
Chapitre 6

Fonctions réelles

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, on commence l'étude des *fonctions réelles d'une variable*. Les notions de base relatives à ces fonctions (injectivité, surjectivité, bijectivité, graphe) se trouvent [ici](#) (lien web).

Nous commencerons, dans ce chapitre, par décrire brièvement certaines propriétés particulières qu'une fonction peut posséder (monotonie, parité, périodicité), et introduirons les notions de minimum/maximum ainsi que d'infimum/supremum.

Les notions de *limite* associées à une fonction réelle, puis celles de *continuité*, *dérivabilité* et *intégrabilité* feront l'objet de toute la suite du cours.

6.2 Monotonie

Une première propriété très particulière qu'une fonction peut posséder est celle d'être *monotone*.

Définition 6.1. $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) f est **croissante sur** I si $f(x) \leq f(x')$ pour tout $x, x' \in I, x < x'$.
- b) f est **strictement croissante sur** I si $f(x) < f(x')$ pour tout $x, x' \in I, x < x'$.
- c) f est **décroissante sur** I si $f(x) \geq f(x')$ pour tout $x, x' \in I, x < x'$.
- d) f est **strictement décroissante sur** I si $f(x) > f(x')$ pour tout $x, x' \in I, x < x'$.

Si f satisfait une de ces propriétés, elle est **monotone**.

Remarque 6.2. Par cette définition, une fonction qui est **constante sur** I (c.à-d. d qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = C$ pour tout $x \in I$) est à la fois croissante et décroissante sur I . \diamond

Exemple 6.3. La fonction $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . En effet, si $0 \leq x < x'$,

$$f(x') - f(x) = x'^2 - x^2 = \underbrace{(x' - x)}_{>0} \underbrace{(x' + x)}_{>0} > 0,$$

ce qui implique que $f(x) < f(x')$. De même, on montre que $f(x) = x^2$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_- . \diamond

6.2.1 Variation

Étudier la **variation** d'une fonction, c'est trouver les intervalles sur lesquelles elle est croissante/décroissante.

L'étude de la variation d'une fonction donnée, basée uniquement sur la *définition* de cette fonction (comme x^2 dans l'exemple ci-dessus), peut être difficile. Le *calcul différentiel*, que nous développerons plus loin, fournira un outil puissant permettant de faire cette analyse.

6.3 Parité

Une autre propriété qu'une fonction peut posséder est par rapport à son comportement vis-à-vis de la transformation $x \mapsto -x$.

Ci-dessous, on considère des fonctions dont le domaine $D \subset \mathbb{R}$ est **symétrique** c'est-à-dire que si $x \in D$, alors $-x \in D$.

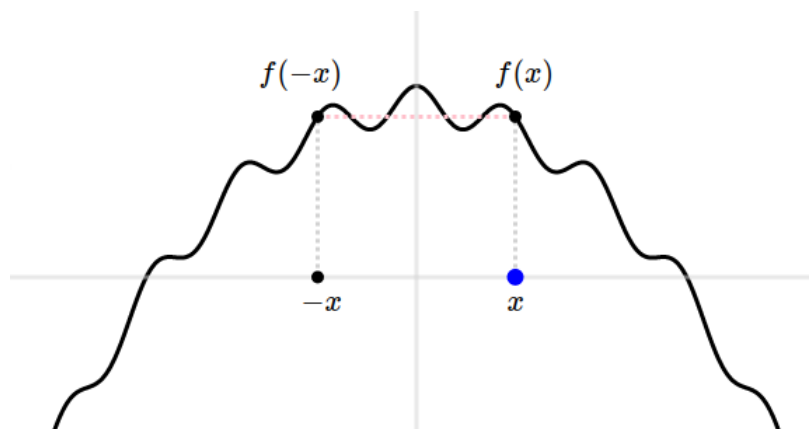
Définition 6.4. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **paire** si

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Si le point $(x, y) = (x, f(x))$ appartient au graphe de f , alors le point

$$(-x, f(-x)) = (-x, f(x)) = (-x, y)$$

appartient aussi au graphe de f . On conclut que le graphe d'une fonction paire est *invariant sous l'effet d'une réflexion par rapport à l'axe Oy* .



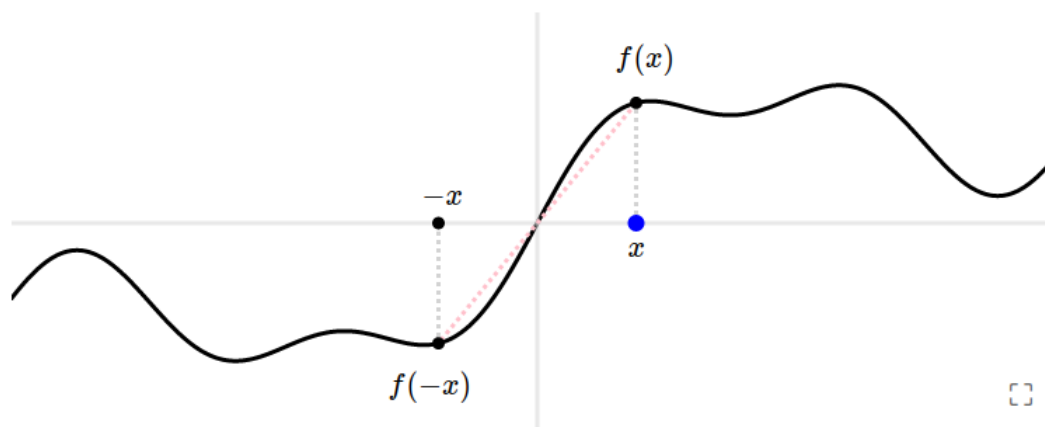
Définition 6.5. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **impaire** si

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D.$$

Si le point $(x, y) = (x, f(x))$ appartient au graphe, alors le point

$$(-x, f(-x)) = (-x, -f(x)) = (-x, -y)$$

appartient aussi au graphe de f . Donc le graphe d'une fonction impaire est *invariant sous une rotation de 180° autour de l'origine* :



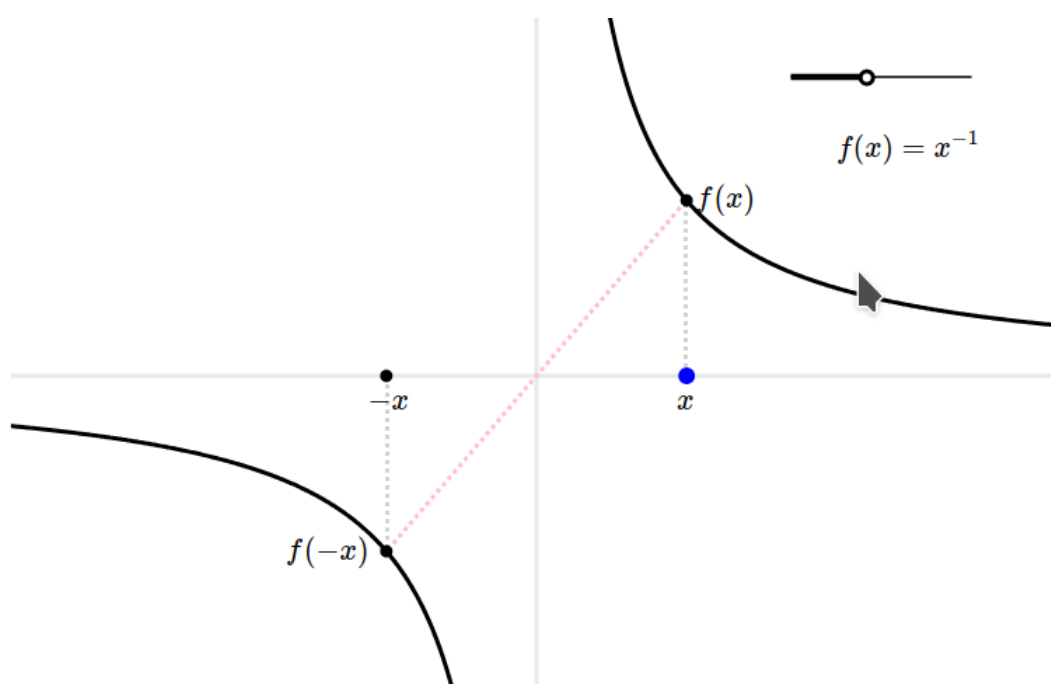
Exemple 6.6. Décrivons l'exemple qui est à l'origine de la dénomination de fonction "paire" ou "impaire". Pour un entier $p \in \mathbb{Z}$, la fonction

$$f(x) = x^p$$

est

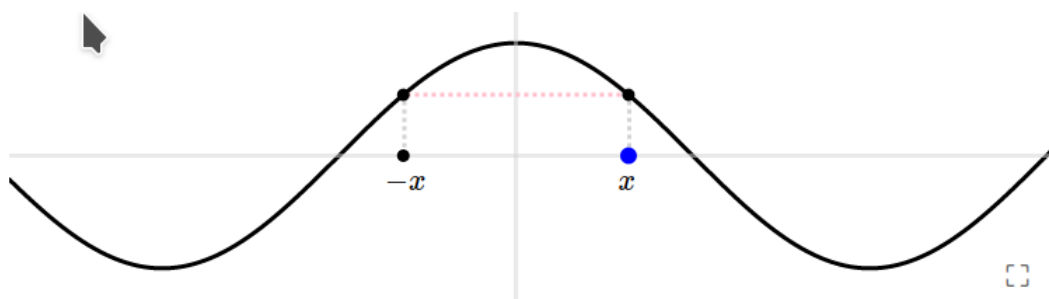
- * paire si p est pair,
- * impaire si p est impair.

Remarquons que si p est négatif, alors 0 ne fait pas partie du domaine de f .

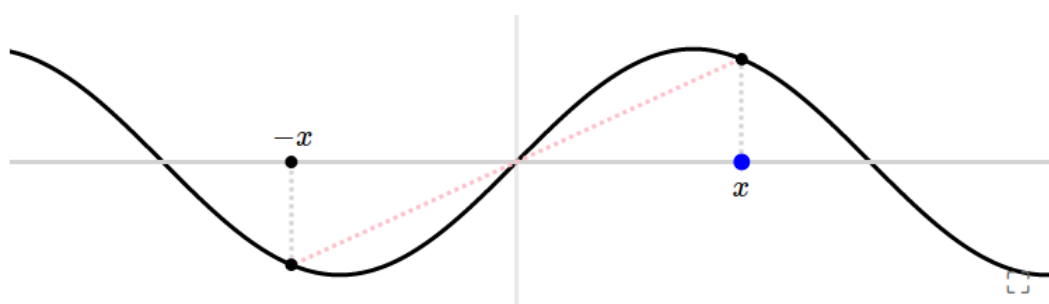


◇

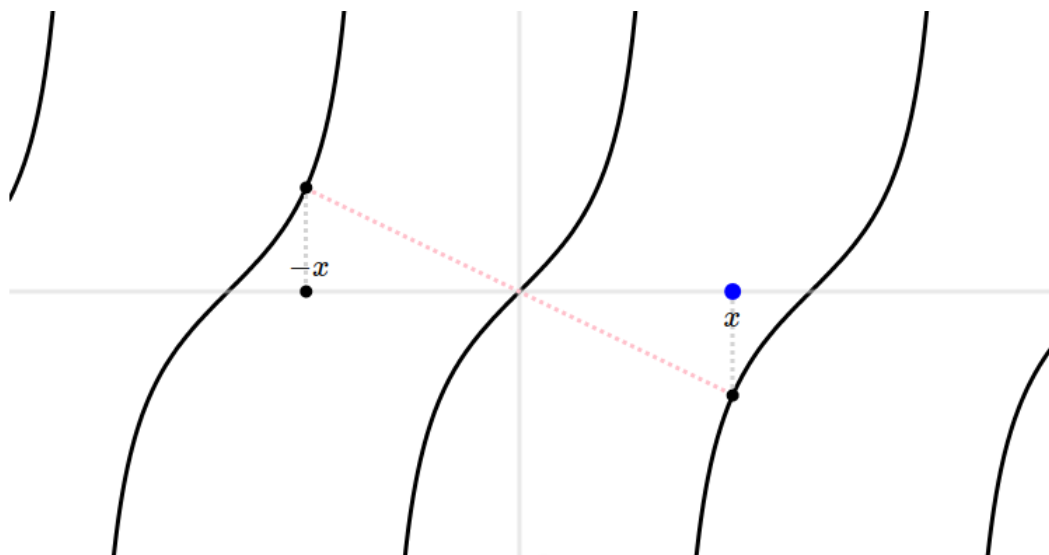
Exemple 6.7. Sur $D = \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ est paire,



et $x \mapsto \sin(x)$ est impaire,



Sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $x \mapsto \tan(x)$ est impaire :



En effet,

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

◇

Exemple 6.8. Montrons que la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{e^x - e^{-x}}$$

est paire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \frac{\sin(2(-x))}{e^{-x} - e^{-(-x)}} = \frac{-\sin(2x)}{-(e^x - e^{-x})} = \frac{\sin(2x)}{e^x - e^{-x}} = f(x).$$

◇

Pour montrer qu'une fonction n'est pas paire (resp. pas impaire), il suffit de trouver un point x_* de son domaine où $f(-x_*) \neq f(x_*)$ (resp. $f(-x_*) \neq -f(x_*)$).

Exemple 6.9. Considérons, sur \mathbb{R} , la fonction $f(x) = x + 1$. On remarque que $f(-1) = 0$ et $f(1) = 2$, et donc $f(-1) \neq f(1)$, et donc f n'est pas paire. Et comme $f(-1) \neq -f(1)$, f n'est pas impaire non plus. ◇

Une fonction, en général, n'a pas de raison d'être paire ou impaire; pourtant toute fonction contient un peu d'une fonction paire, et un peu d'une fonction impaire :

Lemme 16. Si D est symétrique, toute fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire, de manière unique, comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Preuve: Cherchons à écrire $f(x) = p(x) + i(x)$, où $p(x)$ est paire et $i(x)$ est impaire. On doit donc avoir

$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x),$$

et donc $i(x)$ et $p(x)$ doivent satisfaire

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + i(x) \\ f(-x) &= p(x) - i(x). \end{aligned}$$

Ce petit système linéaire se résout facilement. Sa solution est unique, et donnée par

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

□

Exemple 6.10. Sur \mathbb{R} , $f(x) = e^x$ n'est ni paire ni impaire, mais on peut quand-même l'écrire $e^x = p(x) + i(x)$, où

$$p(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

est paire, et

$$i(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

est impaire. (Pour les fonctions hyperboliques, voir [ici](#) (lien web).) ◇

6.4 Périodicité

Définition 6.11. Soit $t > 0$; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite t -**périodique** si

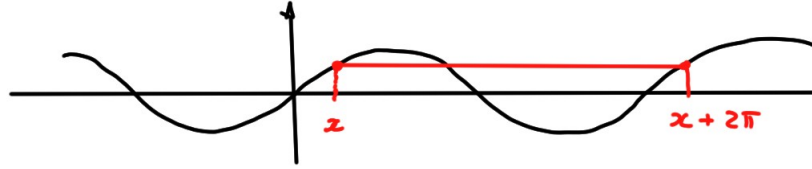
$$f(x + t) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si il existe un $t > 0$ minimal jouissant de cette propriété, on l'appelle **période de f** , et on le note $T > 0$.

6.4. Périodicité

Remarque 6.12. Si f est t -périodique, elle est aussi $\pm 2t$ -périodique, $\pm 3t$ -périodique, etc. \diamond

Exemple 6.13. $f(x) = \sin(x)$ est périodique, de période $T = 2\pi$:



$f(x) = \cos(x)$ est périodique, de période $T = 2\pi$. \diamond

Exemple 6.14. $f(x) = \tan(x)$ (sur son domaine) est π -périodique car

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x).$$

\diamond

Exemple 6.15. Considérons une fonction constante : $f(x) = C$. On a bien $f(x + t) = f(x)$ pour tout x et tout $t > 0$, donc f est t -périodique pour tout $t > 0$. Mais comme il n'existe pas de *plus petit t strictement positif* avec cette propriété, la fonction n'a pas de "période" à proprement parler. \diamond

Exemple 6.16. Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrons que si $t \in \mathbb{Q}$ est un rationnel quelconque, alors f est t -périodique. En effet, prenons un $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) = 1$, et comme $x + t \in \mathbb{Q}$, on a aussi $f(x + t) = 1$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $f(x) = 0$, et comme $x + t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a aussi $f(x + t) = 0$. Dans tous les cas, $f(x + t) = f(x)$.

Ici aussi, comme il n'existe pas de "plus petit rationnel $t > 0$ ", f n'a pas de période. \diamond

Remarquons qu'en général, *la somme de deux fonctions périodiques n'est pas forcément périodique!*

Exemple 6.17. $f(x) = \sin(2\pi x)$ est périodique, de période $T_f = 1$, et $g(x) = \sin(\sqrt{2}\pi x)$ est périodique, de période $T_g = \sqrt{2}$. Par contre, $f + g$ n'est pas périodique, puisque $\sqrt{2}$ étant irrationnel, aucun multiple de T_g ne coïncidera avec un multiple de T_f . \diamond

On peut garantir que $f + g$ est aussi périodique, mais en imposant une condition particulière sur T_f et T_g :

Lemme 17. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique, de période T_f , et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique, de période T_g . Si $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$, alors $f + g$ et $f - g$ sont périodiques.

Preuve: Si $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$, il existe deux entiers p, q tels que $\frac{T_f}{T_g} = \frac{p}{q}$. Ceci signifie que $qT_f = pT_g$. Ceci implique que si on définit $\tilde{t} = qT_f$, alors pour tout x ,

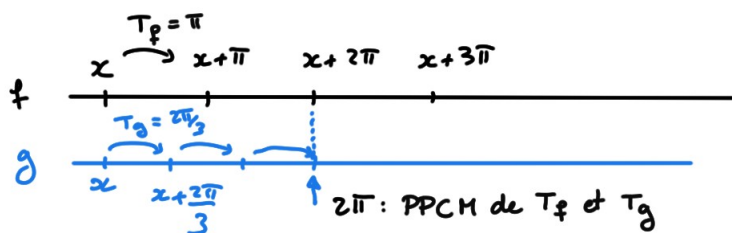
$$\begin{aligned}(f \pm g)(x + \tilde{t}) &= f(x + \tilde{t}) \pm g(x + \tilde{t}) = f(x + qT_f) \pm g(x + qT_f) \\ &= \underbrace{f(x + qT_f)}_{=f(x)} \pm \underbrace{g(x + pT_g)}_{=g(x)} \\ &= (f \pm g)(x),\end{aligned}$$

ce qui implique que $f \pm g$ est périodique. \square

Exemple 6.18. La fonction $f(x) = \sin^2(x)$ a pour période $T_f = \pi$, et $g(x) = \cos(3x)$ a pour période $T_g = \frac{2\pi}{3}$. Comme

$$\frac{T_f}{T_g} = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q},$$

on conclut par le lemme que $f+g$ et $f-g$ sont périodiques. Mais comment calculer les périodes de ces fonctions ?



En cherchant le plus petit multiple commun entre les périodes de f et g :

$$T_{f \pm g} = \text{ppmc}(T_f, T_g) = 2\pi.$$

\diamond

6.5 Max/min, sup/inf de fonctions

6.5.1 Maximum, minimum

Remarque 6.19. Attention : dans la vidéo ci-dessus, préparée pour un autre cours, on mentionne la notion de *continuité*, qui n'apparaîtra que dans un chapitre ultérieur. \diamond

Dans un problème d'*optimisation*, il s'agit de savoir si une fonction possède, sur son domaine, des points où sa valeur est plus grande (ou plus petite) que partout ailleurs :

Définition 6.20. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que

★ f possède un **maximum (global)** si il existe $x^* \in D$ tel que

$$f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in D.$$

On dit que le **maximum de f est réalisé/atteint en x^*** , et on écrit

$$\max_{x \in D} f(x) = f(x^*).$$

★ f possède un **minimum (global)** si il existe $x_* \in D$ tel que

$$f(x) \geq f(x_*) \quad \forall x \in D.$$

On dit que le **minimum de f est réalisé/atteint en x_*** , et on écrit

$$\min_{x \in D} f(x) = f(x_*).$$

(JSX en construction ici)

Remarque 6.21. On parle de maximum/minimum *global* parce qu'on introduira plus loin la notion de maximum/minimum *local*. \diamond

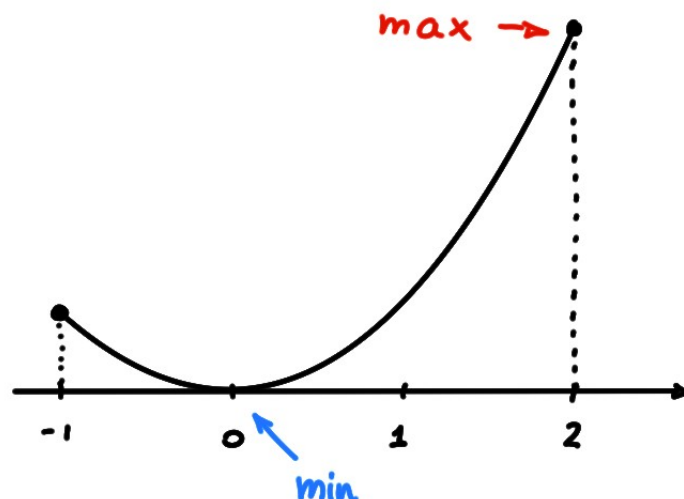
Informel 6.22. Attention : le point x^* (ou x_*), s'il existe, doit être dans le domaine de la fonction!

En général, l'existence d'un minimum et d'un maximum n'est pas garantie; elle dépend de la fonction mais aussi de son domaine.

Exemple 6.23.

$$f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

atteint son minimum en $x_* = 0$, et son maximum en $x^* = 2$:



Mais si on modifie un peu son domaine, par exemple

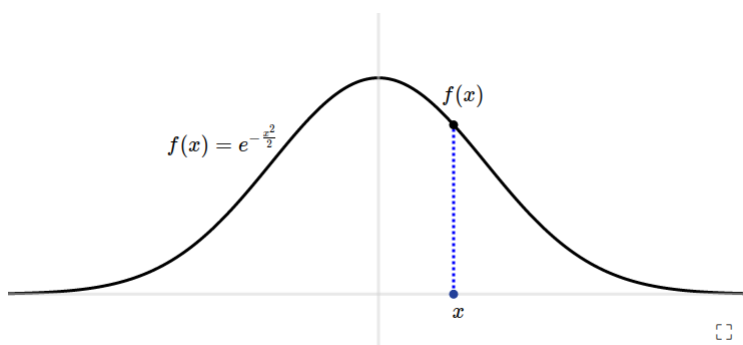
$$f : [-1, 2[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2,$$

alors cette fonction atteint aussi son minimum en $x_* = 0$, mais elle ne possède pas de maximum (maintenant, le point $x = 2$ ne fait plus partie du domaine!). \diamond

Exemple 6.24.

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x^2/2}$$

atteint son maximum en $x^* = 0$:



Or quel que soit $x \neq 0$, on peut toujours diminuer strictement la valeur de $e^{-x^2/2}$ en éloignant un peu x de l'origine. Donc g n'a pas de minimum. \diamond

Plus tard ([ici](#) (lien web)), nous reviendrons sur la recherche des minima/maxima d'une fonction.

6.5.2 Minorants et majorants

Définition 6.25. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est

- ★ **majorée** si il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) \leq M \forall x \in D$. On dit dans ce cas que M **major** f .
- ★ **minorée** si il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) \geq m \forall x \in D$. On dit dans ce cas que m **minore** f .

Si f est à la fois majorée et minorée, elle est **bornée**.

Exemple 6.26. La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

est minorée par $m = 0$ puisque $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et majorée par $M = 1$ puisque

$$f(x) = \frac{x^2 + 0}{x^2 + 1} < \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

\diamond

Une fois qu'une fonction est majorée (resp. minorée), on peut considérer le plus petit (resp. plus grand) majorant (resp. minorant).

Définition 6.27. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- ★ Si f est majorée (sur D), la **borne supérieure de f sur A** est son plus petit majorant :

$$\sup_D f := \sup_{x \in D} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D\} = \sup(\text{Im}(f)).$$

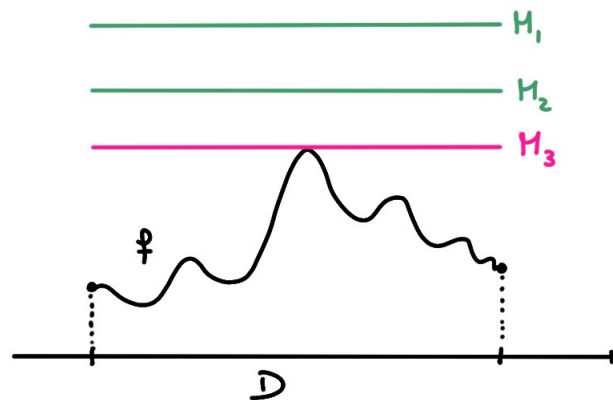
Si f n'est pas majorée sur D , on pose $\sup_D f := +\infty$.

- ★ Si f est minorée sur D , la **borne inférieure de f sur D** est son plus grand minorant :

$$\inf_D f = \inf_{x \in D} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D\} = \inf(\text{Im}(f)).$$

Si f n'est pas minorée sur D , on pose $\inf_D f := -\infty$.

Sur la figure ci-dessous, les nombres M_1, M_2 et M_3 sont tous des majorants pour f sur son domaine D . Le nombre M_3 étant le plus petit majorant (puisque tout nombre $M' < M_3$ ne majore plus f), c'est $\sup_D f$:



Remarque 6.28. ★ Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ atteint son maximum en x^* , alors

$$\sup_{x \in D} f(x) = \max_{x \in D} f(x) = f(x^*).$$

- ★ Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ atteint son minimum en x_* , alors

$$\inf_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} f(x) = f(x_*).$$

◇

Informel 6.29. Par les propriétés des réels, une fonction bornée possède *toujours* une borne supérieure et une borne inférieure ! Par contre, comme on sait, elle peut ne pas atteindre son maximum ou son minimum.

Exemple 6.30. La fonction

$$f :]0, 3[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - x$$

est majorée, car pour tout $x \in]0, 3[$,

$$f(x) = x^2 - x \leq 3^2 - 0 = 9$$

En fait, dans ce cas, ce majorant $M = 9$ n'est pas le plus petit, car

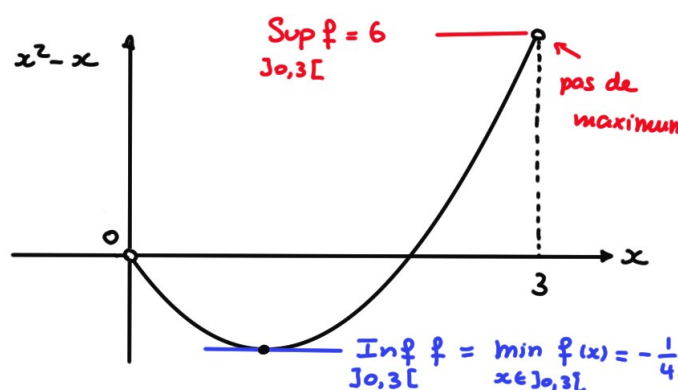
$$\sup_D f = 6.$$

Remarquons par contre qu'il n'existe aucun $x^* \in]0, 3[$ tel que $f(x^*) = 6$, donc f n'a pas de maximum.

Remarquons ensuite que f est minorée car

$$f(x) = x^2 - x \geq 0^2 - 3 = -3.$$

Ici f atteint son minimum en $x_* = \frac{1}{2}$, $f(x_*) = -\frac{1}{4}$:



◇

Exemple 6.31. La fonction

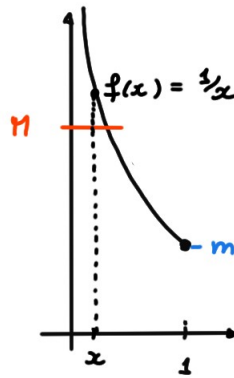
$$f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

est minorée car pour tout $x \in]0, 1]$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \geq \frac{1}{1} = 1 = m.$$

Mais elle n'est pas majorée, car pour tout $M \geq 1$ il existe $x \in]0, 1]$ tel que $f(x) > M$:



(On peut par exemple prendre $x = \frac{1}{2M}$, pour lequel $f(x) = 2M > M$.) On a donc

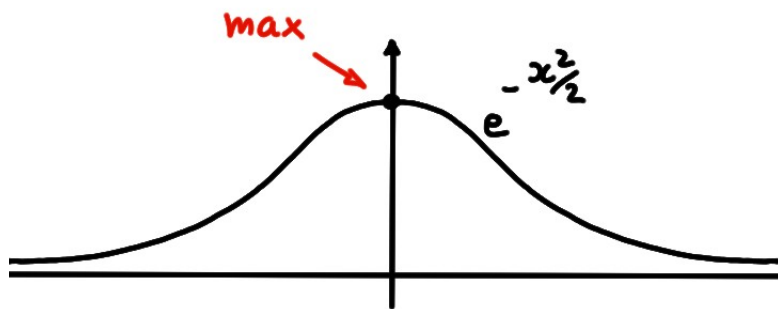
$$\sup_{]0,1]} f = +\infty.$$

Par contre,

$$\inf_{]0,1]} f = \min_{]0,1]} f = f(1) = 1.$$

◇

Exemple 6.32. Considérons encore $g(x) = e^{-x^2/2}$, sur \mathbb{R} .



On a vu que f atteint son maximum en $x^* = 0$

$$\sup_{\mathbb{R}} g = \max_{\mathbb{R}} g = g(0) = 1,$$

et on a vu qu'elle n'a pas de minimum. Pourtant, elle est minorée par 0 puisque $e^{-x^2/2} \geq 0$ pour tout x . Montrons que 0 est en fait la plus grande minorante. En effet, si on prend un $\varepsilon > 0$ quelconque fixé, montrons qu'il existe au moins un réel x tel que $0 \leq e^{-x^2/2} \leq \varepsilon$. En effet, on peut satisfaire cette condition en prenant $|x| > \sqrt{2|\log(\varepsilon)|}$. On conclut que

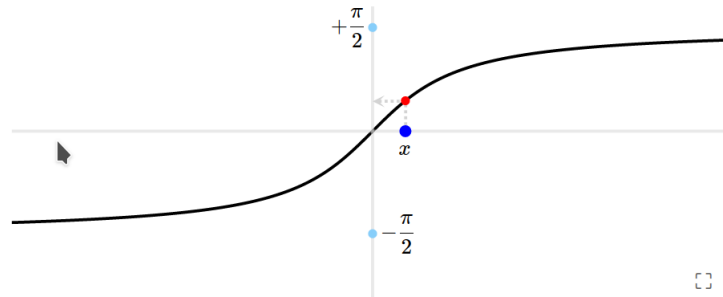
$$\inf_{\mathbb{R}} g = 0,$$

◇

Exemple 6.33. La fonction

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

ne possède ni minimum, ni maximum :



Malgré tout,

$$\sup_{\mathbb{R}} h = +\frac{\pi}{2}, \quad \inf_{\mathbb{R}} h = -\frac{\pi}{2}.$$

◇

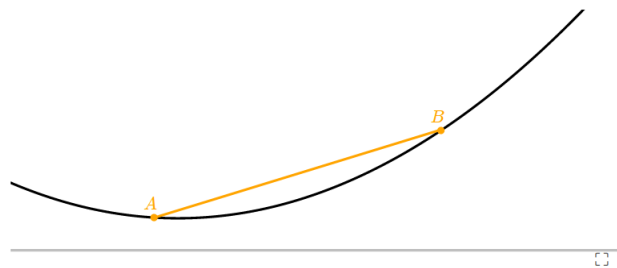
Lemme 18. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Si $A \subset B \subset D$, alors $\sup_A f \leq \sup_B f$, et $\inf_A f \geq \inf_B f$.
- b) $\sup_A (-f) = -\inf_A f$
- c) $\sup_A (f + g) \leq \sup_A f + \sup_A g$
- d) Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors $\sup_A (\alpha f + \beta) = \alpha \sup_A f + \beta$

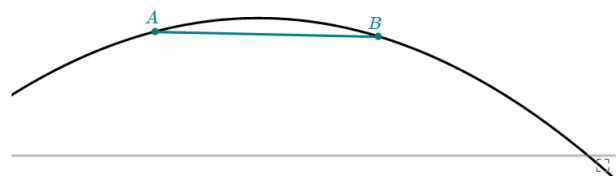
6.6 Convexité/concavité

La *convexité* est une propriété géométrique associée au graphe d'une fonction.

Une fonction est **convexe** si tous les points situés sur le segment reliant deux points quelconques de son graphe sont *au-dessus* du graphe,



et elle est **concave** si tous les points situés sur le segment reliant deux points quelconques de son graphe sont toujours *au-dessous* du graphe :



Remarque 6.34. f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. \diamond

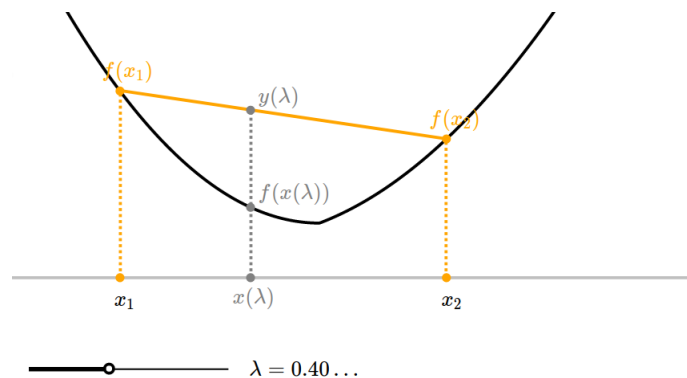
Pour définir analytiquement (plutôt que géométriquement) la convexité, il faut que nous décrivions précisément le segment reliant deux points du graphe.

Soit donc f une fonction donnée, et soient $x_1 < x_2$ deux réels. On peut paramétrer toutes les positions intermédiaires (sur l'axe réel) entre x_1 et x_2 à l'aide d'un paramètre $\lambda \in [0, 1]$, en définissant

$$x(\lambda) := x_1 + \lambda(x_2 - x_1) = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2.$$

On a $x(0) = x_1$, $x(1) = x_2$, et toute autre valeur $0 < \lambda < 1$ représente un point intermédiaire : $x_1 < x(\lambda) < x_2$. Maintenant, le point sur le segment reliant $A = (x_1, f(x_1))$ à $B = (x_2, f(x_2))$, situé au-dessus de $x(\lambda)$, est à hauteur

$$y(\lambda) = f(x_1) + \lambda(f(x_2) - f(x_1)) = (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$



□

Le segment est donc entièrement au-dessus du graphe si et seulement si

$$f(x(\lambda)) \leq y(\lambda) \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

et il est entièrement au-dessous du graphe si et seulement si

$$f(x(\lambda)) \geq y(\lambda) \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

Ceci mène à la définition analytique de convexité/concavité :

Définition 6.35. Soit I un intervalle, borné ou pas, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

★ f est **convexe** si pour toute paire $x_1, x_2 \in I$,

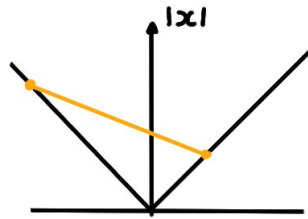
$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

★ f est **concave** si $-f$ est convexe, c'est-à-dire si pour toute paire $x_1, x_2 \in I$,

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Exemple 6.36. $f(x) = |x|$ est convexe. En effet, fixons deux points quelconques $x_1 < x_2$. Alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &= |(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2| \\ &\leq |(1-\lambda)x_1| + |\lambda x_2| \\ &= (1-\lambda)|x_1| + \lambda|x_2| \\ &= (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2). \end{aligned}$$



◇

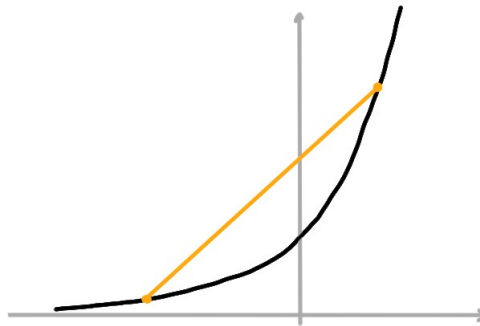
Exemple 6.37. $f(x) = x^2$ est convexe (sur tout \mathbb{R}). En effet,

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - (1-\lambda)f(x_1) - \lambda f(x_2) &= ((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)^2 - (1-\lambda)x_1^2 - \lambda x_2^2 \\ &= \underbrace{-\lambda(1-\lambda)}_{\geq 0} (x_1 - x_2)^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

◇

La définition de convexité donnée ci-dessus traduit la propriété géométrique énoncée en début de section, mais elle peut être difficile à mettre en oeuvre, même dans des cas très simples.

Exemple 6.38. La connaissance du graphe de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ indique qu'elle est probablement convexe :



Mais montrer "à la main" que

$$e^{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2} \leq (1-\lambda)e^{x_1} + \lambda e^{x_2} \quad \forall x_1 < x_2, \forall \lambda \in [0, 1]$$

ne semble pas si simple.

◇

Il serait donc utile d'avoir un moyen plus direct d'obtenir la convexité. Nous y reviendrons après avoir introduit le calcul différentiel.