Chapitre 7

Limites de fonctions

7.1 Introduction

Nous avons rencontré la notion de limite lorsque nous avons étudié les suites de réels.

Nous allons maintenant introduire diverses notions de limites, associées à une fonction réelle f d'une variable réelle x. Nous étudierons donc les valeurs de

$$x \mapsto f(x)\,,$$

et ceci dans deux situations particulières :

- ⋆ Lorsque x est *au voisinage d'un point* $x_0 \in \mathbb{R}$, nous définirons d'abord la limite

  $$\lim_{x \to x_0} f(x)\,,$$

  ainsi que les limites latérales

  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x)\,, \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x)\,.$$

- ⋆ Lorsque x est *au voisinage de l'infini*, à savoir très grand, nous définirons les limites

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)\,.$$

  Ce deuxième cas sera essentiellement le même que pour les suites, $\lim_{n\to\infty} a_n$, et ne présentera aucune difficulté réellement nouvelle.

Comme les propriétés satisfaites par ces limites seront essentiellement les mêmes que pour les suites, nous ne donnerons pas toutes les preuves, qui pourront être faites en exercice.

7.2 Limite $x \to x_0$

Commençons par étudier les valeurs d'une fonction f proche d'un point x_0, avec la définition de base de la *limite en* x_0. Le point x_0 pourra être un point intérieur du domaine de la fonction, ou alors sur son bord.

Il y a trop de comportements possibles pour $f(x)$ lorsque x s'approche de x_0, donc dans notre analyse, on se concentrera sur les comportements classiques observés dans nombre de fonctions rencontrées en analyse, et qui sont les plus rencontrés dans le développement de la théorie des fonctions. En particulier, on donnera un sens aux termes suivants :

- ⋆ $f(x)$ *tend vers* $L \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x_0
- ⋆ $f(x)$ *tend vers l'infini lorsque* x *tend vers* x_0

7.2.1 Notion de voisinage

Informel 7.1. Pour définir la "limite de $f(x)$ en x_0", nous allons étudier les valeurs de $f(x)$ lorsque x devient *arbitrairement proche* de x_0. Et c'est la formulation rigoureuse de cette notion qui pose souvent des difficultés.

Pour parler des réels x proches de x_0, on utilisera la notion de *voisinage*.

Définition 7.2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- ⋆ L'ensemble $V =]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[$, où $\alpha > 0$, est appelé **voisinage épointé de** x_0.
- ⋆ Une fonction f est définie **au voisinage de** x_0 si il existe un voisinage épointé de x_0, V, tel que $f(x)$ est définie pour tout $x \in V$.

Exemple 7.3. Aucune des fonctions

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) = \log|x| \qquad f(x) = \sin(\tfrac{1}{x^2+x})$$

n'est définie en 0, mais toutes sont bien définies dans un voisinage épointé de 0. ◇

Par définition, un voisinage épointé de x_0 contient une infinité de points distincts de x_0. Mais surtout : quelle que soit la distance $\delta > 0$ qu'on choisit, aussi petite que l'on veut, il contient des points x dont la distance à x_0 est inférieure ou égale à δ :

$$0 < |x - x_0| \leqslant \delta\,.$$

7.2.2 Limite en un point

Un premier cas naturel à considérer est celui dans lequel les valeurs de $f(x)$ tendent à se rapprocher d'un nombre, que l'on notera généralement L, à mesure que x se rapproche de x_0.

Définition 7.4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie dans un voisinage épointé de x_0. On dit que f **tend vers** $L \in \mathbb{R}$ **lorsque** x **tend vers** x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$.
Le réel L sera appelé la **limite**, et on utilisera la notation :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,.}$$

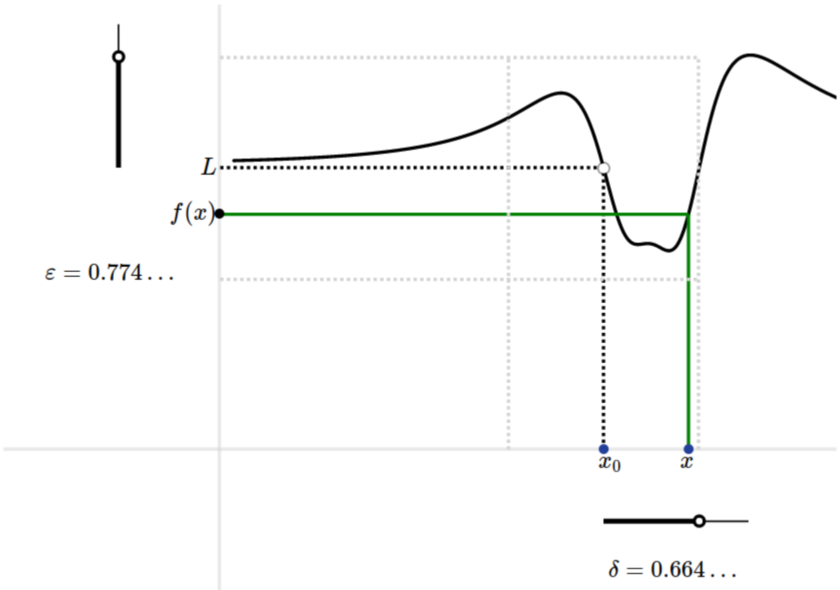
Remarque 7.5.

- $\star$ Dans cette définition, on peut prendre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et le nombre $\delta > 0$ doit en général être pris *en fonction de* ε.
- $\star$ Il est important de remarquer que l'étude de $\lim_{x\to x_0} f(x)$ est indépendante de la valeur que f prend en x_0. En fait, f n'a même pas besoin d'être définie en x_0 pour sa limite existe !

$\diamond$

Sur l'animation ci-dessous, choisir quelques valeurs de $\varepsilon > 0$, et adapter $\delta > 0$ de façon à ce que

$$|f(x) - L| \leqslant \varepsilon \quad \text{dès que} \quad 0 < |x - x_0| \leqslant \delta\,.$$



Exemple 7.6. Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, telle que

$$f(x) = \frac{x-1}{2} \qquad \forall x \neq 2\,.$$

Étudions cette fonction dans un voisinage épointé de $x_0 = 2$. Cela signifie que l'on ne s'intéresse qu'aux valeurs de $f(x)$ pour des réels x proches de 2, différents de 2.

Si x est proche de 2 alors $x - 1$ est proche de 1, et donc $f(x)$ est proche de $\frac{1}{2}$. Montrons ceci rigoureusement, en montrant que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \tfrac{1}{2}\,.$$

Avant tout, étudions la différence

$$|f(x) - \tfrac{1}{2}| = \left|\frac{x-1}{2} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-2}{2}\right| = \tfrac{1}{2}|x-2|\,.$$

Cette expression montre, de façon transparente, que $f(x)$ est proche de $\frac{1}{2}$ lorsque x est proche de 2. Montrons-le rigoureusement.

Fixons $\varepsilon > 0$. Par l'identité écrite plus haut, on a

$$|f(x) - \tfrac{1}{2}| \leqslant \varepsilon$$

si et seulement si

$$\tfrac{1}{2}|x - 2| \leqslant \varepsilon\,,$$

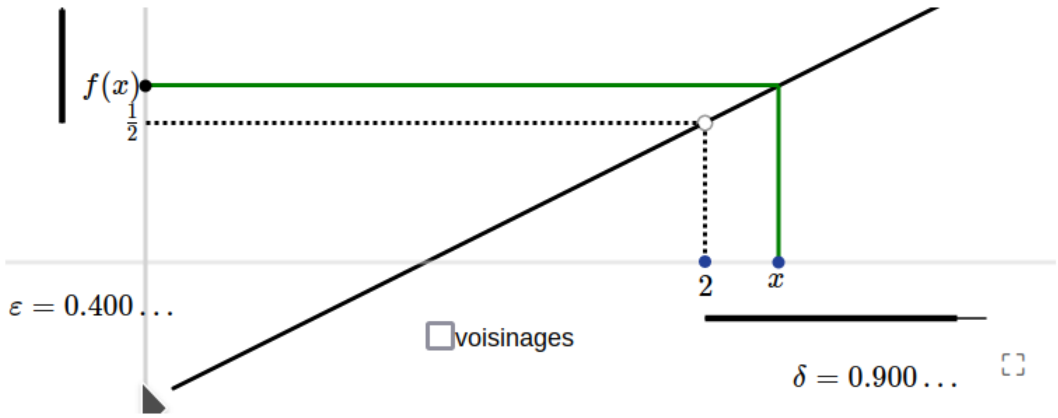
c'est à dire

$$|x - 2| \leqslant 2\varepsilon\,.$$

Ainsi, si on définit $\delta := 2\varepsilon$, on a bien $|f(x) - \frac{1}{2}| \leqslant \varepsilon$ dès que $|x - 2| \leqslant \delta$. Ceci montre ce qu'on voulait :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \tfrac{1}{2}\,.$$

Sur l'animation ci-dessous, choisir la valeur de ε, et voir comment adapter δ pour garantir que tout $x \in [2 - \delta, 2 + \delta]$ ait son image $f(x) \in [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]$:



On observe que $\delta = 2\varepsilon$ est le "meilleur" δ possible . ◇

Pour un autre exemple élémentaire traité en détails, cliquer **ici (blackpenredpen)** (lien web). Voyons un exemple un peu plus difficile.

Exemple 7.7. Considérons

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{3}{2x+5} & \text{si } x \neq 2\,, \\ \sqrt{2} & \text{si } x = 2\,, \end{cases}$$

et montrons que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{3}\,.$$

Commençons par écrire la différence. Lorsque $x \neq 2$,

$$|f(x) - \tfrac{1}{3}| = \left|\frac{3}{2x+5} - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}\frac{|x-2|}{|2x+5|}\,.$$

De par la présence de "$|x - 2|$" au numérateur, cette expression exprime bien que $|f(x) - \frac{1}{3}|$ sera proche de zéro lorsque x sera proche de 2. Mais pour rendre l'argument rigoureux il faut d'abord faire quelque chose pour ne plus avoir de "x" au dénominateur de la fraction. Nous allons donc travailler pour *minorer* le dénominateur par une quantité strictement positive, qui ne dépend pas de x.

Si on suppose par exemple que x est à distance au plus 1 de 2, $|x-2| \leqslant 1$ (c'est-à-dire $-1 \leqslant x-2 \leqslant 1$), alors on peut écrire que

$$2x+5 = 2(x-2+2)+5 = 2(x-2)+9 \geqslant 2(-1)+9 = 7\,,$$

qui implique en particulier que

$$|f(x)-\tfrac{1}{3}| = \frac{2}{3}\frac{|x-2|}{2x+5} \leqslant \frac{2}{3}\frac{|x-2|}{7} = \frac{2}{21}|x-2|\,.$$

Dorénavant, nous supposerons donc que $|x-2| \leqslant 1$. Maintenant, fixons un $\varepsilon > 0$. L'inégalité que nous avons obtenue au-dessus dit que pour rendre $|f(x)-\frac{1}{3}|$ plus petit que ε, il suffit de d'abord rendre $\frac{2}{21}|x-2|$ plus petit que ε. Or

$$\frac{2}{21}|x-2| \leqslant \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x-2| \leqslant \frac{21}{2}\varepsilon\,.$$

Ainsi, si on définit

$$\delta := \min\Big\{\frac{21}{2}\varepsilon, 1\Big\}\,,$$

alors $|x-2| \leqslant \delta$ implique $|f(x)-\frac{1}{3}| \leqslant \varepsilon$. $\diamond$

Exemple 7.8. Considérons

$$f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}\,,$$

qui est bien définie partout, sauf en $x=0$. Montrons que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0\,.$$

Fixons donc un $\varepsilon > 0$, et montrons que l'on peut trouver un $\delta > 0$ tel que

$$|e^{-\frac{1}{x^2}}| \leqslant \varepsilon \qquad \forall \quad 0 < |x| \leqslant \delta\,.$$

Pour cela, on remarque d'abord que, l'exponentielle étant toujours strictement positive, $|e^{-\frac{1}{x^2}}| = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Or on peut résoudre l'inégalité $e^{-\frac{1}{x^2}} \leqslant \varepsilon$ explicitement. D'abord, en prenant le $\log(\cdot)$ (qui est une fonction croissante) des deux côtés de l'inégalité, et en changeant le sens de l'inégalité :

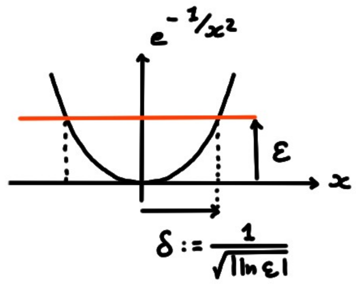
$$\frac{1}{x^2} \geqslant -\log(\varepsilon)\,.$$

Cette dernière est toujours vraie si $\varepsilon \geqslant 1$; dans ce cas on peut donc prendre n'importe quel δ, par exemple $\delta = 2$. Ensuite, considérons le cas où $0 < \varepsilon < 1$. Dans ce cas, $\log(\varepsilon) < 0$, et donc $-\log(\varepsilon) = |\log(\varepsilon)|$. On a donc montré que

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{si et seulement si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{|\log(\varepsilon)|}}\,.$$

On peut donc conclure en prenant

$$\delta := \frac{1}{\sqrt{|\log(\varepsilon)|}}\,.$$



On voit bien, par ce calcul, que plus $\varepsilon > 0$ est choisi petit, plus x doit être pris proche de 0 pour que $|f(x)| \leqslant \varepsilon$. ◇

7.2.3 Premières propriétés de la limite

Cela peut sembler évident, mais il est important de montrer qu'une fonction ne peut tendre que vers une limite :

Lemme 19. *Si la limite existe, elle est unique.*

Preuve: (La preuve suit exactement ce qu'on a fait pour les suites !)

Supposons, par l'absurde, que f tende vers deux limites différentes, $L_1 \neq L_2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $L_1 < L_2$. Définissons

$$\varepsilon := \frac{L_2 - L_1}{3} \,,$$

qui est strictement positif par hypothèse. Aussi, $L_2 - L_1 > \varepsilon$.

- ⋆ Par définition de L_1, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $|f(x) - L_1| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta_1$.
- ⋆ Par définition de L_2, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $|f(x) - L_2| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta_2$.

Définissons maintenant

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} \,.$$

Considérons alors un x tel que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. Comme $\delta \leqslant \delta_1$, on a que $|f(x) - L_1| \leqslant \varepsilon$. Et, comme $\delta \leqslant \delta_2$, on a que $|f(x) - L_2| \leqslant \varepsilon$. On a donc, par l'inégalité triangulaire, que

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |(L_1 - f(x)) - (L_2 - f(x))| \\ &\leqslant |L_1 - f(x)| + |L_2 - f(x)| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}|L_1 - L_3| \,, \end{aligned}$$

ce qui est absurde □

Le résultat suivant offre une charactérisation alternative de la limite en un point, en établissant un lien avec la notion de limite introduite précédemment pour le suites de réels. (En fait, certains textes/enseignants utilisent cette caractérisation pour *définir* la limite d'une fonction en un point.)

Lemme 20. *(Critère d'existence via les suites) Soit f définie au voisinage de x_0. Alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si et seulement si pour toute suite $(a_n)_n$ satisfaisant $a_n \neq x_0$ pour tout n et $a_n \to x_0$ lorsque $n \to \infty$, on a que

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = L \,.$$

Preuve: $\Rightarrow$: Supposons que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Prenons une suite $(a_n)_n$ telle que $a_n \neq x_0$ pour tout n, et telle que $a_n \to x_0$. Fixons $\varepsilon > 0$. Par la définition de limite, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. Puisque $a_n \to x_0$, il existe un entier N tel que $|a_n - x_0| \leqslant \delta$, et donc $|f(a_n) - L| \leqslant \varepsilon$, ceci pour tout $n \geqslant N$. Ceci montre que $f(a_n) \to L$.

$\Leftarrow$: Supposons maintenant que $f(a_n) \to L$ pour toute suite $a_n \to x_0$. Par l'absurde, supposons que $f(x)$ ne tend pas vers L lorsque x tend vers x_0. Cela signifie qu'il existe $\varepsilon_* > 0$ pour lequel il n'existe aucun $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. Considérons alors la suite $\delta_n = \frac{1}{n}$ et pour tout n, considérons un x_n tel que $0 < |x_n - x_0| \leqslant \delta$ et $|f(x_n) - L| > \varepsilon_*$. On a donc une suite (x_n) telle que $x_n \to x_0$, mais pour laquelle $f(x_n)$ ne tend pas vers L, une contradiction. □

Ce critère est en général utilisé pour montrer qu'une fonction f *n'a pas de limite* lorsque $x \to x_0$. Pour ce faire, on pourra soit trouver une suite $x_n \to x_0$ pour laquelle $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ n'existe pas, ou alors trouver deux suites $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ telles que les suites $f(x_n)$ et $f(y_n)$ possèdent des limites différentes lorsque $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

Exemple 7.9. Montrons que la fonction $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite lorsque $x \to 0$. Pour ce faire, considérons deux suites qui tendent vers zéro.

- ⋆ Pour la première, prenons $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, pour laquelle

$$f(x_n) = \sin(\tfrac{1}{x_n}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 \qquad \forall n$$

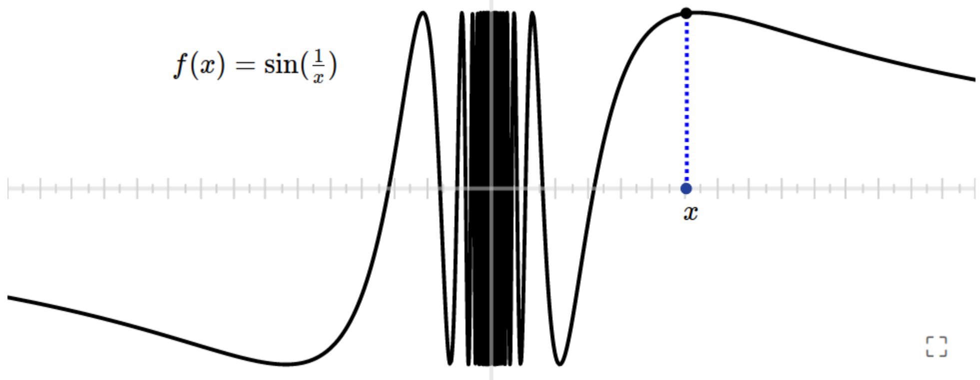
- ⋆ Pour la deuxième, prenons $y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}$, pour laquelle

$$f(y_n) = \sin(\tfrac{1}{y_n}) = \sin(\tfrac{3\pi}{2} + 2\pi n) = -1 \qquad \forall n$$

On a donc $x_n \to 0$ et $y_n \to 0$, mais

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)\,.$$

Le théorème ci-dessus implique donc que la limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.



◇

7.3 Le théorème des deux gendarmes

Le résultat suivant est l'analogue de celui vu précédemment pour les suites ; son but est de calculer une limite $x \to x_0$ (ou $x \to x_0^{\pm}$) en comparant $f(x)$, proche de x_0, à deux fonctions plus simples dont on sait calculer la limite. On formule le résultat pour la limite $x \to x_0$, mais il peut aussi se formuler pour les limites latérales (section suivante).

Théorème 7.10. *(Théorème des deux gendarmes) Soient f, g, h définies dans un voisinage V épointé de x_0, telles que*

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)\,, \quad \forall x \in V\,.$$

Si

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L\,,$$

alors la limite de f lorsque x tend vers x_0 existe, et vaut L :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,.$$

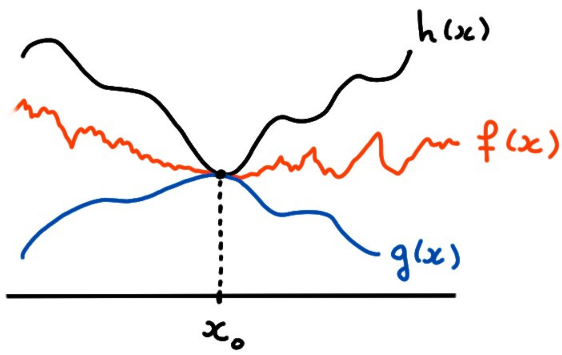
Preuve: Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$, il existe un $\delta > 0$ tel que $|g(x) - L| \leqslant \varepsilon$ *et* $|h(x) - L| \leqslant \varepsilon$ pour tout $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. Ceci implique que si $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$, alors

$$f(x) - L \leqslant h(x) - L \leqslant |h(x) - L| \leqslant \varepsilon\,,$$

mais aussi

$$f(x) - L \geqslant g(x) - L \geqslant -|g(x) - L| \geqslant -\varepsilon\,.$$

Et donc $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$. □



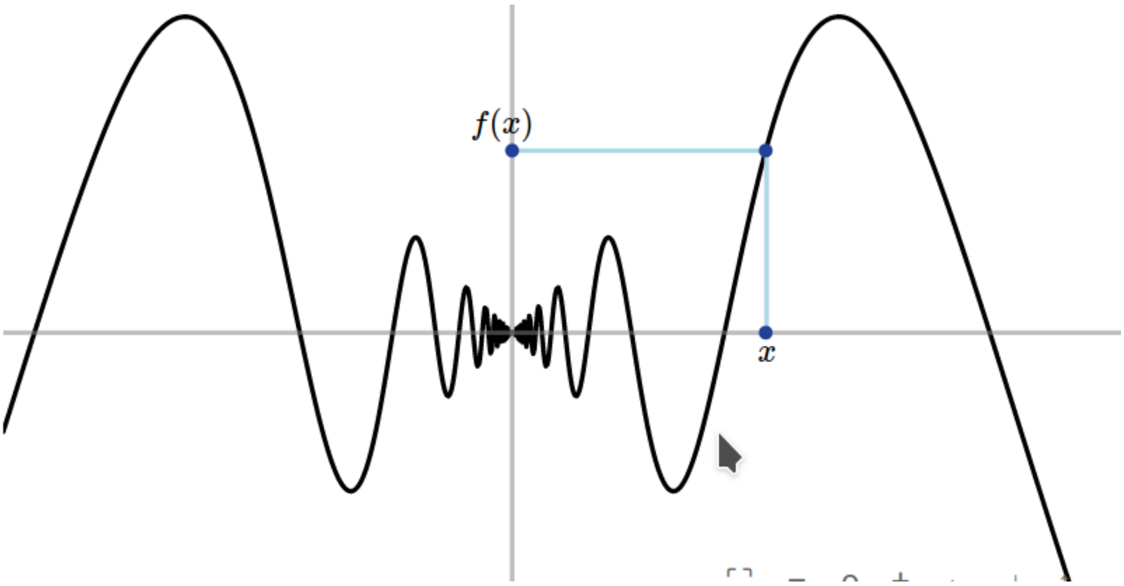
Exemple 7.11. Considérons la fonction

$$f(x) = |x| \sin\left(\frac{1}{\sqrt{5|x|}}\right)\,,$$

bien définie dans un voisinage épointé de $x_0 = 0$. Pour calculer sa limite lorsque $x \to 0$, on peut remarquer que $-1 \leqslant \sin(\cdots) \leqslant +1$, et donc pour tout $x \neq 0$,

$$\underbrace{-|x|}_{=g(x)} \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{|x|}_{=h(x)}$$

Comme $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$, le théorème des deux gendarmes implique que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.



◇

7.4 Limites latérales $x \to x_0^{\pm}$

On parle alors de **limite latérale** si les valeurs d'une fonction tendent vers une valeur lorsqu'on s'approche d'un point x_0 en maintenant le signe de $x - x_0$ constant :

Définition 7.12. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

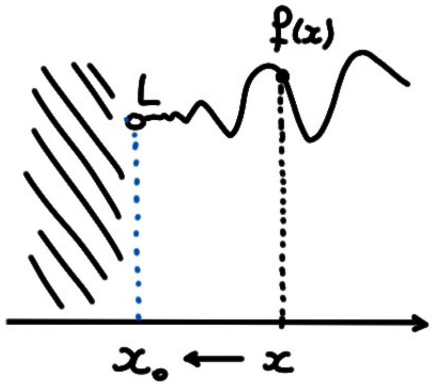
- ⋆ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0, x_0 + \alpha[$ $(\alpha > 0)$. On dit que f **tend vers** $L \in \mathbb{R}$ **lorsque** x **tend vers** x_0 **par la droite** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < x - x_0 \leqslant \delta$, c'est-à-dire $x_0 < x \leqslant x_0 + \delta$. On notera :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L\,.}$$

- ⋆ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha, x_0[$ $(\alpha > 0)$. On dit que f **tend vers** $L \in \mathbb{R}$ **lorsque** x **tend vers** x_0 **par la gauche** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $-\delta \leqslant x - x_0 < 0$, c'est-à-dire $x_0 - \delta \leqslant x < x_0$. On notera :

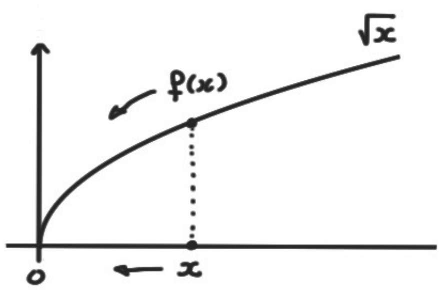
$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L\,.}$$

Donc une fonction peut par exemple posséder une limite latérale à droite en x_0, sans être du tout définie à gauche de x_0 :



Exemple 7.13. Par exemple, $f(x) = \sqrt{x}$ est définie seulement sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, et

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 .$$



En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f(x)| = \sqrt{x} \leqslant \varepsilon$ si et seulement si $x \leqslant \varepsilon^2$, et donc on peut prendre $\delta := \varepsilon^2$. ◇

Mais une fonction peut être définie de part et d'autre de x_0, et n'avoir qu'une seule limite latérale :

Exemple 7.14. Considérons, sur $\mathbb{R}^*$, la fonction

$$f(x) := \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \,, \\ \pi & \text{si } x = 0 \,, \\ \sin(1/x) & \text{si } x > 0 \,. \end{cases}$$

Alors f n'a pas de limite à droite en $x_0 = 0$, comme on sait, mais

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 .$$

◇

Intuitivement, si les limites latérales en un point existent et sont égales, alors la vraie limite en ce point existe et prend la même valeur :

Théorème 7.15. *Soit f définie dans un voisinage épointé de x_0. Les deux affirmations ci-dessous sont équivalentes :*

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

b) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

Preuve:

a) Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. Or $0 < x - x_0 \leqslant \delta$ et $-\delta \leqslant x - x_0 < 0$ impliquent évidemment $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$. Et donc $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

b) Maintenant, supposons que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$, et fixons $\varepsilon > 0$. On a d'une part l'existence d'un $\delta_- > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $-\delta_- \leqslant x - x_0 < 0$, et d'autre part l'existence d'un $\delta_+ > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $0 < x - x_0 \leqslant \delta_+$. En prenant $\delta := \min\{\delta_-, \delta_+\}$, on garantit que si $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$, alors $-\delta_- \leqslant x - x_0 < 0$ et $0 < x - x_0 \leqslant \delta_+$, et donc dans tous les cas, $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$.

□

Il existe évidemment une version latérale du Théorème des deux gendarmes, ou du théorème sur l'équivalence avec les limites par des sous-suites, dans le cas des limites latérales.

Informel 7.16. Si on veut montrer qu'une limite $x \to x_0$ n'existe *pas*, on pourra donc

- ⋆ passer par des suites (section précédente), ou
- ⋆ montrer qu'une des limites latérales, $x \to x_0^+$ ou $x \to x_0^-$, n'existe pas, ou
- ⋆ montrer que les limites latérales $x \to x_0^+$ et $x \to x_0^-$, existent mais ont des valeurs différentes.

Exemple 7.17. Considérons

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1},$$

et montrons que la limite $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ n'existe pas.

D'abord, remarquons que $|x^2 - 1| = |x - 1| \cdot |x + 1|$. Ensuite, si x est proche de 1, alors $|x + 1| = x + 1$, mais

$$|x - 1| = \begin{cases} +(x-1) & \text{si } x > 1\,, \\ -(x-1) & \text{si } x < 1\,. \end{cases}$$

On peut donc facilement calculer les limites latérales :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} -(x+1) = -2\,,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2\,,$$

Comme les limites latérales existent mais sont inégales, on conclut que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque $x \to 1$. ◇

7.5 Propriétés de la limite

Nous avons vu pour l'instant trois notions de limites en un point x_0 :

$$\lim_{x\to x_0}\,, \qquad \lim_{x\to x_0^+}\,, \qquad \lim_{x\to x_0^-}\,.$$

Or ces limites obéissent à des propriétés standards qui sont semblables à celles des suites. Plutôt que de les répéter séparément pour chaque notion, nous les énonçons en une seule fois. Dans la proposition ci-dessous, "$\lim$" représente une des limites ci-dessus.

Proposition 8. *Soient f, g telles que $\lim f$ et $\lim g$ existent. Alors :*

a) $\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g$

b) $\lim(f \cdot g) = (\lim f) \cdot (\lim g)$

c) si $\lim g \neq 0$, *alors* $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$

d) si $f(x) \leqslant g(x)$ *dans un voisinage de* x_0, *alors* $\lim f \leqslant \lim g$

Preuve: (Suivre exactement les mêmes pas que dans la preuve des mêmes propriétés pour les suites.) □

Les propriétés ci-dessus permettent de calculer des limites nouvelles à partir de limites déjà connues, en évitant de devoir passer à chaque fois par la définition, "à la ε-δ".

Exemple 7.18. Considérons un polynôme

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,.$$

Par les propriétés 1 et 2,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \lim_{x\to x_0} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \lim_{x\to x_0} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k \\ &= P(x_0)\end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière ligne, on a encore utilisé la propriété 2, pour chaque k, comme suit. Puisque $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} x^k &= \lim_{x\to x_0} \underbrace{x\cdot x\cdots x}_{k \text{ fois}} \\ &= \underbrace{\big(\lim_{x\to x_0} x\big)\cdot\big(\lim_{x\to x_0} x\big)\cdots\big(\lim_{x\to x_0} x\big)}_{k \text{ fois}} \\ &= \underbrace{x_0\cdot x_0\cdots x_0}_{k \text{ fois}} = {x_0}^k\,.\end{aligned}$$

◇

7.6 Quelques indéterminations "$\frac{0}{0}$"

Les limites les plus importantes (et les plus intéressantes aussi) sont les **formes indéterminées**, celles de la forme "$\frac{0}{0}$", c'est-à-dire des limites de quotients de fonctions définies dans un voisinage de x_0,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\,,\qquad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}\,,\qquad \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

où f et g tendent toutes les deux vers zéro.

Dans cette section on rappelle quelques méthodes classiques utiles pour lever ce genre d'indétermination, en les illustrant sur des exemples standards. Il est clair que les techniques s'adaptent pour les trois types de limites.

7.6.1 Polynômes et factorisation

Exemple 7.19. Considérons une limite d'un quotient de deux polynômes :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1}\frac{P(x)}{M(x)}$$

Par une propriété vue plus haut,

$$\lim_{x\to 1} P(x) = P(1) = 0, \qquad \lim_{x\to 1} M(x) = M(1) = 0\,,$$

et donc ce quotient mène à une indétermination de la forme "$\frac{0}{0}$". Mais comme on sait, le fait que les $P(1) = 0$ et $M(1) = 0$ signifie que ces polynômes peuvent se factoriser par $(x-1)$. En effectuant deux divisions, on obtient

$$\begin{aligned}P(x) &= x^3-2x^2-5x+6 = (x-1)(x^2-x-6)\,,\\ M(x) &= x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)\,,\end{aligned}$$

ce qui implique que le quotient considéré est en fait

$$\frac{P(x)}{M(x)} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2-x-6)}{\cancel{(x-1)}(x+3)} = \frac{x^2-x-6}{x+3} = \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{M}(x)}$$

Et donc, puisque $\tilde{P}(1) = -6$ et $\tilde{M}(1) = 4 \neq 0$, la limite à calculer n'est plus indéterminée :

$$\lim_{x\to 1} \frac{P(x)}{M(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{M}(x)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}\,.$$

◇

7.6.2 La méthode du conjugué

La méthode du conjugué, que nous avons utilisée souvent dans l'étude des suites et des séries, est aussi utile pour les limites de fonctions.

Exemple 7.20. Considérons la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\,,$$

dans laquelle le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers zéro lorsque $x \to 0$. En multipliant et divisant par le conjugué de la racine qui apparaît au numérateur,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} &= \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\,. \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} == \frac{1}{2}\,.$$

◇

Remarquons que parfois, le conjugué est utile dans des limites qui n'impliquent pas forcément des racines carrées (voir plus bas).

7.6.3 Limites de fonctions trigonométriques

Exemple 7.21. Montrons que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

D'abord, puisque $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ (définie sur $\mathbb{R}^*$) est paire , il suffit de montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,.$$

Mais, par l'équivalence via les suites, cette dernière est équivalente à la validité, pour toute suite $x_n > 0$, $x_n \to 0$, de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1\,.$$

Or cette propriété a déjà été démontrée dans le chapitre sur les suites. ◇

Exemple 7.22. Montrons que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\,.}$$

En multipliant et divisant par le conjugué de la différence $1 - \cos(x)$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)^2}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \Big(\frac{\sin(x)}{x}\Big)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

◇

7.6.4 Limites de fonctions exp/log

Informel 7.23. Attention : Nous allons donner les valeurs de quelques limites impliquant des exponentielles et des logarithmes. Or comme dit au tout début de ce cours, les fonctions e^x et $\log(x)$, qui sont réciproques l'une de l'autre, ainsi que leurs propriétés, sont supposées connues : nous ne les avons pas introduites rigoureusement. Donc les preuves données ci-dessous ne sont pas entièrement rigoureuses ; des résultats que nous présenterons plus tard viendront compléter cette analyse.

Exemple 7.24. Montrons que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1\,.}$$

Pour ce faire, nous allons calculer la limite le long de la suite $x_n = \frac{1}{n}$, qui est > 0, et $x_n \to 0$. Pour un n fixé, on peut écrire

$$\frac{\log(1+x_n)}{x_n} = n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Puisque $(1+\frac{1}{n})^n \to e$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \log(e) = 1\,.$$

◇

Exemple 7.25. Montrons que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.}$$

Posons pour un instant $y := e^x - 1$, c'est-à-dire $x = \log(1+y)$. Lorsque $x \to 0$, on a aussi $y \to 0$, donc la limite devient

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y}} = 1\,.$$

◇

7.7 Limites infinies en un point

Si aucune des limites

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

n'existe au sens des définitions précédentes (c'est-à-dire que $f(x)$ tend vers un $L \in \mathbb{R}$ bien défini), alors un des scénarios possibles est que les valeurs de $f(x)$ deviennent arbitrairement grandes à l'approche de x_0, avec un signe bien défini.

Définition 7.26. Soit f définie dans un voisinage de x_0.

Limite infinie lorsque $x \to x_0$:

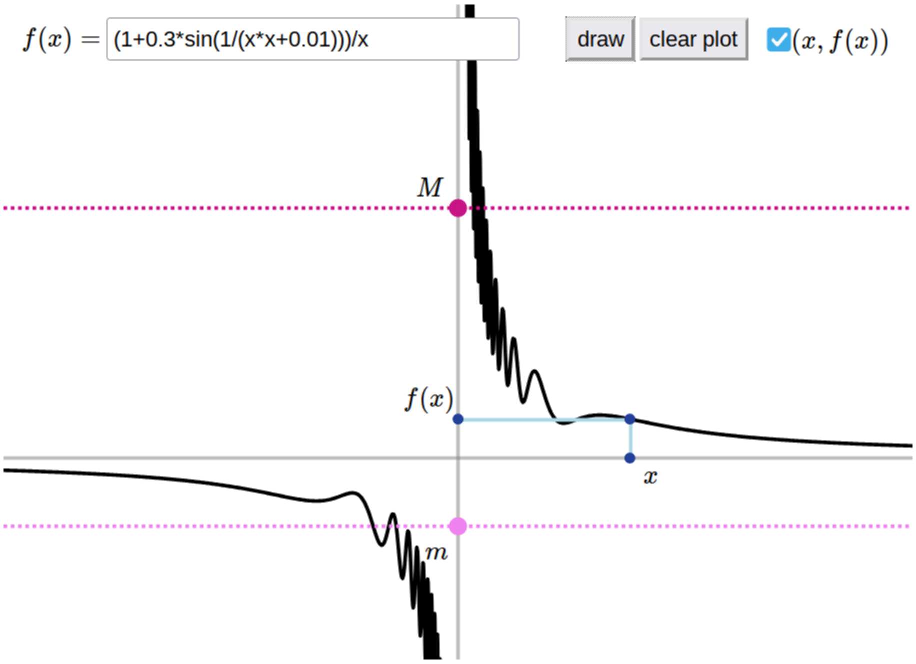
- ⋆ $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geqslant M$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$.
- ⋆ $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si et seulement si pour tout $m < 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \leqslant m$ dès que $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$

Limite infinie lorsque $x \to x_0^+$:

- ⋆ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geqslant M$ dès que $x_0 < x \leqslant x_0 + \delta$.
- ⋆ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ si et seulement si pour tout $m < 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \leqslant m$ dès que $x_0 < x \leqslant x_0 + \delta$.

Limite infinie lorsque $x \to x_0^-$:

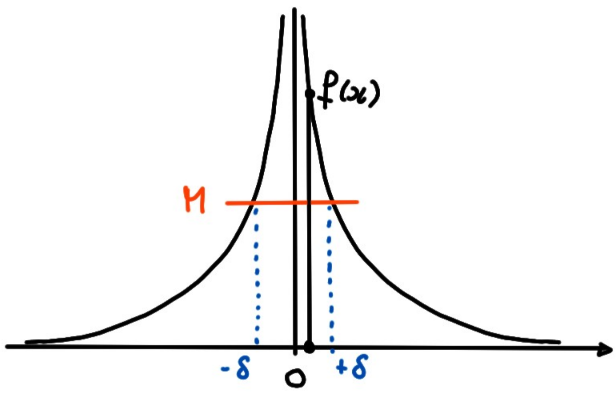
- ⋆ $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geqslant M$ dès que $x_0 - \delta \leqslant x < x_0$.
- ⋆ $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ si et seulement si pour tout $m < 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \leqslant m$ dès que $x_0 - \delta \leqslant x < x_0$.



Exemple 7.27. Soit $f(x) = \frac{1}{x^2}$, au voisinage de $x = 0$. Montrons que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \,,$$

au sens de la définition ci-dessus. En effet, fixons un seuil $M > 0$, et montrons que $f(x) \geqslant M$ pour tout x suffisamment proche de 0.



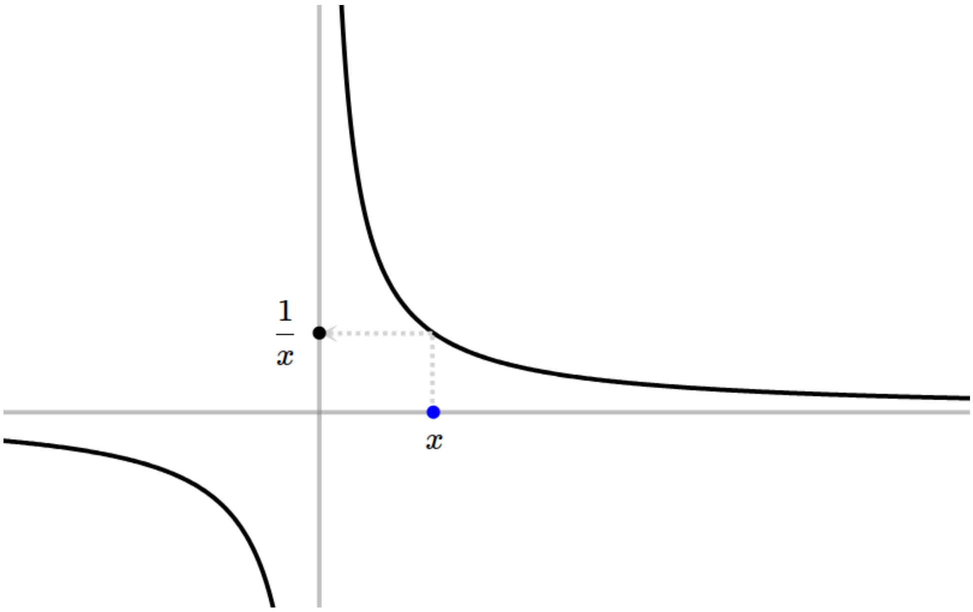
On remarque que pour un $M > 0$ fixé (grand),

$$f(x) \geqslant M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} \geqslant M \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant \frac{1}{M} \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{M}} \,.$$

Définissons donc $\delta := \frac{1}{\sqrt{M}}$. Comme conséquence de ce qui précède, en prenant un x tel que $0 < |x| \leqslant \delta$, on garantit que $f(x) \geqslant M$. ◇

Exemple 7.28. Considérons ensuite $f(x) = \frac{1}{x}$ au voisinage de $x = 0$. Dans ce cas on peut obtenir des limites infinies seulement au sens latéral :

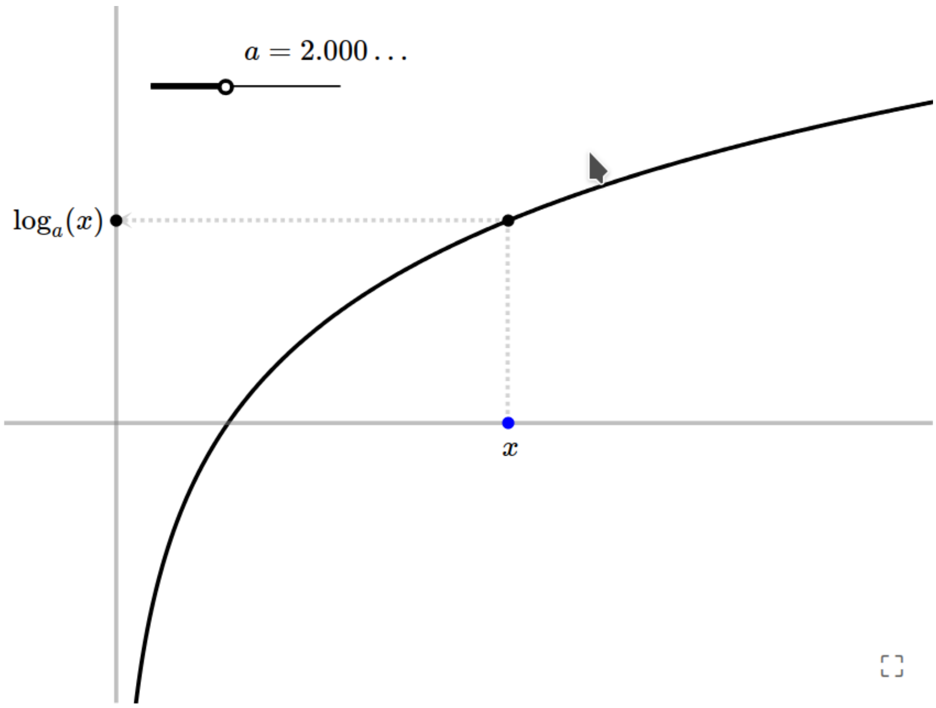
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \,, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \,.$$



◇

Exemple 7.29. Pour $f(x) = \log_a(x)$, dont le domaine est $\mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 1\,, \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1\,. \end{cases}$$



◇

7.7.1 Propriétés des limites infinies en un point

Comme on sait depuis le chapitre sur les suites, les limites infinies ne se manipulent pas comme leurs analogues finies.

La résultat suivant est l'exact analogue de la proposition donnée pour les suites qui tendent vers l'infini. On ne les formule que dans le cas de la limite $x \to x_0$. On laisse au lecteur le soin de formuler les propriétés analogues pour les limites latérales $x \to x_0^{\pm}$.

Proposition 9. *Soient f, g définies dans un voisinage épointé de x_0, et où f est telle que $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Alors*

a) $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

b) Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty\,, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty\,.$$

c) Si g est bornée dans un voisinage épointé de x_0, alors

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty\,, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0\,.$$

d) Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = L \neq 0$, alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 0, \\ -\infty & \text{si } L < 0\,. \end{cases}$$

e) Si il existe $\delta > 0$ tel que $g(x) \geqslant \delta$ dans un voisinage épointé de x_0, alors $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$.

f) Si $g(x) \geqslant f(x)$ pour tout x dans un voisinage épointé de x_0, alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

Exemple 7.30. Parfois, on peut devoir faire une factorisation avant d'utiliser les propriétés ci-dessus :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} &= \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{x\to -1^+} \underbrace{(x-1)}_{\to -2\neq 0} \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to +\infty} = -\infty\,. \end{aligned}$$

◇

7.8 Limites $x \to \pm\infty$

Dans cette section, on étudie le comportement des fonctions loin de l'origine, en considérant des limites où $x \to \pm\infty$.

Comme la problématique est essentiellement la même que celle introduite dans l'étude des suites (a_n) et de leurs limites lorsque $n \to \infty$, on se contentera de donner les définitions, calquées sur celles du chapitre sur les suites, et de donner quelques exemples.

7.8.1 Limites finies

Définition 7.31. a) Soit f dont le domaine contient un intervalle de la forme $]a, +\infty[$. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $x \geqslant N$.

b) Soit f dont le domaine contient un intervalle de la forme $]-\infty, b[$. Alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N < 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ dès que $x \leqslant N$.

On pourra utiliser sans autre toutes les propriétés listées dans la leçon sur les limites de suites, ainsi que les techniques pour étudier ces limites (extraire le terme dominant, conjugué, etc.).

7.8.2 Limites infinies

Définition 7.32. a) Soit f une fonction dont le domaine contient un intervalle de la forme $]a, +\infty[$.

- $\star$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe $N > 0$ tel que $f(x) \geqslant M$ dès que $x \geqslant N$.
- $\star$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ si et seulement si pour tout $m < 0$ il existe $N > 0$ tel que $f(x) \leqslant m$ dès que $x \geqslant N$.

b) Soit f une fonction dont le domaine contient un intervalle de la forme $]-\infty, b[$.

- $\star$ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe $N < 0$ tel que $f(x) \geqslant M$ dès que $x \leqslant N$.
- $\star$ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ si et seulement si pour tout $m < 0$ il existe $N < 0$ tel que $f(x) \leqslant m$ dès que $x \leqslant N$.

Exemple 7.33. Considérons le comportement des fonctions polynomiales $f(x) = x^p$, où $p \in \mathbb{Z}^*$. Si p est négatif, alors

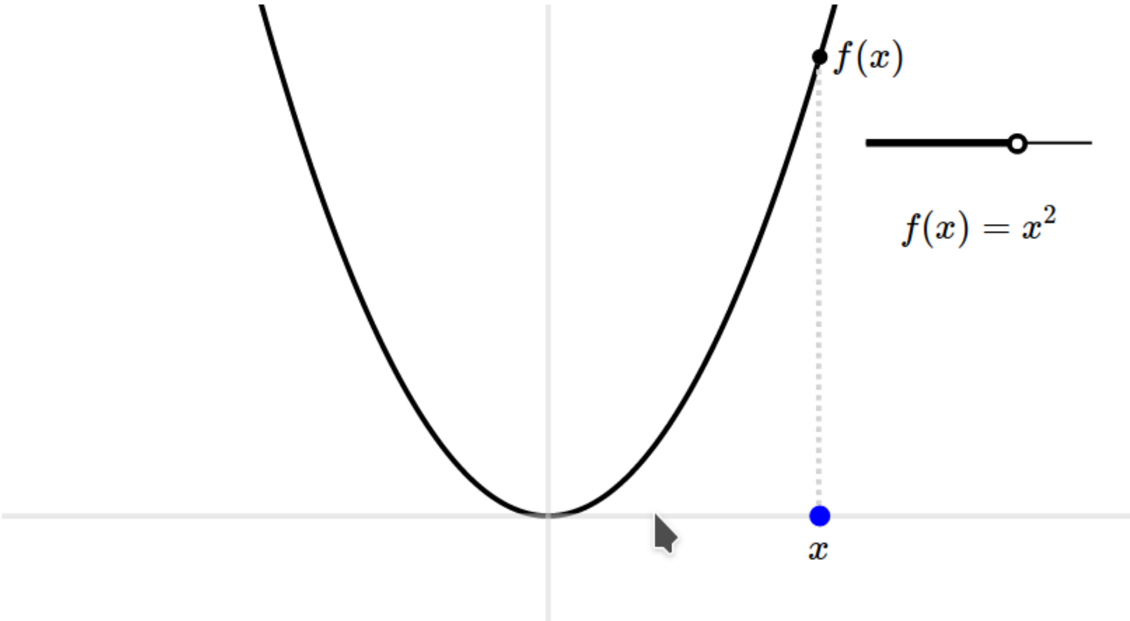
$$\lim_{x\to\pm\infty} x^p = 0\,.$$

Par contre si p est positif, alors

$$\lim_{x\to+\infty} x^p = +\infty\,,$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} x^p = \begin{cases} +\infty & \text{si p est pair}\,, \\ -\infty & \text{si p est impair}\,. \end{cases}$$

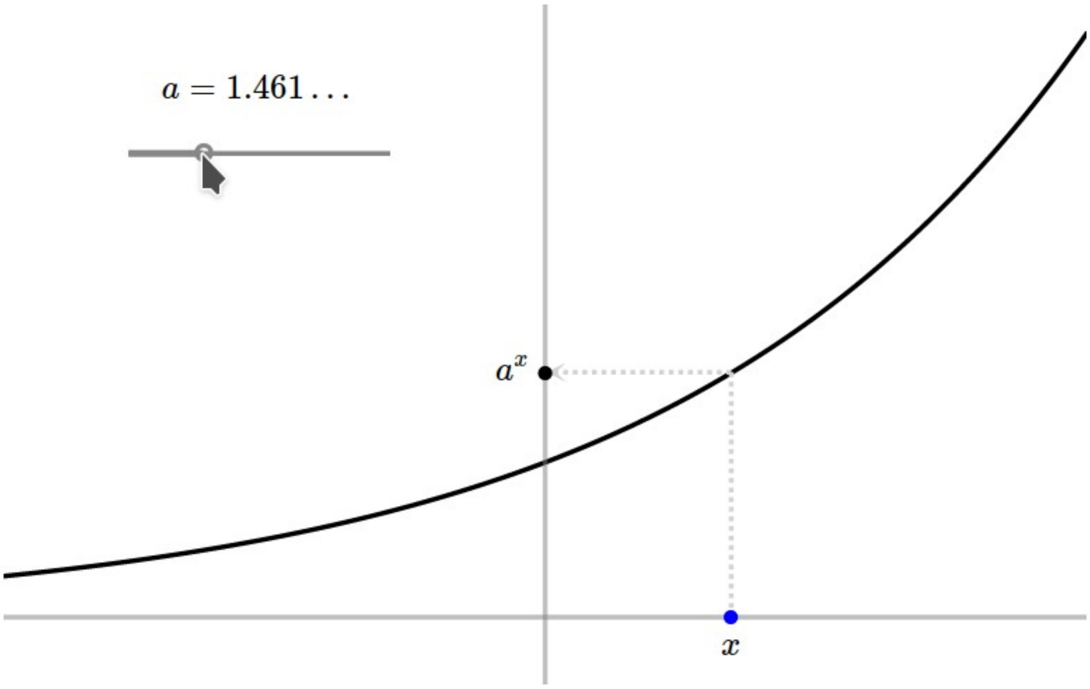


◇

Exemple 7.34. Exponentielle de base $a > 0$ ($a \neq 1$) :

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < a < 1\,, \\ 0 & \text{si } a > 1\,. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a < 1\,, \\ +\infty & \text{si } a > 1\,. \end{cases}$$



◇

Remarque 7.35. Le fait qu'ici on considère une fonction f de la variable réelle x, à l'inverse des suites dont la "variable" est un entier n, fait que certains outils nouveaux feront leur apparition, comme la règle de Bernoulli-l'Hôpital (voir chapitre dur la dérivation).
Nous reviendrons par exemple sur les limites qui caractérisent la vitesse avec laquelle certaines fonctions fondamentales tendent vers l'infini, comme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log_a(x))^p}{x^\alpha} = 0\,, \qquad p, \alpha > 0\,.$$

$\diamond$