Chapitre 12

Intégrale

12.1 Introduction

Le problème original du *calcul intégral* était de calculer des aires, des longueurs et des volumes, pour des objets géométriques du plan ou de l'espace, plus compliqués que les formes simples de la géométrie, tels que triangles, rectangles, cercles, parallélépipèdes, sphères, ...

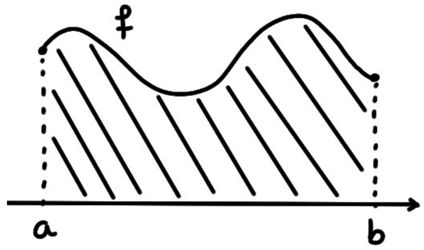
Plus tard, surtout après les travaux de Newton et Leibniz à la fin du XIIXème siècle, le calcul intégral permettait d'aller bien plus loin que le calcul des aires et de volumes, trouvant des applications à la mécanique, thermodynamique, etc., plus tard à la théorie des probabilités, puis à tous les domaines des sciences.

12.1.1 Aires de régions simples

Nous nous concentrerons, dans cette introduction, sur des régions particulières du plan, limitées par le graphe d'une fonction et un axe. Donc dans cette section nous traiterons uniquement des fonctions dont les valeurs sont positives ; dans les sections suivantes on passera au cas plus général. On va donc considérer une fonction sur un intervalle fermé et borné, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, telle que

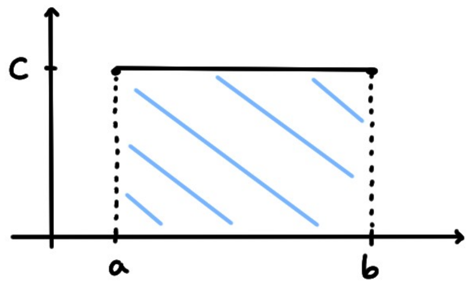
$$f(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [a, b]$$

On considérera la région délimitée par le graphe de f, par l'axe Ox, et par les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$:



Commençons par un cas très simple mais très important :

Exemple 12.1. Considérons une droite horizontale, c'est-à-dire une fonction constante, $f(x) = C \; \forall x \in [a, b]$, où C est constante strictement positive.



Dans ce cas, la région en question est un rectangle, et l'aire se calcule par

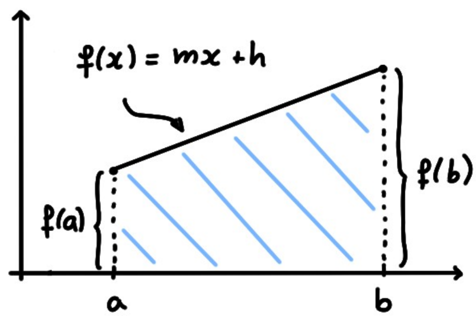
$$\text{aire} = \text{base} \times \text{hauteur} = (b - a) \times C = C(b - a)\,.$$

$\diamond$

Exemple 12.2. Si on considère maintenant la région délimitée par une droite de pente non-nulle, d'équation

$$y = f(x) = mx + h \qquad \forall x \in [a, b]\,,$$

positive en tout point de $[a, b]$,



alors la région considérée est un trapèze (si d'aventure $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, c'est un triangle), dont on calcule l'aire en faisant

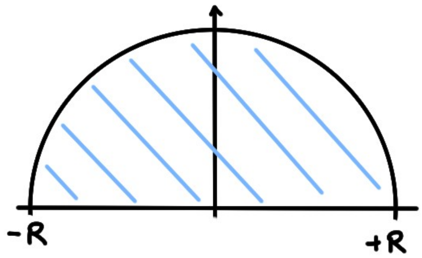
$$\begin{aligned} \text{aire} &= \text{moyenne des bases} \times \text{hauteur} \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2} \times (b - a) \\ &= \frac{(ma + h) + (mb + h)}{2} \times (b - a) \\ &= \frac{1}{2} m(b^2 - a^2) + h(b - a)\,. \end{aligned}$$

$\diamond$

Exemple 12.3. Finalement, si on considère

$$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2} \qquad \forall x \in [-R, R]\,,$$

alors la région considérée est un demi-disque de rayon R,



et donc son aire est

$$\text{aire} = \frac{1}{2}\pi R^2 \,.$$

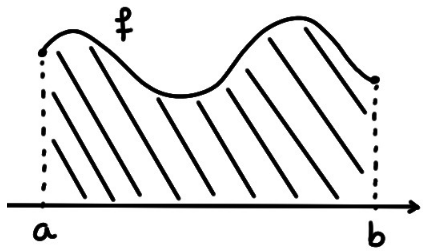
◇

Les exemples ci-dessus font partie des quelques cas de figures géométriques du plan dont on peut calculer l'aire sans avoir recours au calcul intégral.

12.2 Définition de l'intégrale de Riemann-Darboux

Dans toute cette section, on fixera une fonction *bornée* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Pour garder en tête l'interprétation en terme d'une "aire sous la courbe", les illustrations se feront la plupart du temps pour une fonction positive.



Pourtant, la construction de l'intégrale que l'on va donner ci-dessous est *indépendante du signe de la fonction sur l'intervalle*.

12.2.1 Subdivisions

L'idée générale de base de l'intégration est *d'approximer un objet compliqué à l'aide d'une union d'objets simples.* Dans l'intégrale d'une fonction, on approxime l'aire sous le graphe de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ à l'aide de "régions simples" qui sont des rectangles.

La première étape est de diviser l'intervalle :

Définition 12.4. On appelle **subdivision** (aussi : **partition**) de l'intervalle $[a,b]$ toute collection ordonnée de nombres

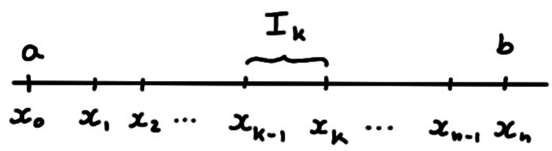
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \,.$$

On notera en général une subddivision par la lettre

$$\sigma = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) \,.$$

Soit $\sigma = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On définit, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'intervalle

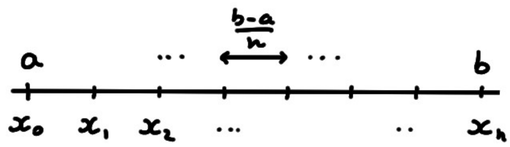
$$I_k := [x_{k-1}, x_k] .$$



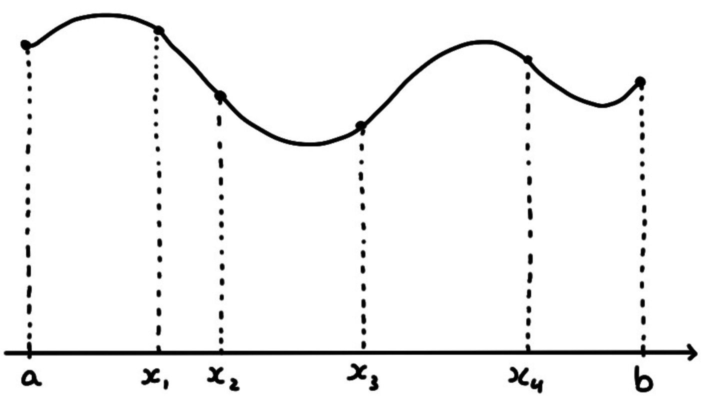
Notons qu'en général, les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ne sont pas forcément tous de même longueur.

Définition 12.5. On appelle **subdivision régulière (à n éléments) de** $[a, b]$ la subdivision dont les intervalles I_k ont tous taille $\frac{b-a}{n}$, c'est-à-dire pour laquelle $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$:

$$\sigma = \big(a, a + \tfrac{b-a}{n}, a + 2\tfrac{b-a}{n}, \ldots, a + (n-1)\tfrac{b-a}{n}, b\big)$$



Une fois que l'on se donne une subdivision, on peut l'utiliser pour diviser la région sous le graphe de f en régions plus fines, qui commencent à ressembler à des rectangles :



12.2.2 Sommes de Darboux

Pour une subdivision donnée $\sigma = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$, introduisons pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, les nombres

$$m_k := \inf_{x \in I_k} f(x) , \qquad M_k := \sup_{x \in I_k} f(x) ,$$

Puisqu'on suppose que f est bornée, ces nombres sont finis. On peut alors définir deux sommes associées à la subdivision σ :

Définition 12.6. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, et σ une subdivision de $[a, b]$. On définit :

a) la **somme de Darboux inférieure**,

$$\underline{S}_\sigma(f) := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

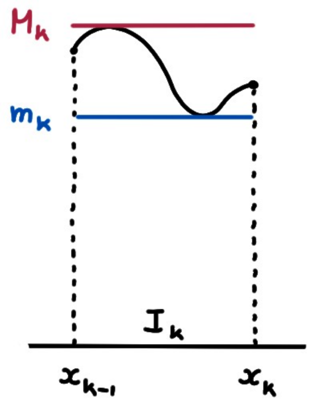
b) la **somme de Darboux supérieure**

$$\overline{S}_\sigma(f) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Par définition,

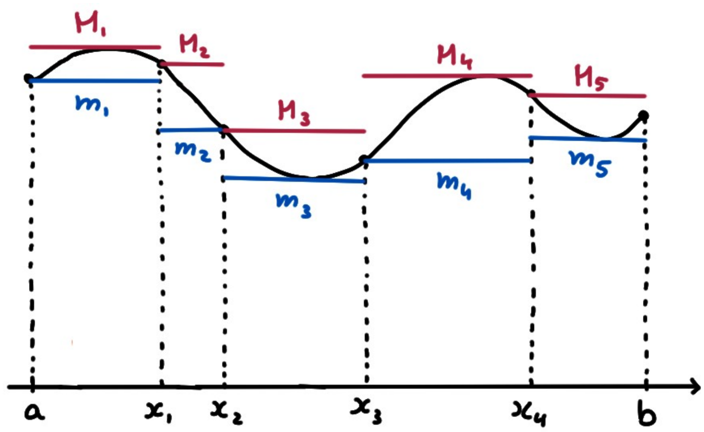
$$\underline{S}_\sigma(f) \leqslant \overline{S}_\sigma(f).$$

Considérons la fonction sur l'intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Dans le cas où $f(x) \geqslant 0$, $m_k(x_k - x_{k-1})$ (resp. $M_k(x_k - x_{k-1})$) représente l'aire d'un rectangle, dont le côté supérieur est situé *en-dessous* (resp. *en-dessus*) du graphe de f.



Donc sur I_k, la *vraie* aire sous le graphe peut toujours être comparée aux aires de ces deux rectangles, ce qui a pour conséquence que globalement, l'aire sous la courbe peut âtre minorée et majorée par les sommes de Darboux :

$$\underline{S}_\sigma(f) \leqslant \text{aire} \leqslant \overline{S}_\sigma(f).$$

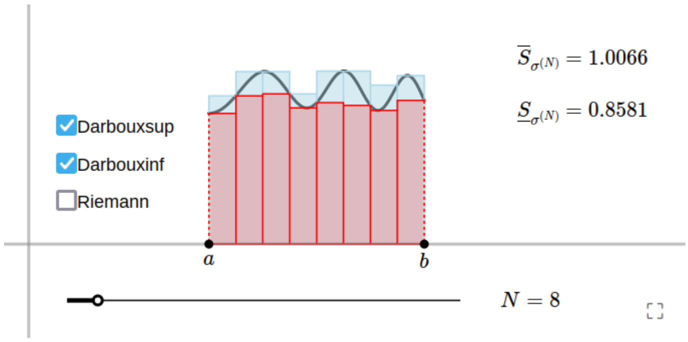


Voyons maintenant un autre avantage des sommes de Darboux :

Lemme 28. *Soit* $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n)$ *une subdivision de* $[a, b]$, *et soit* $\sigma' = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_k, \dots, x_n)$ *la subdivision obtenue en rajoutant un point* y *à* σ, *entre* x_{k-1} *et* x_k. *Alors*

$$\underline{S}_\sigma(f) \leqslant \underline{S}_{\sigma'}(f) \leqslant \overline{S}_{\sigma'}(f) \leqslant \overline{S}_\sigma(f)\,.$$

A priori, $\underline{S}_\sigma(f)$ et $\overline{S}_\sigma(f)$ sont des nombres différents : $\underline{S}_\sigma(f) < \overline{S}_\sigma(f)$. Mais le lemme ci-dessus nous dit qu'ils ne peuvent que se rapprocher lorsque l'on rajoute des points dans la subdivision. On s'attend donc à ce que pour des fonctions "raisonnables", il soit possible de rendre $\underline{S}_\sigma(f)$ arbitrairement proche de $\overline{S}_\sigma(f)$, en prenant une subdivision suffisamment fine :



Ceci motive la définition suivante :

Définition 12.7. Pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée, on définit les nombres

$$\underline{S}(f) := \sup_\sigma \underline{S}_\sigma(f)\,,$$
$$\overline{S}(f) := \inf_\sigma \overline{S}_\sigma(f)\,.$$

Si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$, on dit que f est **intégrable au sens de Riemann/Darboux** . On appelle le nombre $S = \underline{S}(f) = \overline{S}(f) \equiv S$ l'**intégrale de** f, et on le note

$$S = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Par convention, on définit

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0\,.$$

C'est cette définition que nous adopterons ; on peut montrer qu'elle est équivalente, pour les fonctions continues, à la précédente.

Remarque 12.8. Le symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ représente un nombre, qui ne dépend pas du "x" qui apparaît deux fois. On appelle ce "x" une **variable d'intégration**. C'est une variable **muette**, dans le sens où elle est uniquement utilisée pour construire

l'intégrale ; l'intégrale n'en dépend pas explicitement. Donc on pourrait aussi écrire
$$I = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha = \int_a^b f(m)\,dm = \cdots$$
Les nombres a et b sont appelés **bornes d'intégration**. ◇

Informel 12.9. À propos de la terminologie : Le symbole $\int$, apparemment introduit par Newton, est une espèce de "S", qui rappelle l'origine de l'intégrale : "somme".

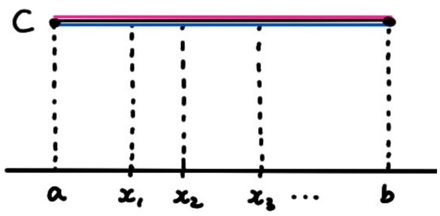
À strictement parler, l'intégrale **au sens de Riemann** passe par la définition des **sommes de Riemann**
$$S^*_\sigma(f) = \sum_{k=1}^n f(x^*_k)(x_k - x_{k-1})\,,$$
où pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, x^*_k est un point quelconque choisi dans $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Ces sommes satisfont toujours
$$\underline{S}_\sigma(f) \leqslant S^*_\sigma(f) \leqslant \overline{S}_\sigma(f)\,.$$

12.3 Les fonctions intégrables

Se pose maintenant la question de savoir quelles fonctions sont réellement intégrables au sens de la définition donnée plus haut.

Commençons par un exemple simple.

Exemple 12.10. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction constante : $f(x) = C$.



Si $C > 0$, on sait que l'intégrale doit représenter l'aire du rectangle, et doit donc être égale à $C(b - a)$.

Soit σ une subdivision quelconque de $[a, b]$. Puisque $m_k = C$ pour tout k, on peut calculer explicitement la somme de Darboux inférieure,
$$\begin{aligned}\underline{S}_\sigma(f) &= \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})\\ &= C\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})\\ &= C((\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \cdots + (x_n - \cancel{x_{n-1}}))\\ &= C(x_n - x_0)\\ &= C(b - a)\,.\end{aligned}$$

De même, $M_k = C$ pour tout k, et donc la somme de Darboux supérieure vaut $\overline{S}_\sigma(f) = C(b-a)$. Puisque les sommes ne dépendent pas du choix de la subdivision, ceci implique

$$\begin{aligned} \underline{S}(f) &= \sup_\sigma \underline{S}_\sigma(f) = C(b-a)\,, \\ \overline{S}(f) &= \inf_\sigma \overline{S}_\sigma(f) = C(b-a)\,, \end{aligned}$$

et donc $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$, ce qui entraîne que f est intégrable et que son intégrale vaut

$$\int_a^b f(x)\,dx = C(b-a)\,.$$

$\diamond$

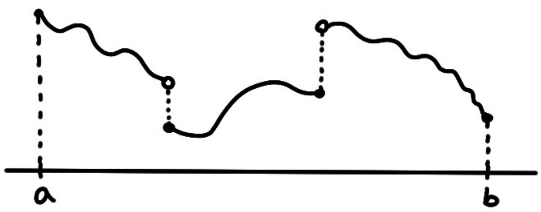
12.3.1 Une condition suffisante pour l'intégrabilité : la continuité

Théorème 12.11. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors elle est intégrable.*

Preuve: (La preuve est omise. Elle utilise le fait suivant : Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue est **uniformément continue**.) $\square$

Par conséquent, toutes les fonctions fondamentales (polynômes, fonctions trigo, exponentielles et logarithmes) sont intégrables sur les intervalles fermés et bornés contenus dans leurs domaines.

En fait, on peut montrer qu'il suffit que f soit continue *par morceaux* pour être intégrable :



Ceci signifie que si une fonction n'est pas intégrable, c'est qu'elle doit être "très discontinue".

Exemple 12.12. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\,, \\ 0 & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]\,. \end{cases}$$

On voit facilement que $\underline{S}_\sigma(f) = 0$ et $\overline{S}_\sigma(f) = 1$, quelle que soit la subdivision σ. Donc f n'est pas intégrable. $\diamond$

Voyons ensuite un résultat qui montre que l'on peut en principe *calculer* l'intégrale d'une fonction continue en choisissant des suites de subdivisions.

Pour une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, on définit

$$|\sigma| := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - x_{k-1}| .$$

Théorème 12.13. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, et $\sigma^{(N)}$ une suite de subdivisions telle que, dans la limite où $N \to \infty$,*

$$|\sigma^{(N)}| \to 0 .$$

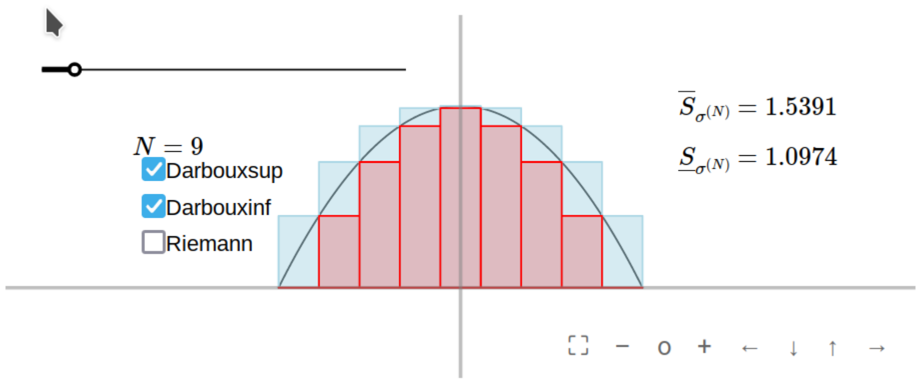
Alors

$$\overline{S}_{\sigma^{(N)}}(f) \to \int_a^b f(x)\, dx , \qquad \text{et } \underline{S}_{\sigma^{(N)}}(f) \to \int_a^b f(x)\, dx .$$

Dans la pratique, on utilise souvent une suite de partitions régulières, où $\sigma^{(N)}$ contient N intervalles de longueurs égales. Voyons cela sur un exemple.

Exemple 12.14. Considérons l'aire sous la "parabole d'Archimède", dont l'équation est

$$f(x) = 1 - x^2 , \qquad x \in [-1, 1] .$$



Par parité, il suffit de calculer l'aire de la moitié de l'aire sous la courbe, disons la partie de droite :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2 \int_0^1 f(x)\, dx .$$

f étant continue, on peut utiliser le théorème et calculer l'intégrale en utilisant une suite de subdivisions Le plus simple, dans ce cas, est d'utiliser des subdivisions régulières. Prenons donc la suite de subdivisions $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots$ définie par

$$\sigma^{(N)} = \left(0, \tfrac{1}{N}, \tfrac{2}{N}, \dots, \tfrac{N-1}{N}, 1\right) ,$$

Dans $\sigma^{(N)}$, on a que $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{N}$.

On peut maintenant récrire précisément la somme de Darboux supérieure :

$$\begin{aligned}\overline{S}_{\sigma(N)}(f) &= \sum_{j=0}^{N-1} f(\tfrac{j}{N})\frac{1}{N}\\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\Big(1-(\frac{j}{N})^2\Big)\\ &= 1-\frac{1}{N^3}\sum_{j=0}^{N-1} j^2\\ &= 1-\frac{(N-1)N(2(N-1)+1)}{6N^3}\end{aligned}$$

Dans cette dernière ligne, on a utilisé la formule

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.}$$

(Pour une preuve, voir ce qui a été fait **ici** (lien web).)

Donc, par le théorème,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \lim_{N\to\infty}\overline{S}_{\sigma(N)}(f)\\ &= 1-\lim_{N\to\infty}\frac{(N-1)N(2(N-1)+1)}{6N^3}\\ &= 1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}\,,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \frac{4}{3} = 1.33333\ldots\,.$$

◇

12.3.2 Propriétés des fonctions intégrables

Les propriétés suivantes seront utilisées constamment par la suite :

Proposition 15. *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrables.*

a) ***Linéarité*** *: pour toutes constantes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^b \big(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)\big) dx = \lambda_1 \int_a^b f(x) dx + \lambda_2 \int_a^b g(x) dx\,.$$

b) *Pour tout $a < c < b$, on a la* ***relation de Chasles***

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx\,.$$

c) *Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x) dx \leqslant \int_a^b g(x) dx\,.$$

d) *Si $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ pour tout $x \in [a, b]$, alors*

$$\alpha(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \beta(b-a)\,.$$

e)

$$\Big|\int_a^b f(x)\, dx\Big| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

Preuve:

□

La relation de Chasles est valable seulement lorsque $a < c < b$, mais pour qu'elle reste vraie plus généralement,

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^a f(x)\, dx = \int_a^a f(x)\, dx = 0\,,$$

nous adopterons la convention suivante :

$$\boxed{\int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx\,.}$$

12.4 Le Théorème de la Moyenne

12.4.1 La moyenne d'une fonction ?

En arithmétique, on définit la *moyenne* d'une famille de nombres $x_1, x_2, \dots, x_N$ par

$$\bar{x} := \frac{1}{N}\big(x_1 + x_2 + \cdots + x_N\big)$$

Si on veut calculer la valeur moyenne d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on ne peut pas simplement *sommer* ses valeurs , et on a naturellement recours à l'intégrale :

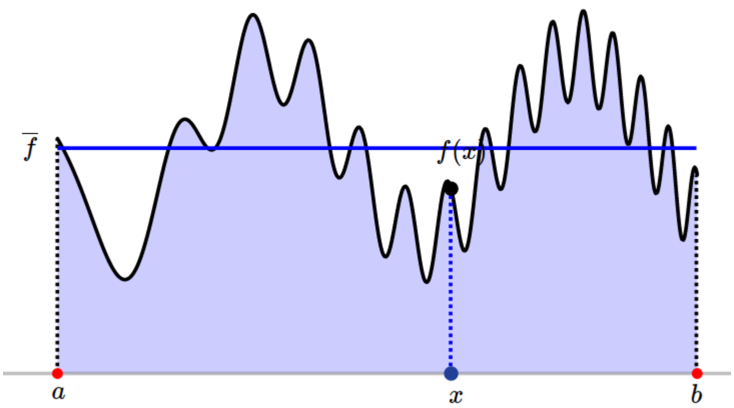
Définition 12.15. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, on définit sa **valeur moyenne sur** $[a, b]$ par

$$\bar{f} := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \,.$$

$\bar{f}$ est l'analogue continu de la moyenne discrète $\bar{x}$. En effet,

- ⋆ à la somme des x_k, $k \in \{1, \dots, N\}$ correspond l'intégrale des $f(x)$, $x \in [a, b]$, et
- ⋆ à la division par la taille de l'échantillon, $\frac{1}{N}$, correspond la division par la longueur de l'intervalle $\frac{1}{b-a}$.

Lorsque $f(x) \geqslant 0$, on peut interpréter le nombre $\bar{f}$ géométriquement : c'est l'unique nombre tel que le rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur $\bar{f}$ ait même aire que la région sous la courbe.



Informel 12.16. Supposons que la région sous le graphe de f est une forme faite de glace, contenue dans un récipient de base $[a, b]$; la quantité de glace présente dans cette forme est égale à

$$\int_a^b f(x)\, dx \,.$$

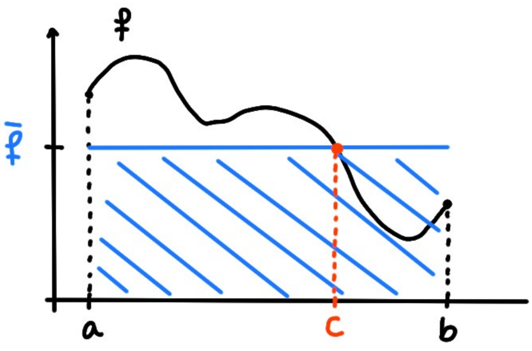
Si on laisse la glace fondre, après un certain temps, toute la glace s'est transformée en eau, dont le niveau dans le récipient est à une certaine hauteur $\bar{f}$. Puisque la quantité d'eau est (en première approximation) égale à la quantité de glace initiale, on doit avoir

$$(b-a)\bar{f} = \int_a^b f(x)\, dx \,.$$

Le niveau d'eau coïncide donc avec la valeur moyenne de f.

Théorème 12.17. *(Théorème de la moyenne) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \,.$$



Preuve: Comme f est continue, elle atteint une valeur minimum m et une valeur maximum M ; de plus, $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$, ce qui implique $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a, b]$, et donc aussi

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b M\,dx\,,$$

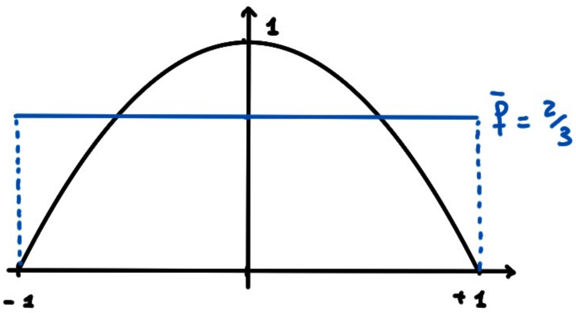
ce qui donne, après division par $b - a$,

$$m \leqslant \bar{f} \leqslant M\,.$$

Mais comme $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$, le Théorème de la valeur intermédiaire implique qu'il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \bar{f}$. □

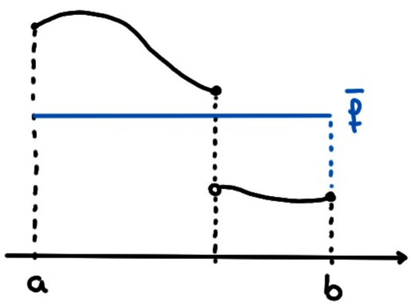
Exemple 12.18. Considérons encore la parabole d'Archimède, qui est le graphe de la fonction continue $f(x) = 1 - x^2$, $x \in [-1, 1]$. Sa valeur moyenn est donnée par

$$\bar{f} = \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$



On voit qu'il existe deux nombres, $\overline{c} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in]-1, 1[$, tels que $f(c) = \overline{f}$. ◇

Remarque 12.19. Remarquons que si f n'est pas continue, alors le résultat n'est pas toujours vrai :



Cette fonction est manifestement continue par morceaux, donc intégrable, et sa valeur moyenne $\bar{f}$ est bien définie. Par contre, il n'existe aucun $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \bar{f}$. ◇

12.5 Théorème Fondamental de l'Analyse

Maintenant que l'on a défini l'intégrale et que l'on a étudié ses principales propriétés, revenons au problème plus appliqué, qui est celui de savoir comment *calculer* $\int_a^b f(x)dx$.

12.5.1 Une fonction auxiliaire

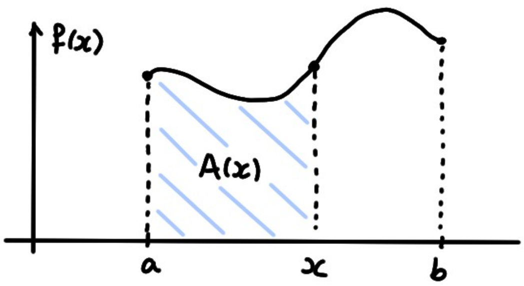
Dans cette section, nous supposerons en général que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue.

Définition 12.20. On appelle **fonction aire (associée à f)** la fonction $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$A(x) := \int_a^x f(t)dt\,.$$

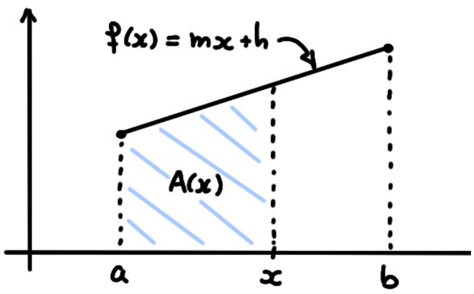
Remarque 12.21. On a pris soin de nommer la variable d'intégration différemment (on a choisi "t", mais on aurait pu prendre n'importe quelle lettre différente de x), pour montrer que la dépendance de $A(x)$ en x est dans la borne supérieure de l'intégrale. ◇

Comme son nom l'indique, $A(x)$ peut être interprétée, lorsque f est positive, comme l'aire sous le graphe de f, entre les droites verticales d'abscisses a et x respectivement. Cette aire dépend bien-sûr du choix de x :



Par définition, on a $A(a) = 0$, et notre but est de calculer $A(b)$.

Exemple 12.22. Si $f(x) = mx + h$, est positive sur $[a, b]$, alors $A(x)$ est une aire de trapèze :



On peut donc calculer explicitement :

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-a) \times \frac{f(a)+f(x)}{2} \\ &= \frac{1}{2} m(x^2 - a^2) + h(x-a) \,. \end{aligned}$$

Remarque : $A(x)$ est dérivable sur $]a, b[$, et

$$A'(x) = \Big(\frac{1}{2} m(x^2 - a^2) + h(x-a)\Big)' = mx + h = f(x) \qquad (!)$$

$\diamond$

Cette propriété surprenante que l'on vient d'observer, à savoir que *la dérivée de la fonction aire est égale à la fonction*, est en fait toujours vraie...

12.5.2 Première partie

Théorème 12.23. *(Théorème Fondamental, première partie) Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, $x \mapsto A(x)$ est dérivable sur $]a, b[$, et sa dérivée vaut f :*

$$A'(x) = f(x) \qquad \forall x \in]a, b[\,.$$

Preuve: Fixons $x \in]a, b[$, et montrons que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x) \,.$$

D'abord, puisque $a < x < x + h$, la relation de Chasles entraîne

$$A(x+h) = A(x) + \int_x^{x+h} f(t)\, dt \,,$$

qui permet d'écrire

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \,.$$

Maintenant, le Théorème de la Moyenne, appliqué à l'intégrale du membre de droite de cette dernière égalité, garantit l'existence d'un $c_h \in]x, x+h[$ tel que

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c_h) \,.$$

Or lorsque $h \to 0^+$, on a $c_h \to x^+$, et comme f est continue en x cela donne

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f(c_h) = \lim_{c \to x^+} f(c) = f(x) \,.$$

On procède de même avec la limite $h \to 0^-$, pour montrer que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x) \,.$$

Ceci montre donc que $A'(x)$ existe et vaut $f(x)$. $\square$

Les fonctions qui, comme A, sont dérivables, et dont la dérivée vaut f, portent un nom :

Définition 12.24. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert. Une fonction F dérivable sur cet intervalle et telle que $F' = f$ est appelée une **primitive** de f.

Informel 12.25. En anglais, on utilise le terme "**antiderivative**", plus approprié puisqu'il exprime parfaitement la propriété qui définit F.

Exemple 12.26. Par exemple, $F(x) = x - \frac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x) = 1 - x^2$, puisque

$$F'(x) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)' = 1 - x^2 = f(x) \qquad \forall x\,.$$

Remarquons que $G(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi^2}{6}$ est *aussi* une primitive de $f(x)$, puisque la constante $\frac{\pi^2}{6}$ a une dérivée nulle, et donc $G'(x) = f(x)$. $\diamond$

On le voit dans ce dernier exemple : lorsqu'une fonction possède une primitive, elle en possède une infinité, puisqu'on peut toujours ajouter une constante arbitraire qui ne contribue pas à la dérivée.

Le lemme suivant a déjà été démontré précédemment (conséquence du Théorème des accroissements finis, **ici** (lien web)).

Lemme 29. *Soit I un intervalle ouvert, et soient $F, G : I \to \mathbb{R}$ deux primitives de f, alors il existe une constante C telle que*

$$F(x) = G(x) + C \quad \forall x \in I\,.$$

Avant de poursuivre, une conséquence de ce qui précède :

Lemme 30. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue.*

Preuve: La continuité en les points $x_0 \in]a, b[$ suit bien-sûr de la dérivabilité démontrée plus haut. Il reste donc à vérifier la continuité sur le bord. Pour démontrer la continuité à droite en a, on peut profiter du fait que f est bornée (puisqu'elle est continue) : il existe une constante C telle que$|f(t)| \leqslant C$ pour tout $t \in [a, b]$. Par conséquent,

$$|A(x)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^x |f(t)|\,dt \leqslant C\int_a^x dt = C|x-a|\,,$$

qui implique

$$\lim_{x\to a^+} A(x) = 0 = A(a)\,.$$

On montre de même que $\lim_{x\to b^-} A(x) = A(b)$. $\square$

12.5.3 Deuxième partie

Théorème 12.27. *(Théorème Fondamental, deuxième partie) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, et soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Parfois, on utilisera aussi la notation

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)\,.$$

Preuve: On sait que la fonction aire $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f. Donc, par le lemme précédent, il existe une constante C telle que $A(x) = F(x) + C$ pour tout $x \in]a, b[$. Par continuité, ceci implique aussi que $A(a) = F(a) + C$ et $A(b) = F(b) + C$. On trouve la valeur de C en remarquant que $A(a) = 0$, ce qui implique $C = -F(a)$. On a donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(b) = F(b) - F(a)\,.$$

□

Exemple 12.28. On a déjà vu une primitive de $f(x) = 1 - x^2$: $F(x) = x - \frac{x^3}{3}$. On peut donc recalculer l'aire sous la parabole d'Archimède :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (1 - x^2)\,dx &= F(1) - F(-1)\\ &= \Big(1 - \frac{1^3}{3}\Big) - \Big((-1) - \frac{(-1)^3}{3}\Big)\\ &= \frac{4}{3}\,.\end{aligned}$$

◇

Le Théorème Fondamental a montré que le calcul d'une intégrale peut, en principe, se réduire à un calcul de primitive. Or la recherche d'une primitive peut souvent représenter un travail considérable, même pour des fonctions simples.

Nous allons donc, après avoir dit quelques généralités, passer un certain temps à décrire quelques-unes de méthodes classiques de calcul de primitives, appelées aussi *méthodes d'intégration*.

12.6 Primitives élémentaires

Le Théorème Fondamental garantit que si une fonction $f(x)$ est continue sur un intervalle, alors elle possède *toujours* au moins une primitive, donnée par la fonction aire calculée entre un point a (quelconque dans I) et x :

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Nous savons aussi que si une fonction possède une primitive F alors elle en possède une infinité, puisque l'on peut toujours ajouter une constante arbitraire à F.

Remarque 12.29. Même si toute fonction continue possède une primitive, cela ne veut pas dire qu'on peut la calculer explicitement. Par exemple, la fonction

$$f(x) = e^{-x^2/2}$$

étant continue, elle possède une primitive. Mais on ne peut pas l'exprimer de façon simple. *Plus précisément, il n'est pas possible d'écrire sa primitive à l'aide d'une combinaison linéaire finie de produits ou compositions de fonctions élémentaires.* ◇

Définition 12.30. Soit f une fonction continue. On appelle **intégrale indéfinie de** f la famille de toutes ses primitives. On la notera :

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad F(x)+C\,,$$

Commençons par lister l'intégrale indéfinie des principales fonctions élémentaires :

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$
k (constante)	$kx+C$
x^α $(\alpha\neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$	$2\sqrt{x}+C$
$\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$	$\ln\lvert x\rvert+C$
e^x	e^x+C
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}+C$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert+C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\lvert x\rvert<1)$	$\mathrm{Arcsin}(x)+C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctg}(x)+C$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)+C$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)+C$
$\mathrm{th}(x)$	$\ln(\mathrm{ch}(x))+C$

12.6.1 Propriétés de l'intégrale indéfinie

Énonçons quelques-unes des propriétés élémentaires de l'intégrale indéfinie (on suppose partout que les fonctions intégrées sont continûment dérivables).

- ⋆ $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
- ⋆ $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- ⋆ $\displaystyle\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$
- ⋆ $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log|g(x)| + C$ (en supposant que $g(x) \neq 0$ sur l'intervalle considéré)

Beaucoup de primitives peuvent se calculer très simplement si elles concernent une fonction dans laquelle on peut observer une structure qui permet d'utiliser directement une des relations ci-dessus. Parfois, une petite manipulation peut être nécessaire avant l'intégration.

Exemple 12.31. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int xe^{-x^2/2}\,dx\,.$$

On observe qu'en posant $g(x) = -\frac{x^2}{2}$, on a $g'(x) = -x$. Donc, en insérant $1 = (-1)\cdot(-1)$, on fait apparaître $g'(x)$, et on utilise $\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$

$$\begin{aligned}\int xe^{-x^2/2}\,dx &= -\int (-x)e^{-x^2/2}\,dx\\ &= -\int e^{g(x)}g'(x)\,dx\\ &= -e^{g(x)} + C\\ &= -e^{-x^2/2} + C\end{aligned}$$

Dans la suite, on fera souvent ce genre d'opérations, sans forcément expliciter tous les détails. ◇

Exemple 12.32. À l'aide d'une opération semblable à celle de l'exemple précédent,

$$\int \frac{\log(x)}{x}\,dx = \int \log(x)(\log(x))'\,dx = \frac{1}{2}(\log(x))^2 + C\,.$$

◇

Exemple 12.33. Simplement à l'aide du logarithme,

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \log|1+x| + C\,.$$

Ensuite,

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\int \frac{-1}{1-x}\,dx = -\log|1-x| + C\,.$$

Ceci permet alors de calculer par exemple une primitive de la *fonction rationnelle* (un quotient de polynômes) suivante,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\Big)dx\\ &= \frac{1}{2}\log\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big| + C\end{aligned}$$

(Nous avons fait ci-dessus une *décomposition en éléments simples*, méthode sur laquelle nous reviendrons plus loin.) ◇

Lorsqu'on cherche des primitives impliquant des fonctions trigonométriques, on aura souvent recours à certaines formules trigonométriques.

Exemple 12.34. Considérons

$$\int \sin^2(x)\,dx\,.$$

En se rappelant la formule

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}\,,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\,dx &= \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx\\ &= \int \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{4}\int \cos(2x)(2x)'\,dx\\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C\,.\end{aligned}$$

◇

Le calcul de primitives plus compliquées, lorsqu'il est possible, requiert l'utilisation de *techniques d'intégration*, que nous verrons dans les sections suivantes.

Informel 12.35. Internet abonde de vidéos dans lesquelles des gens calculent des primitives, pendant des heures... Ces vidéos peuvent être utiles si on cherche des sources de problèmes plus difficiles/faciles. Par exemple **ici** (lien web) (attention : ces vidéos supposent connues les principales techniques d'intégration).

12.7 Intégration : par parties

Informel 12.36. Puisque la dérivée d'un produit n'est *pas* le produit des dérivées, il est clair que la primitive d'un produit n'est pas non plus le produit des primitives...

$$\int f(x)g(x)\,dx \neq \Big(\int f(x)\,dx\Big)\Big(\int g(x)\,dx\Big)\,.$$

Pourtant, si f (ou g) est une dérivée, on peut transformer $\int f(x)g(x)\,dx$ en une autre primitive.

Lemme 31. *(Formule d'intégration par parties) Soient f, g deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle. Alors*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

En version "intégrale définie" :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Preuve: On part de la règle de dérivation

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

Comme les fonctions de part et d'autre du "=" sont continues, on peut intégrer par rapport à x,

$$\underbrace{\int (f(x)g(x))'\,dx}_{=f(x)g(x)+C} = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

□

Informel 12.37. Pour utiliser la formule d'intégration par parties dans l'intégration d'un produit, il faut choisir quelle partie joue le rôle de "$f'(x)$" (la partie que l'on doit savoir intégrer), et quelle partie joue le rôle de "$g(x)$" (la partie que l'on doit dériver). On utilisera le symbole "↑" pour indiquer la partie qui sera intégrée, et "↓" pour celle qui sera dérivée :

$$\int \underbrace{f'(x)}_{\uparrow}\underbrace{g(x)}_{\downarrow}\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Voyons quelques exemples.

Exemple 12.38.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{\uparrow}\underbrace{\log(x)}_{\downarrow}\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x}{2}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4} + C\end{aligned}$$

◇

Parfois, il peut être nécessaire d'utiliser l'intégration par parties plus d'une fois :

Exemple 12.39.

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \underbrace{e^x}_{\uparrow} \underbrace{\sin(x)}_{\downarrow}\, dx \\
&= e^x \sin(x) - \int \underbrace{e^x}_{\uparrow} \underbrace{\cos(x)}_{\downarrow}\, dx \\
&= e^x \sin(x) - \Big\{ e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin(x))\, dx \Big\} \\
&= e^x \big\{ \sin(x) - \cos(x) \big\} - I(x)\,.
\end{aligned}
$$

Donc

$$I(x) = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + C\,.$$

◇

L'intégration par parties peut aussi être utile dans les cas où on n'a même pas deux "parties", simplement en écrivant que $1 = (x)'$:

Exemple 12.40.

$$
\begin{aligned}
\int \log(x)\, dx = \int \underbrace{1}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\log(x)}_{\downarrow}\, dx &= x\log(x) - \int x \frac{1}{x}\, dx \\
&= x\log(x) - x + C\,.
\end{aligned}
$$

◇

12.8 Intégration : changement de variable

Nous allons présenter le changement de variable pour l'intégrale définie. Ensuite, nous nous inspirerons de l'idée pour développer une méthode d'intégration pour l'intégrale indéfinie.

12.8.1 Changement de variable dans une intégrale définie

Théorème 12.41. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Soit aussi I un intervalle ouvert, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que*

$$\varphi(t) \in [a,b] \qquad \forall t \in [\alpha,\beta]\,.$$

Alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx$$

Preuve: Comme f est continue, on peut considérer une de ses primitives ; notons la F. Définissons $G : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ par

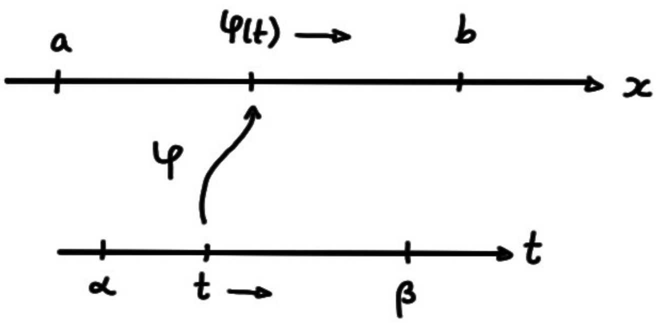
$$G(t) := F(\varphi(t))\,.$$

Alors G est continue sur $[\alpha, \beta]$, et dérivable sur $]\alpha, \beta[$, et $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. On a donc, en utilisant deux fois le Théorème Fondamental,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta G'(t)\,dt \\ &= G(\beta) - G(\alpha) \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Remarquons que ce calcul *utilise* l'existence de la primitive F, mais uniquement comme une étape de calcul. □

Ce résultat sera utilisé le plus souvent pour une fonction φ qui est *monotone* sur $[\alpha, \beta]$:



Par exemple, si φ est croissante, alors en posant $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, la formule du changement de variable devient

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Exemple 12.42. Calculons

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

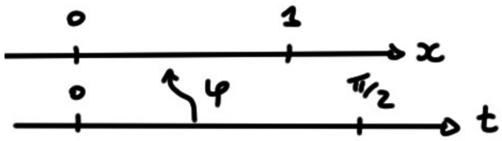
Géométriquement, cette intégrale représente l'aire d'un quart de disque de rayon 1 centré à l'origine. Donc on sait qu'elle doit valoir $\frac{\pi}{4}$; voyons comment l'obtenir par le calcul.

Idéalement, on aimerait un changement de variable qui fasse disparaître la racine.

a) On peut le faire à l'aide du changement de variable

$$x = \varphi(t) := \sin(t)\,, \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

qui satisfait les hypothèses du théorème puisque $\varphi(t) \in [0, 1]$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.



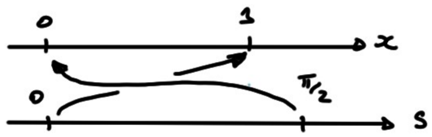
Comme φ est aussi croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$, la formule du changement de variable donne

$$\begin{aligned}
I = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt \\
&= \left\{\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right\}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

b) On aurait aussi pu poser

$$x = \varphi(t) := \cos(t)\,, \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]\,,$$

qui satisfait également $\varphi(t) \in [0,1]$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ici, φ est décroissante :



Mais comme $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$, la formule devient

$$\begin{aligned}
I = \int_{\varphi(\frac{\pi}{2})}^{\varphi(0)} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} |\sin(t)|(-\sin(t))\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,dt = \tfrac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

◇

12.8.2 Changement de variable dans une intégrale indéfinie

Attention : La vidéo ci-dessous s'écarte sensiblement du texte !

Décrivons une méthode d'intégration, inspirée de la formule du changement de variable vue plus haut. Mentionnons avant de commencer que cette méthode permet de calculer efficacement de nombreuses primitives, même si la présentation qui suit n'est pas tout à fait rigoureuse.

Soit f une fonction continue, dont on cherche une primitive F. Introduisons une autre variable t en posant

$$x = \varphi(t)\,,$$

où φ est une fonction de classe C^1. La primitive cherchée peut donc s'exprimer en fonction de la nouvelle variable :

$$F(x) = F(\varphi(t)) =: G(t)$$

Or $G(t)$ est primitive de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, puisque

$$G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,.$$

Pour connaître $F(x)$, on pourrait donc

a) Calculer $G(t)$, c'est-à-dire

$$G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

b) Si φ est inversible, obtenir F par

$$F(x) = G(t) = G(\varphi^{-1}(x))\,.$$

On écrit la relation $F(x) = G(t)$, parfois, par abus de notation,

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Exemple 12.43. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \sin(2x)\,dx\,.$$

On aimerait que $2x = t$ donc on pose $x := \varphi(t) = \frac{t}{2}$. On commence par calculer

$$G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int \sin(t)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(t) + C$$

puis on inverse :

$$F(x) = G(\varphi^{-1}(x)) = G(2x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C\,.$$

◇

Exemple 12.44. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx\,.$$

Posons $x+1=t$, c'est-à-dire $x=\varphi(t):=t-1$. On commence donc par calculer

$$\begin{aligned}G(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt&=\int\frac{t-1}{t}\,dt\\&=\int\{1-\tfrac{1}{t}\}\,dt\\&=t-\log|t|+C\,,\end{aligned}$$

puis on inverse pour obtenir

$$F(x)=G(\varphi^{-1}(x))=(x+1)-\log|x+1|+C\,.$$

Si écrit les choses de façon plus compacte :

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{x+1}\,dx=\int\frac{t-1}{t}\,dt&=\int\Big(1-\frac{1}{t}\Big)\,dt\\&=t-\log|t|+C\\&=(x+1)-\log|x+1|+C\end{aligned}$$

◇

Sur la fin de ce dernier exemple, on voit que l'on peut aisément se passer de la mention explicite des fonctions φ, G et F ; ce qu'on fera dans le prochain exemple.

Exemple 12.45. Considérons la primitive (en supposant bien-sûr que $x>0$)

$$\int\frac{dx}{x+x\log(x)^2}\,.$$

On se souvient que $(\log(x))'=\frac{1}{x}$, on peut donc poser $t=\log(x)$, qui donne

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x+x\log(x)^2}&=\int\frac{1}{1+\log(x)^2}\frac{dx}{x}\\&=\int\frac{1}{1+t^2}dt\\&=\arctan(t)+C\\&=\arctan(\log(x))+C\,.\end{aligned}$$

◇

12.8.3 Changements de variables de types trigonométrique ou hyperbolique

Dans cette section, on considère des changements de variable dont le but est d'intégrer des fonctions contenant des termes d'un des trois types suivants :

$$\sqrt{a^2-b^2x^2}\,,\quad\sqrt{a^2+b^2x^2}\,,\quad\sqrt{a^2x^2-b^2}\,.$$

Informel 12.46. Puisque toutes les primitives considérées ici sont du type

$$\int \sqrt{f(x)}\,dx$$

l'idée sera de transformer ce qui est dans la racine en un **carré parfait**, de façon à faire disparaître cette racine :

$$\int \sqrt{f(x)}\,dx = \int \sqrt{g(x)^2}\,dx = \int |g(x)|\,dx\,.$$

Exemple 12.47. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Remarquons qu'ici, la fonction intégrée est définie pour $x \in [-1,1]$. Comme dans le cas du changement de variable pour l'intégrale définie, on aimerait ne plus avoir de racine, et donc pouvoir écrire "$1-x^2$" comme un carré. Une identité qui réalise ce qu'on veut est la suivante :

$$\boxed{1-(\cos(t))^2 = (\sin(t))^2\,.}$$

On peut donc essayer de poser

$$x = \varphi(t) := \cos(t)\,, \qquad \text{avec } t \in [0,\pi]\,.$$

Alors $\varphi : [0,\pi] \to [-1,1]$ est continûment dérivable sur $]0,\pi[$, inversible, avec $\varphi^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$ donnée par $\varphi^{-1}(x) = \arccos(x)$. On a donc

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt \\ &= -\int \sin^2(t)\,dt \\ &= -\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) + C\,, \end{aligned}$$

et en utilisant $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$,

$$\begin{aligned} F(x) &= G(\varphi^{-1}(x)) \\ &= -\frac{1}{2}\arccos(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arccos(x)) + C \\ &= -\frac{1}{2}\arccos(x) + \frac{1}{4}2\sin(\arccos(x))\underbrace{\cos(\arccos(x))}_{=x} + C \\ &= -\frac{1}{2}\arccos(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C\,. \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a utilisé le fait que $\sin(z) \geqslant 0$ si $z \in [0,\pi]$, et donc

$$\begin{aligned} \sin(\arccos(x)) &= \sqrt{\sin(\arccos(x))^2} \\ &= \sqrt{1-\cos(\arccos(x))^2} \\ &= \sqrt{1-x^2}\,. \end{aligned}$$

Si on avait posé $x = \sin(t)$? Les calculs changent un tout petit peu, mais le cheminement est exactement le même. Détails **ici** (lien web). $\diamond$

Ce qu'il faut garder du dernier exemple :

Informel 12.48. À retenir : si la fonction à intégrer contient un terme de la forme

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2}\,,$$

on pourra essayer un changement de variable du type

$$x = \frac{a}{b}\cos(t) \qquad (\text{ou } x = \frac{a}{b}\sin(t))\,.$$

Exemple 12.49. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Encore une fois, $x \in [-1, 1]$. Si on pose

$$x = \varphi(t) := \cos(t)\,, \qquad \text{avec } t \in [0, \pi],$$

on obtient

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \varphi(t)^3\sqrt{1-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,dt \\ &= -\int \cos^3(t)\sin^2(t)\,dt \\ &= -\int \sin^2(t)(1-\sin^2(t))\cos(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

La présence du $\cos(t)$, qui est la dérivée du $\sin(t)$, suggère de faire un deuxième changement de variable, en posant

$$\sin(t) = u\,,$$

qui réduit le problème à l'intégration d'un polynôme en u :

$$\begin{aligned} \int \sin^2(t)(1-\sin^2(t))\cos(t)\,dt &= \int u^2(1-u^2)\,du \\ &= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C \\ &= \frac{(\sin(t))^3}{3} - \frac{(\sin(t))^5}{5} + C\,. \end{aligned}$$

Comme $\sin(t) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$,

$$F(x) = G(\arccos(x)) = -\frac{\sqrt{1-x^2}^3}{3} + \frac{\sqrt{1-x^2}^5}{5} + C\,.$$

$\diamond$

Remarque 12.50. Dans ce dernier exemple, on voit comme l'allure de la fonction intégrée suggère d'elle-même un bon changement de variable.

Bien-sûr, on aurait évité de faire deux changements de variables si on avait tout de suite posé

$$x = \cos(\arcsin(u)) = \sqrt{1-u^2}\,.$$

Mais ce choix ne semble pas forcément le plus naturel à première vue... ◇

Exemple 12.51. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx\,.$$

Ici, on peut s'inspirer de la relation

$$\boxed{1+(\sinh(t))^2 = (\cosh(t))^2\,,}$$

poser

$$x := \sinh(t)\,,$$

et obtenir

$$\boxed{\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{argsinh}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C}$$

Voir la vidéo ci-dessus pour les détails. (Il existe d'autres façons de traiter cette primitive : **Michael Penn** (lien web) ou **blackpenredpen** (lien web)). ◇

Informel 12.52. À retenir : si la fonction à intégrer contient un terme de la forme

$$\sqrt{a^2+b^2x^2}\,,$$

on pourra essayer le changement de variable

$$x = \frac{a}{b}\sinh(t)\,.$$

Exemple 12.53. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx \qquad |x| \geqslant 1\,.$$

Si on utilise à nouveau la relation

$$\boxed{(\cosh(t))^2 - 1 = (\sinh(t))^2\,,}$$

on est mené à poser

$$x := \cosh(t)\,.$$

On trouve :

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{argcosh}(x) + C & \text{si } x \geqslant +1\,, \\ \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\operatorname{argcosh}(x) + C & \text{si } x \leqslant -1\,. \end{cases}}$$

(Voir vidéo) ◇

Informel 12.54. À retenir : si la fonction à intégrer contient un terme de la forme

$$\sqrt{b^2x^2 - a^2}\,,$$

on pourra essayer le changement de variable

$$x = \frac{a}{b}\cosh(t)\,.$$

12.9 Intégration : fonctions rationnelles

Dans cette section nous étudierons des primitives de la forme

$$\int \frac{P(x)}{M(x)}\,dx\,,$$

où P et M sont des polynômes. Bien qu'il existe une théorie générale, comportant une composante algébrique qui n'a pas sa place dans ce cours, nous présenterons plutôt les idées principales, et verrons comment les implémenter sur les exemples les plus importants.

Informel 12.55. Comme on le verra, on pourra très souvent "casser" le quotient $\frac{P(x)}{M(x)}$ en une somme de plusieurs morceaux, dans le but de toujours se ramener à une des intégrales simples suivantes :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\,dx &= \log|x| + C \\
\int \frac{1}{x^n}\,dx &= \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C \qquad (n \neq 1) \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan(x) + C\,, \\
\int \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C\,.
\end{aligned}$$

12.9.1 Structure générale

Considérons un quotient $\frac{P(x)}{M(x)}$, où $P(x)$ est de degré p et $M(x)$ est de degré m :

$$\deg(P) = p\,, \qquad \deg(M) = m\,.$$

Ceci signifie que

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p\,, \\
M(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m\,,
\end{aligned}$$

où $a_p \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

Il est naturel de distinguer deux cas :

12.9.2 Le cas $p \geqslant m$

Lorsque $p \geqslant m$, on peut tout de suite faire la division polynomiale de $P(x)$ par $M(x)$. On obtient alors quelque chose comme

$$\frac{P(x)}{M(x)} = \underbrace{a(x)}_{\text{OK}} + \frac{r(x)}{M(x)}\,,$$

où $a(x)$ est un polynôme (donc facile à intégrer), et $r(x)$ est aussi un polynôme, appelé le **reste** de la division, qui ne se laisse pas diviser par $M(x)$ puisque son degré $\deg(r) < \deg(M)$.

Exemple 12.56. Considérons

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\,.$$

Ici, $\deg(P) = 3 > 2 = \deg(M)$, donc on peut faire la division polynomiale de $P(x)$ par $M(x)$, puis intégrer le résultat :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx &= \int \Big\{ \underbrace{x}_{a(x)} + \underbrace{\frac{-x}{x^2+1}}_{\frac{r(x)}{M(x)}} \Big\}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(Dans la dernière ligne, on a utilisé $u = x^2+1$.) $\diamond$

En général, la partie "difficile" est bien-sûr dans l'intégration du deuxième terme $\frac{r(x)}{M(x)}$, c'est pourquoi on passera plus de temps sur le cas où le degré du numérateur est plus petit que celui du dénominateur.

12.9.3 Le cas $p < m$

Dans ce deuxième cas, plus difficile, nous devrons regarder de plus près le le polynôme $M(x)$.

Avant de passer à l'approche utilisée dans le cas général, considérons les cas très importants des valeurs petites de m. Plus précisément, les cas $m \leqslant 2$, que l'on sait déjà traiter par les méthodes élémentaires vues précédemment.

$\underline{m = 1}$: Le cas le plus simples est celui où $m = 1$, qui force $p = 0$. On est donc dans le cas où P est une constante, $P(x) = K$, et M est un polynôme de degré 1. Ceci ne pose aucun problème du point de vue de l'intégration :

$$\int \frac{K}{ax+b}\,dx = \frac{K}{a}\log|ax+b| + C\,.$$

$\underline{m = 2}$: Si $m = 2$, M est un polynôme de degré 2 :

$$M(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2\,,$$

où $b_2 \neq 0$. Dans ce cas, le procédé d'intégration dépendra alors du signe du discriminant,

$$\Delta = b_1^2 - 4b_0b_2\,,$$

ainsi que du polynôme P, qui peut être soit une constante (si $p = 0$), soit un polynôme de degré 1 (si $p = 1$).

Commençons par le cas où $\Delta \leqslant 0$, en considérant des exemples :

Exemple 12.57. ($\Delta < 0$, $p = 0$)

$$\int \frac{K}{\underbrace{x^2+2}_{\Delta<0!}}\,dx = \frac{K}{2}\int \frac{dx}{(x/\sqrt{2})^2+1} = \frac{K}{\sqrt{2}}\arctan(x/\sqrt{2}) + C$$

(Dans la dernière ligne : $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$.) $\diamond$

Exemple 12.58. ($\Delta < 0$, $p = 0$) Lorsque $\Delta < 0$ et que $M(x)$ contient un terme en x, on pourra *compléter le carré* pour se ramener au cas traité dans l'exemple précédent :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\underbrace{x^2+2x+3}_{\Delta<0!}} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2+2}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\Big(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\Big) + C\end{aligned}$$

(Dans la dernière ligne : $u = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$.) $\diamond$

Exemple 12.59. ($\Delta < 0$, $p = 1$) Si $P(x) = \alpha x + \beta$, on peut simplement séparer le quotient en deux parties, que l'on intègre individuellement :

$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha x+\beta}{\underbrace{x^2+1}_{\Delta<0!}}\,dx &= \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \beta\int\frac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{\alpha}{2}\log(x^2+1) + \beta\arctan(x) + C\,.\end{aligned}$$

(Dans la dernière ligne : $u = x^2 + 1$.) $\diamond$

Exemple 12.60. ($\Delta = 0$)

$$\int \frac{1}{\underbrace{x^2-4x+4}_{\Delta=0}}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \frac{-1}{x-2} + C\,.$$

$\diamond$

Tournons-nous maintenant vers le cas $\Delta > 0$; dans ce cas, la grande différence est bien-sûr que $M(x)$ possède deux racines, et peut se *factoriser*. C'est alors qu'on peut *décomposer* le quotient $\frac{P(x)}{M(x)}$ en une somme de quotients plus simples ; on appelle cette procédure *la décomposition en éléments simples*.

12.9.4 Décomposition en éléments simples : exemples

Commençons par un exemple élémentaire, toujours dans le cas $m = 2$. Comme il contient les idées principales que nous utiliserons par la suite, nous le traiterons assez en longueur...

Exemple 12.61. ($\Delta > 0$, $p = 0$) Considérons

$$\int \underbrace{\frac{dx}{1-x^2}}_{\Delta>0!}$$

Comme les racines de $M(x)$ sont $+1$ et -1, sa factorisation permet d'écrire

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,.$$

Informel 12.62. Hélas, l'intégration d'un produit n'est pas égale au produit des intégrations...

$$\int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx \neq \Big(\int \frac{1}{1-x}\,dx\Big)\Big(\int \frac{1}{1+x}\,dx\Big)$$

Aussi, on voit vite que l'intégration par parties n'est pas de grande utilité. Donc on aimerait quand-même bien pouvoir se ramener à l'intégration des deux fractions plus simples $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$! Et comme l'intégration d'une somme est égale à la somme des intégrations, on peut essayer autre chose...

L'idée de la décomposition en éléments simples est d'essayer de trouver des constantes A et B telles que

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \qquad \forall x \notin \{\pm 1\}\,.$$

Attention : les constantes doivent être telles que cette dernière égalité soit vraie *pour tout x différent de* 1 *et* -1. Voyons comment rendre cette restriction plus explicite.

Si on met au même dénominateur du côté droit,

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A(1+x)+B(1-x)}{(1-x)(1+x)} \qquad \forall x \notin \{\pm 1\}\,,$$

et comme les dénominateurs sont les mêmes, il reste

$$1 = A(1+x) + B(1-x) \qquad \forall x \notin \{\pm 1\}\,,$$

qui est équivalent à

$$(A-B)x + (A+B-1) = 0 \qquad \forall x \notin \{\pm 1\}\,.$$

Mais encore, en définissant temporairement le polynôme

$$Q(x) := (A-B)x + (A+B-1)\,,$$

on peut récrire notre condition comme

$$Q(x) = 0 \qquad \forall x \notin \{\pm 1\}\,.$$

Puisque $Q(x)$ est continu, cette condition est équivalente à

$$Q(x) = 0 \qquad \forall x\,.$$

$Q(x)$ représente l'équation d'une droite. Donc si cette droite est nulle partout, il faut bien que sa pente et son ordonnée à l'origine soient toutes les deux nulles. Ainsi, les constantes A et B doivent nécessairement satisfaire simultanément aux conditions $A - B = 0$, $A + B - 1 = 0$, que l'on peut écrire sous forme d'un système en A et B :

$$\begin{cases} A - B &= 0 \\ A + B &= 1\,. \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution, donnée par $A = B = \frac{1}{2}$. On a donc montré que

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1-x} \quad \forall x \notin \{\pm 1\}\,,$$

qui est ce qu'on appelle une **décomposition en éléments simples**.

Du point de vue de l'intégration, le problème devient alors très simple :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\log|1-x| + \frac{1}{2}\log|1+x| + C \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \end{aligned}$$

◇

12.9.5 Lorsque $\deg(M) > 2$

Lorsque le degré de M est supérieur à 2, on commencera par le factoriser autant que possible. Grâce au résultat suivant, démontré dans le chapitre sur les nombres complexes, cette factorisation contiendra toujours des morceaux de degré 2 au plus.

Corollaire 12. *(Factorisation de polynômes à coefficients réels) Tout polynôme réel peut se factoriser en un produit de polynômes de degré 1 ou 2, à coefficients réels eux aussi.*

Une fois la factorisation de M connue, on devra sélectionner un bon choix de décomposition en éléments simples, puis identifier les coefficients d'un polynôme qui doit s'annuler en tout $x \in \mathbb{R}$. On aura souvent recours au théorème suivant :

Théorème 12.63. *Si un polynôme*

$$Q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n$$

s'annule en tout $x \in \mathbb{R}$, c'est que ses coefficients sont tous nuls :

$$q_0 = q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0\,.$$

Preuve: Clairement, si Q s'annule partout il s'annule en particulier en $x = 0$, ce qui implique $q_0 = 0$. Mais aussi, si Q s'annulle partout alors sa dérivée s'annulle partout. Puisque cette dérivée

$$Q'(x) = q_1 + 2q_2 x + \cdots + nq_n x^{n-1}$$

s'annulle partout, elle s'annule en particulier en $x = 0$, ce qui donne $q_1 = 0$. Par récurrence, on démontre donc que tous les coefficients sont nuls :

$$q_0 = q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0\,.$$

□

Voyons ça sur des exemples.

Exemple 12.64. Considérons

$$\int \frac{1}{x^3 + x}\,dx$$

La factorisation de $M(x)$ est donnée par

$$M(x) = x(x^2 + 1)\,.$$

Ici, une bonne décomposition est

$$\boxed{\frac{1}{x\underbrace{(x^2+1)}_{\Delta<0}} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \qquad x \neq 0}$$

En mettant au même dénominateur et en égalant les numérateurs, on arrive à

$$Q(x) := (A + B)x^2 + Cx + (A - 1) = 0 \qquad \forall x \neq 0$$

Par le théorème, tous les coefficients doivent être nuls, ce qui donne le système

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ C &= 0 \\ A &= 1\,. \end{cases}$$

On trouve donc $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, ce qui permet d'intégrer :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^2+1)} &= \int \left\{ \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2 + 1} \right\} dx \\ &= \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2 + 1) + C \end{aligned}$$

◇

Exemple 12.65. Considérons

$$\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}\,dx$$

Factorisons le dénominateur :

$$\frac{1}{x^3+2x^2+x} = \frac{1}{x(x^2+2x+1)} = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

Puisqu'ici la factorisation de M contient une *puissance* "2", dans le terme $(x+1)^2$, la bonne décomposition inclut des répétitions :

$$\boxed{\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \qquad \forall x \notin \{0,-1\}}$$

On trouve $A=1$, $B_1=-1$, $B_2=-1$, et donc

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x} &= \int \left\{ \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} \right\} dx\\ &= \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + C\end{aligned}$$

◇

Remarque 12.66. Si il y a quelque chose au numérateur, on le laisse (tant que son degré est inférieur à ce qu'il y a au dénominateur), et il participe juste au polynôme dont on égale tous les coefficients à zéro ! Par exmple :

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{(1+x^2)^2}$$

◇

Exemple 12.67. Calculons

$$\int \frac{dx}{x^4+1}\,.$$

◇

Dans la pratique, on peut tomber sur une décomposition en éléments simple dans des situations qui n'ont apparemment rien à voir avec des quotients de polynômes, typiquement après un changement de variable :

Exemple 12.68. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{\tan(x)}\,dx\,.$$

En posant $u = \sqrt{\tan(x)}$, qui donne $dx = \frac{2u}{u^4+1}\,du$, on est amené à

$$2\int \frac{u^2}{u^4+1}\,du\,.$$

On peut alors factoriser u^4+1 (voir la section sur la factorisation des polynômes, dans le chapitre sur les nombres complexes), puis effectuer une décomposition en éléments simples. (Pour les détails, voir **ici** (lien web), ou alors une autre façon de faire **ici** (lien web)). ◇

Si on veut d'autres exemples de comment utiliser (ou comment de *pas* utiliser) des décomposition en éléments simples, cliquer **ici (blackpenredpen)** (lien web).