plus simple montrait de manière embarrassante l'importance des irrationnels :

L'école Pythagoricienne (env. 500BC) avait observé le fait suivant. Considérons un triangle rectangle dont les deux cathètes ont longueur 1 :



La longueur de l'hypothénuse est donnée par la solution $x > 0$ de l'équation

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2\,.$$

Lemme 5. *Le nombre x, solution de l'équation $x^2 = 2$, est irrationnel.*

Preuve: On démontre l'affirmation par l'absurde.

Supposons que $x \in \mathbb{Q}$, à savoir qu'il existe des entiers p et q tels x peut s'écrire $x = \frac{p}{q}$. On peut en fait supposer que p et q sont premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun diviseur commun (s'ils ont un diviseur commun, on peut toujours simplifier la fraction).

Mais si $x = \frac{p}{q}$, alors $x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, c'est-à-dire $p^2 = 2q^2$, ce qui implique que p^2 est pair (un multiple de 2), et donc que p est pair aussi (exercice!). On peut alors écrire p sous la forme $p = 2e$, où e est un entier. Ceci implique également que $q^2 = \frac{p^2}{2} = 2e^2$, et donc q, par le même argument qu'avant, est aussi pair. Ceci implique que p et q sont tous deux divisibles par 2, ce qui représente une contradiction, puisqu'on a supposé que p et q n'avaient aucun diviseur commun. □

Étant irrationnel, l'expansion décimale $\sqrt{2}$ n'a pas de "fin", et ne présente aucun motif particulier (pas de périodicité, etc.) :

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242209\ldots$$

De nos jours, on connaît plus de **dix mille milliards de décimales** (lien web) de cette expansion.

Sans surprise, la circonférence du disque et l'hypothénuse du triangle sont loin d'être les seuls irrationnels, donc cette discussion montre que même si $\mathbb{Q}$ constitue un ensemble de nombres allant des échelles subatomiques à superastronomiques, il ne contient pas tous les nombres nécessaires pour faire de la géométrie élémentaire.

Et en fait, dans un sens que nous ne détaillerons pas ici, il y a beaucoup plus d'irrationnels qu'il n'y a de rationnels...

1.1.4 Sur la construction de $\mathbb{R}$

Il y a donc, dans la construction d'un bon ensemble de nombres, une étape finale, qui consiste à *compléter* $\mathbb{Q}$ en lui ajoutant tous les irrationnels pour obtenir $\mathbb{R}$. Cette construction est délicate, et nous ne la décrirons pas en détails car elle sortirait du cadre de ce cours.

Mais ce que nous ferons, dans les sections suivantes, sera de définir $\mathbb{R}$ en listant ses propriétés.

Nous dirons d'abord que c'est, comme $\mathbb{Q}$, un ensemble dans lequel on peut faire de l'arithmétique, c'est à dire des calculs à l'aide d'opérations telles que addition et multiplication.

Puis nous exigerons de $\mathbb{R}$ une propriété additionnelle, naturelle mais délicate à formuler (voir *supremum et infimum* plus loin), qui le distinguera radicalement de $\mathbb{Q}$, et qui nous permettra de commencer à construire l'analyse. (En passant, nous montrerons que dans $\mathbb{R}$, l'existence de $\sqrt{2}$ est bien garantie.)

Remarque 1.1. Ce que nous ne ferons pas, c'est de montrer qu'on peut effectivement *construire* un ensemble $\mathbb{R}$ jouissant de toutes ces propriétés. Pour plus de détails sur la construction des réels, je renvoie le lecteur aux livres d'analyse plus avancés. ◇

Deux références pour le lecteur intéressé :

- ⋆ **Les nombres irrationnels (Voyage au pays des maths ARTE)** (lien web).
- ⋆ **Pour aller dans l'espace, de combien de décimales de π a-t-on vraiment besoin ?** (lien web)

1.2 Règles de calcul : $+, -, \cdot, \div$

Les nombres réels forment avant tout un ensemble dans lequel on peut faire de l'*arithmétique*, c'est-à-dire dans lequel on peut additionner, soustraire, multiplier et diviser. (En mathématiques, un ensemble muni de ces opérations est appelé un **corps**.)

La première opération, l'**addition** notée "+", est une opération qui associe à une paire de réels x, y un nouveau réel noté $x + y$. Cette opération satisfait aux propriétés suivantes :

a) $x + y = y + x$ pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$
b) $x + (y + z) = (x + y) + z$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$
c) Il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$, appelé **élément neutre pour l'addition** (ou simplement "**zéro**"), tel que $x + 0 = 0 + x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique élément noté $-x \in \mathbb{R}$ et appelé **opposé de** x, tel que $x + (-x) = 0$.

Si $x, y \in \mathbb{R}$, on peut définir leur **soustraction** :

$$x - y := x + (-y) .$$

La deuxième opération, la **multiplication**, notée "$\cdot$", associe à une paire de réels x, y un nouveau réel noté $x \cdot y$. Elle satisfait aux propriétés suivantes :

a) $x \cdot y = y \cdot x$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$
b) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ pour tout triplet $x, y, z \in \mathbb{R}$
c) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,
d) Il existe un élément $1 \in \mathbb{R}$, appelé **élément neutre pour la multiplication** (ou simplement "**un**"), tel que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, il existe un unique élément noté $x^{-1} \in \mathbb{R}$, appelé **inverse de** x, tel que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Souvent, on écrit xy au lieu de $x \cdot y$.

Si $x, y \in \mathbb{R}$ et si $y \neq 0$, on peut définir leur **division** :

$$x \div y := x \cdot y^{-1} .$$

En général, on écrit $\frac{x}{y}$ au lieu de $x \div y$.

Remarque 1.2. $\mathbb{Q}$ est aussi muni de ces opérations, et les mêmes propriétés sont satisfaites. Ce n'est pas le cas de $\mathbb{N}$ (dans lequel, par exemple, 3 n'a pas d'opposé), ni de $\mathbb{Z}$ (dans lequel, par exemple, 2 n'a pas d'inverse). ◇

1.3 Ordre : $\leqslant, \geqslant, <, >$

La deuxième caractéristique de l'ensemble des nombres réels est que deux réels x, y peuvent toujours être *comparés*. Si ils sont égaux, $x = y$, il n'y a pas lieu de les comparer, mais si ils sont distincts, $x \neq y$, alors il y en a nécessairement un qui est plus petit que l'autre :

- ⋆ Si x est **plus petit que** y, on note $x < y$.
- ⋆ Si x est **plus grand que** y, on note $x > y$.

Le fait que l'on puisse ainsi comparer n'importe quelle paire de réels distincts représente ce qu'on appelle un **ordre total** .

Lorsqu'on veut comparer deux réels sans forcément se préoccuper de savoir s'ils sont distincts :

- ⋆ Si x est **plus petit ou égal à** y, on note $x \leqslant y$.
- ⋆ Si x est **plus grand ou égal à** y, on note $x \geqslant y$.

Énonçons les propriétés des relations "$\leqslant, \geqslant, <, >$" :

a) Pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$, on a soit $x \leqslant y$, soit $y \leqslant x$. Si on a à la fois $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$.

b) $x \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.

d) Si $x \leqslant y$, alors $x + z \leqslant y + z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

e) Si $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$, alors $0 \leqslant x \cdot y$

Informel 1.3. La troisième propriété est constamment utilisées en analyse. En effet, pour montrer qu'un nombre x est plus petit ou égal à un nombre z, on passera souvent par l'utilisation d'un réel intermédiaire y, et on vérifiera les deux relations "$x \leqslant y$", "$y \leqslant z$", qui ensemble garantissent que $x \leqslant z$.

1.3.1 Signe

Un réel $x \in \mathbb{R}$ est dit

- ⋆ **positif** (resp. **strictement positif**) si $x \geqslant 0$ (resp. $x > 0$),
- ⋆ **négatif** (resp. **strictement négatif**) si $x \leqslant 0$ (resp. $x < 0$).

1.4 Intervalles

Avant de compléter la définition de $\mathbb{R}$, utilisons les relations d'ordre, $\leqslant, <, >, \geqslant$, pour introduire certains sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$ appelés *intervalles*.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On définit les **intervalles bornés** :

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x \leqslant b\}\,, \tag{1.1}$$
$$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}\,, \tag{1.2}$$
$$[a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x < b\}\,, \tag{1.3}$$
$$]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leqslant b\}\,, \tag{1.4}$$

On dit que $]a,b[$ est **ouvert**, et que $[a,b]$ est **fermé**. (On reviendra plus loin sur les notions d'ensemble borné/ouvert/fermé, qui sont générales et ne s'appliquent pas uniquement aux intervalles.) Pour représenter ces intervalles graphiquement, on utilisera une boule pleine pour indiquer que l'extrémité de l'intervalle est inclue, et vide pour indiquer que l'extrémité est exclue. Donc on représente $[a,b[$ comme suit :

Ensuite, introduisons les **intervalles non-bornés** :

$$\begin{aligned}
[a,+\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geqslant a\}\,,\\
]a,+\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > a\}\,,\\
]-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant b\}\,,\\
]-\infty,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}\,.
\end{aligned}$$

On définit en particulier les ensembles des réels **positifs** et **strictement positifs**,

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} = [0,\infty[\,, \tag{1.5}$$
$$\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0,\infty[\,, \tag{1.6}$$

ainsi que les ensembles des réels **négatifs** et **strictement négatifs**,

$$\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\} =]-\infty,0]\,, \tag{1.7}$$
$$\mathbb{R}_-^* := \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} =]-\infty,0[\,. \tag{1.8}$$

1.5 Valeur absolue et distance

Définition 1.4. La **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x > 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,, \\ -x & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Exemple 1.5. Puisque -3 est négatif, on a $|-3| = -(-3) = +3$. ◇

Les propriétés suivantes suivent de la définition :

a) $|-x| = |x| \geqslant 0$
b) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$
c) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
d) Si $a \geqslant 0$, alors $|x| \leqslant a$ si et seulement si $-a \leqslant x \leqslant +a$.
e) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
f) Si $y \neq 0$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.
g) Si on divise un réel non-nul x par sa valeur absolue, on obtient son **signe** :

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0\,, \\ -1 & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Proposition 2. *(Inégalité triangulaire) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|\,.$$

Preuve: Si $x + y \geqslant 0$, alors

$$|x + y| = x + y \leqslant |x| + |y|\,.$$

Si $x + y < 0$, alors

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leqslant |x| + |y|\,.$$

□

L'inégalité triangulaire sera utilisée très souvent lorsqu'on aura besoin de montrer *qu'une somme de petits nombres est aussi petite.* Plus précisément, considérons la somme de deux nombres x et y, que l'on sait être "petits" dans le sens où on a trouvé un $\varepsilon > 0$ tel que $|x| \leqslant \varepsilon$ et $|y| \leqslant \varepsilon$. (Remarquons que ceci n'implique rien sur les *signes* des nombres x et y.) Alors, l'inégalité triangulaire permet de garantir que

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,.$$

Remarque 1.6. On peut utiliser la valeur absolue pour caractériser le nombre "zéro" : c'est l'unique nombre dont la valeur absolue est plus petite que tout nombre positif :

$$x = 0 \iff |x| = 0 \iff |x| \leqslant \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0\,.$$

◇

1.5.1 Distance

La valeur absolue permet de mesurer la proximité de deux réels $x, y, \in \mathbb{R}$, en définissant leur **distance** :

$$\mathrm{dist}(x,y) := |x-y|\,.$$

Lemme 6. *(Propriétés de la distance)*

a) $d(x,y) \geqslant 0$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$. *De plus,* $d(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$.

b) $d(x,y) = d(y,x)$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$

c) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{dist}(x,y) \leqslant \mathrm{dist}(x,z) + \mathrm{dist}(z,y)\,.$$

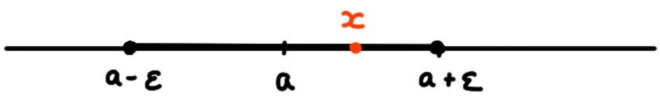
Preuve: Les deux premières affirmations suivent directement des propriétés de la valeur absolue. Pour la troisième, on insère $-z+z=0$, et on utilise l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(x,y) = |x-y| &= |(x-z)+(z-y)| \\ &\leqslant |x-z| + |z-y| \\ &= \mathrm{dist}(x,z) + \mathrm{dist}(z,y)\,.\end{aligned}$$

□

On utilisera souvent les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(x,a) \leqslant \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad |x-a| \leqslant \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad a-\varepsilon \leqslant x \leqslant a+\varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\end{aligned}$$



1.6 Supremum et infimum

Enfin, passons à la propriété cruciale qui différencie les réels des rationnels. En particulier, nous verrons comment cette propriété permet de garantir que dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = 2$ possède bel et bien une solution.

Avant de commencer, il nous faut introduire un peu de terminologie.

1.6.1 Minimum, maximum

L'ordre introduit plus haut sur $\mathbb{R}$ permet de distinguer certains éléments d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Définition 1.7. Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$.

- ⋆ Un élément $x^* \in A$ est dit **maximal** si $x \leqslant x^*$ $\forall x \in A$. On dit aussi que x^* est le **maximum** de A, et on note : $x^* = \max A$.
- ⋆ Un élément $x_* \in A$ est dit **minimal** si $x_* \leqslant x$ $\forall x \in A$. On dit aussi que x_* est le **minimum** de A, et on note : $x_* = \min A$.

Exemple 1.8. Si $A = \{0, -3, -5, 2, 1\}$, alors $\max A = 2$ et $\min A = -5$. ◇

On réalise que quand un ensemble contient un nombre *fini* d'éléments, il possède *toujours* un minimum et un maximum : on les trouve en parcourant la liste ! Par contre, lorsque l'ensemble possède un nombre *infini* d'éléments, l'existence d'un minimum ou maximum n'est pas toujours garantie.

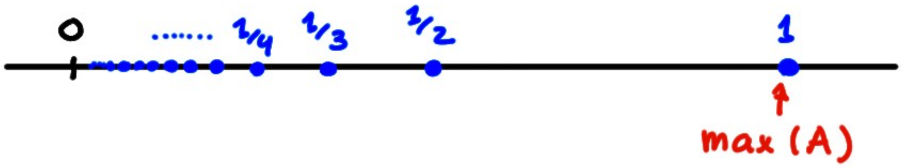
Exemple 1.9. Vu comme sous-ensemble des réels, l'ensemble des entiers $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ possède un élément minimal, $\min \mathbb{N} = 0$, mais il ne possède pas d'élément maximal. ◇

Plus intéressant :

Exemple 1.10. Considérons l'ensemble (la couleur, c'est juste pour voir l'ensemble sur le dessin du dessous) de tous les nombres de la forme $x = \frac{1}{n}$, où $n > 0$ est un entier :

$$A = \left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \dots\right\}$$

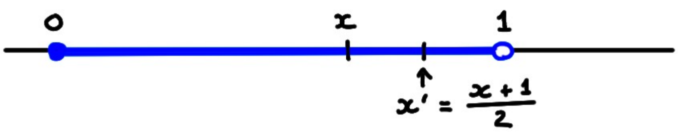
Clairement, A possède un élément maximum : $x^* = \max A = 1$. En effet, $x \leqslant 1$ pour tout $x \in A$, et de plus $1 \in A$:



Par contre, A ne possède pas de minimum. En effet, aucun élément de A n'est plus petit que les autres. ◇

Informel 1.11. On a peut-être envie de dire que le minimum de A, c'est $x_* = 0$, mais 0 n'est pas un élément de A, donc il ne satisfait pas à la définition de minimum.

Exemple 1.12. Soit $B = [0, 1[$. D'abord, B possède un minimum, donné par $x_* = \min B = 0$. (En effet, $0 \leqslant x$ pour tout $x \in B$, et $0 \in B$.) Par contre, B n'a pas de maximum. En effet, pour tout $x \in B$, il existe toujours un autre élément $x' \in B$ tel que $x' > x$. On peut par exemple prendre $x' := \frac{x+1}{2}$, qui est le point milieu entre x et 1 :



Donc aucun élément de B n'est maximal. ◇

1.6.2 Majorants, minorants

Définition 1.13. Soit $A \subset \mathbb{R}$.

a) A est **majoré** si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant M$ pour tout $x \in A$; on dit qu'un tel M **majore** A, ou que c'est un **majorant** pour A.

b) A est **minoré** si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant m$ pour tout $x \in A$; on dit qu'un tel m **minore** A, ou que c'est un **minorant** pour A.

c) Si A est à la fois majoré et minoré, il est **borné**.

Exemple 1.14. $B = [0, 1[$ est majoré ; $M = 1$, $M = 2$ sont des majorants. En fait, n'importe quel $M \geqslant 1$ majore B.

Par contre, $M = 0.9$ n'est *pas* un majorant ; en effet, si on prend par exemple le point $x = 0.95$, alors $x \in B$, et $x > M$.

B est aussi minoré : n'importe quel réel $m \leqslant 0$ minore B. ◇

Informel 1.15. Un ensemble A est borné si et seulement si il peut être "rangé dans une boîte", c'est-à-dire placé à l'intérieur d'un intervalle $[m, M]$, où m et M sont des nombres finis.

Exemple 1.16. Vus comme sous-ensembles de $\mathbb{R}$,

⋆ $\mathbb{N}$ est minoré puisque $0 \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par contre $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. En effet, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *il existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n > x$. Nous utiliserons ceci **constamment** par la suite.

⋆ $\mathbb{Z}$ n'est ni minoré, ni majoré.

◇

1.6.3 Supremum, infimum

Passons maintenant à la notion essentielle de ce chapitre sur les réels :

Définition 1.17. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide.

Un réel $s \in \mathbb{R}$ est appelé **borne supérieure** (ou **supremum**) de A si

a) s majore A (c.-à-d. que $x \leqslant s$ pour tout $x \in A$),

b) s est le plus petit majorant de A (c.-à-d. que pour tout $s' < s$, il existe $x \in A$ tel que $x > s'$).

Si s est supremum de A, on le note $s = \sup A$.

Un réel $s \in \mathbb{R}$ est appelé **borne inférieure** (ou **infimum**) de A si

a) s minore A (c.-à-d. que $x \geqslant s$ pour tout $x \in A$),

b) s est le plus grand minorant de A (c.-à-d. que pour tout $s' > s$, il existe $x \in A$ tel que $x < s'$).

Si s est l'infimum de A, on le note $s = \inf A$.

Il est clair que

- $\star$ si A possède un élément maximal, alors $\sup A = \max A$,
- $\star$ si A possède un élément minimal, alors $\inf A = \min A$.

Mais en général, le maximum et le minimum peuvent ne pas exister, alors que le supremum et l'infimum comme on verra, existent toujours dans les réels.

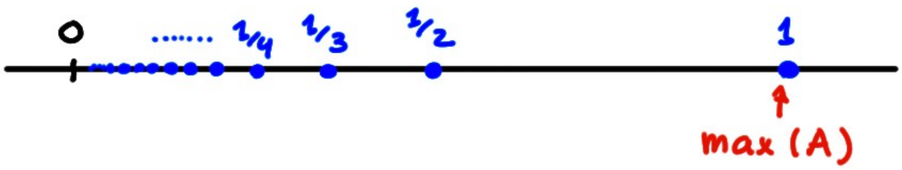
On reformulera souvent la deuxième condition, dans le supremum par exemple, en disant que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $x \in A$ tel que

$$s - \varepsilon \leqslant x \leqslant s\,.$$

Informel 1.18. (Interprétation "physique" de l'infimum et du supremum pour un ensemble borné.) On a dit qu'un ensemble A borné peut toujours être "rangé dans une boîte" $[m, M]$. Et bien parmi toutes les boîtes qui contienne A, la *plus petite* est celle pour laquelle $m = \inf A$ et $M = \sup A$.

Exemple 1.19. Reprenons l'ensemble de tout à l'heure :

$$A = \left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \cdots \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n+1}, \dots\right\}.$$



Puisque $1 \in A$ et que tout $x \in A$ est plus petit ou égal à 1, 1 est l'élément maximal de A, et $\sup A = \max A = 1$.

Vérifions maintenant que $\inf A = 0$. D'abord, 0 minore A puisque tout nombre de la forme $\frac{1}{n}$ est plus grand ou égal à 0. Pour montrer que 0 est le plus petit minorant, considérons un nombre quelconque $s' > 0$, et montrons que s' n'est pas un minorant pour A. En effet, si $s' > 0$, alors il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $n > \frac{1}{s'}$, ce qui est équivalent à $\frac{1}{n} < s'$. Or comme $\frac{1}{n} \in A$, ceci montre que s' ne majore pas A.

On a donc bien montré que 0 est le plus petit minorant : $\inf A = 0$. $\diamond$

Exemple 1.20. Soit encore $B = [0, 1[$. On a vu que B n'a pas de maximum ; montrons maintenant que $\sup B = 1$.

a) Premièrement, on a $x \leqslant 1$ pour tout $x \in B$, donc B est majoré par 1.

b) Deuxièmement, si $s' < 1$, alors il existe $x_* \in B$ tel que $x_* > s$. En effet, si $s' < 0$, n'importe quel $x_* \in B$ suffit. Sinon, si $0 \leqslant s' < 1$, on peut par exemple prendre $x_* := \frac{s'+1}{2}$.

Ensuite, on a $\inf B = 0$. En effet, 0 est le plus grand minorant :

a) $0 \leqslant x$ pour tout $x \in B$, et

b) pour tout $s' > 0$, il existe un $x \in B$ tel que $x < s'$

$\diamond$

Les propriétés suivantes sont toujours vraies (on l'a observé sur les exemples ci-dessus) :

- Si A possède un maximum, alors $\sup A = \max A$.
- Si A possède un minimum, alors $\inf A = \min A$.

1.6.4 La différence entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$

Passons à l'**axiome** qui confère à $\mathbb{R}$ une propriété qui permet de l'utiliser pour faire de l'analyse : Dans $\mathbb{R}$,

- tout ensemble non-vide majoré possède un supremum,
- tout ensemble non-vide minoré possède un infimum.

Pour des ensembles qui ne sont pas bornés, la convention suivante est parfois adoptée (ce n'est qu'une *notation*) :

- Si A n'est pas majoré, $\sup A := +\infty$.
- Si A n'est pas minoré, $\inf A := -\infty$.

1.7 Solutions de $x^2 = 2$

Revenons à la question posée précédemment : si l'équation $x^2 = 2$ ne possède pas de solution dans $\mathbb{Q}$, en possède-t-elle une dans $\mathbb{R}$?

Montrer qu'il existe effectivement un $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$, "directement" est trop difficile. On fait donc un petit détour, en commençant par définir l'ensemble

$$A := \{x \in \mathbb{R}_+ \,:\, x^2 < 2\}\,.$$

Remarquons que par exemple $0 \in A$, ou encore $1 \in A$, et donc A n'est pas vide.

Lemme 7. *A n'a pas d'élément maximal.*

Preuve: Il s'agit de montrer que pour tout élément $x \in A$, il existe toujours un $x' \in A$ qui est strictement plus grand que x.

Cherchons un x' de la forme $x' = x + \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas,

$$x'^2 = (x + \tfrac{1}{n})^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\,.$$

Puisque $n \geqslant 1$, on peut majorer : $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$. Ainsi,

$$x'^2 \leqslant x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{2x+1}{n}\,.$$

Puisqu'on veut $x' \in A$, c'est-à-dire $x'^2 < 2$, imposons

$$x^2 + \frac{2x+1}{n} < 2\,,$$

qui est équivalente à
$$n > \frac{2x+1}{2-x^2}\,.$$
Le membre de droite est bien défini et positif puisque $2 - x^2 > 0$. Et un n satisfaisant à cette propriété existe toujours puisque, quelle que soit la valeur de $\frac{2x+1}{2-x^2}$, il existe toujours un n plus grand que ce nombre (ceci découle du fait que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré). Si on prend un tel n, on a donc $x' = x + \frac{1}{n} > x$, et
$$\begin{aligned} x'^2 = (x + \tfrac{1}{n})^2 &= x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &< x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} \\ &= x^2 + \frac{2x+1}{n} \\ &< x^2 + \frac{2x+1}{\frac{2x+1}{2-x^2}} = 2\,. \end{aligned}$$
Ceci montre que A n'a pas d'élément maximal. □

Ensuite, remarquons que A et majoré : $x \leqslant 3$ pour tout $x \in A$. En effet, si $x > 3$, alors $x^2 > 9 > 2$, et donc $x \notin A$.

On peut maintenant considérer le réel défini comme le supremum de A :
$$s := \sup A\,.$$

Théorème 1.21. *Le nombre s défini ci-dessus satisfait $s^2 = 2$.*

Preuve: Puisqu'on sait que A n'a pas d'élément maximal, on a nécessairement $s \notin A$, ce qui signifie que
$$s^2 \geqslant 2\,.$$
Nous allons maintenant montrer que
$$s^2 \leqslant 2\,.$$
Pour ce faire, montrons que le nombre $M := \frac{2+s^2}{2s}$ majore A. En effet, observons que si $x > M$, alors
$$\begin{aligned} x^2 = (s + (x-s))^2 &= s^2 + 2s(x-s) + \underbrace{(x-s)^2}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant s^2 + 2s(x-s) \\ &> s^2 + 2s(M-s) \\ &= s^2 + 2s\big(\tfrac{2+s^2}{2s} - s\big) = 2\,, \end{aligned}$$
et donc $x \notin A$. Ceci implique que si $x \in A$, alors $x \leqslant M$; donc M majore A. Mais comme s est par hypothèse le plus petit majorant de A, on a que $s \leqslant M$, c'est-à-dire
$$s \leqslant \frac{2+s^2}{2s}\,,$$

qui est équivalente à $s^2 \leqslant 2$.

Comme s^2 est à la fois $\geqslant 2$ et $\leqslant 2$, ceci implique $s^2 = 2$. □

Le nombre s, qui est par définition **irrationnel** puisque $s \in \mathbb{R}$ mais $s \notin \mathbb{Q}$, est appelé **racine carrée de deux** (lien web), et est noté

$$s = \sqrt{2}\,.$$

On peut, en utilisant la même idée que celle présentée dans la preuve ci-dessus, montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation

$$x^2 = y$$

possède une solution dans $\mathbb{R}_+$, notée $\sqrt{y}$, et qui se nomme **racine carrée de** y.

Cette analyse montre que la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

et une surjection. On montre **ici** (lien web) que c'est également une injection, et donc que cette fonction possède une réciproque, que l'on appelle **fonction racine carrée**.

Remarque 1.22. La méthode se généralise, et permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation

$$x^n = y$$

possède une solution dans $\mathbb{R}_+$. Celle-ci se note $\sqrt[n]{y}$ et se nomme **racine n-ème de** y. ◇

1.8 Densité

Intuitivement, même si les rationnels sont un sous-ensemble des réels, ils doivent quand-même être un peu "partout" sur la droite des réels, dans le sens où on doit pouvoir en trouver dans n'importe quelle région de la droite, aussi petite soit-elle. On caractérise ceci précisément à l'aide de la notion de *densité*.

Définition 1.23. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est **dense dans** $\mathbb{R}$ si pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, il existe un $z \in E$ tel que $x < z < y$.

1.8.1 Densité des rationnels dans les réels

Théorème 1.24. *L'ensemble des rationnels est dense dans* $\mathbb{R}$.

Dans la preuve de ce théorème, nous utiliserons pour la première fois la fonction *valeur entière*.

Définition 1.25. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la **valeur entière de** x, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x$.

Exemple 1.26.

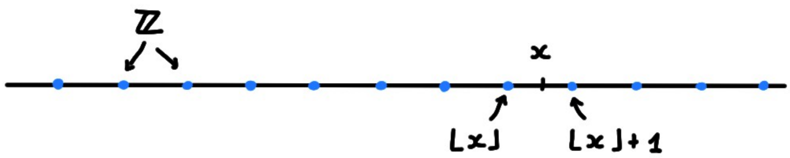
$$\lfloor \tfrac{5}{4} \rfloor = 1 \,, \quad \lfloor -\tfrac{1}{3} \rfloor = -1 \,, \quad \lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2 \,, \quad \lfloor \pi \rfloor = 3 \,.$$

◇

La définition de $\lfloor x \rfloor$ implique

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \,.$$

Donc l'image qu'il faut garder en tête est la suivante :



Cette dernière peut aussi s'écrire

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \,.$$

Passons à la preuve du théorème.
Preuve: Soient deux réels $x < y$, et soit n un entier suffisamment grand, tel que $n > \frac{1}{y-x}$. On rappelle qu'un tel entier existe car $\mathbb{N}$ n'est pas borné. Posons maintenant

$$r := \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \,.$$

Comme c'est un quotient de deux entiers, r est rationnel. Et puisque

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx \,,$$

on a

$$\underbrace{\frac{(nx-1)+1}{n}}_{=x} < r \leqslant \underbrace{\frac{nx+1}{n}}_{=x+\frac{1}{n}<y} \,,$$

ce qui implique $x < r < y$. □

La conséquence principale de ce résultat est que l'on peut *approximer* un réel quelconque par un rationnel, dans le sens suivant :

Corollaire 4. *Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - \frac{p}{q}| \leqslant \varepsilon$.*

Preuve: Posons $x' := x - \varepsilon$, $y' = x + \varepsilon$. Par le Théorème, il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $x' < \frac{p}{q} < y'$, ce qui implique bien que $-\varepsilon \leqslant x - \frac{p}{q} \leqslant +\varepsilon$. □

Exemple 1.27. Nous avons donné des approximations de π dans l'introduction. Dans le langage de la présente section, ces approximations s'expriment ainsi :

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| \leqslant 0.01$$
$$\left|\pi - \frac{333}{106}\right| \leqslant 0.0001$$
$$\left|\pi - \frac{103993}{33102}\right| \leqslant 0.000000001$$

Donc même si π est irrationnel, on sait maintenant qu'on peut fixer un $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut, et le théorème garantit qu'il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ à distance au plus ε de π :

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

◇

1.8.2 Densité des irrationnels dans les réels

Informel 1.28. Le théorème précédent montrait que "les rationnels sont partout". Or on peut montrer une affirmation qui va dans l'autre sens : "Les irrationnels aussi sont partout" :

Théorème 1.29. *L'ensemble des irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*

Preuve: (exercice) □

On utilisera souvent les deux résultats ci-dessus, de la façon suivante : Si $x \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque, alors quel que soit $\varepsilon > 0$ (sous-entendu : aussi petit que l'on veut), il existe toujours un rationnel $r_* \in \mathbb{Q}$ et un irrationnel $i_* \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que

$$r_* \in \left]x - \varepsilon, x + \varepsilon\right[\,, \quad i_* \in \left]x - \varepsilon, x + \varepsilon\right[\,.$$

1.9 Ensembles ouverts et fermés

Nous avons rappelé plus haut les notions d'intervalle ouvert/fermé, leur différence étant principalement que le premier ne contient pas ses extrémités, le deuxième oui.

Mais la notion d'*ensemble ouvert/fermé* est plus générale, et s'applique à d'autres sous-ensembles de la droite plus généraux.

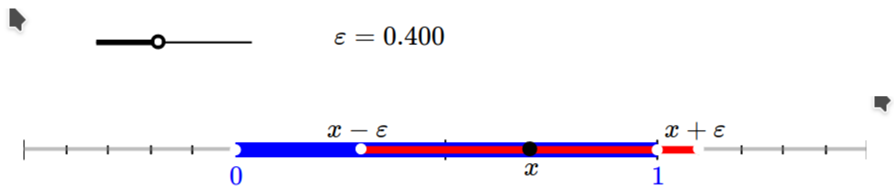
Définition 1.30. Soit $G \subset \mathbb{R}$.

a) G est **ouvert** si pour tout $x \in G$ il existe un $\varepsilon > 0$ (qui peut dépendre de x) tel que $x' \in G$ pour tout $x' \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

b) G est **fermé** si son complémentaire $G^c := \mathbb{R} \setminus G$ est ouvert.

Notons qu'un *intervalle ouvert* (au sens des sections précédentes) est effectivement *ouvert* au sens de la définition qui précède.

Exemple 1.31. Considérons $G =]0,1[$. Si on fixe un $x \in G$ quelconque, alors en prenant un nombre $\varepsilon > 0$ qui est à la fois plus petit que $|x|$ (distance de x à l'extrémité gauche de l'intervalle) et que $|x-1|$ (distance de x à l'extrémité droite de l'intervalle), alors l'intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est entièrement contenu dans G. Clairement, le choix du ε dépend de où se trouve x : plus x est proche du bord, plus ε doit être pris petit. L'essentiel est que pour tout $x \in G$, on trouve *toujours* un $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset G$. (Sur cette animation, on a épaissi un peu pour y voir quelque chose.)



De la même façon, on montre que les intervalles de la forme $]-\infty, a[$ et $]b, +\infty[$ sont ouverts. ◇

Proposition 3. *Si un ensemble $G \subset \mathbb{R}$ est une union d'ensembles ouvert, alors il est ouvert.*

Exemple 1.32. Considérons $G = [a,b]$. On comprend que cet ensemble n'est *pas* ouvert, puisque quel que soit la valeur de $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ contient des points qui ne sont pas dans G (utilisez l'animation ci-dessus pour l'apprécier !). De plus, puisque son complémentaire est

$$G^c = [a,b]^c =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\,,$$

qui est une union d'ouverts, G^c un ouvert. Donc G est fermé. ◇

Exemple 1.33.

- ⋆ $[a,b[$ n'est ni ouvert ni fermé.
- ⋆ Un ensemble contenant un seul point, $\{x\}$, est fermé. En effet, son complémentaire est $\{x\}^c =]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$, qui est ouvert.
- ⋆ $\mathbb{Z}$ est fermé, puisque son complémentaire,

  $$\mathbb{Z}^c = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[\,,$$

  est une union d'ouverts, donc c'est un ouvert.
- ⋆ $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert. En effet, considérons un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ quelconque. On a dit plus haut que les irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, donc quel que soit $\varepsilon > 0$, l'intervalle $I =]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$ contient toujours un irrationnel. Donc il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que $I \subset \mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert.

  Mais le complémentaire de $\mathbb{Q}$, à savoir l'ensemble de tous les irrationnels, n'est pas ouvert non plus. En effet, puisque les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, pour tout irrationnel y, tout intervalle $]y-\varepsilon, y+\varepsilon[$ contient un rationnel. Donc $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé.
- ⋆ $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ est ouvert (voir exercices)

◇