Chapitre 2

Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

2.1 Définitions

Dans ce chapitre, nous laissons les systèmes de côté un instant, pour introduire le langage de base nécessaire au développement de l'algèbre linéaire dans les espaces $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. Pour commencer, nous introduirons la notion de *vecteur*, centrale en algèbre linéaire, et particulièrement utile pour décrire les systèmes.

Vecteurs

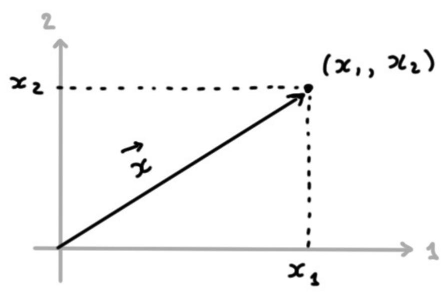
On l'a déjà mentionné plus haut : toute liste de nombres réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ peut être identifiée avec un point de l'espace $\mathbb{R}^n$. Or les points de $\mathbb{R}^n$ sont plus facilement manipulables lorsqu'on les interprète comme des objets appelés *vecteurs*.

On identifiera donc $(x_1, \ldots, x_n)$ avec le **vecteur** (dit aussi **vecteur-colonne**), noté

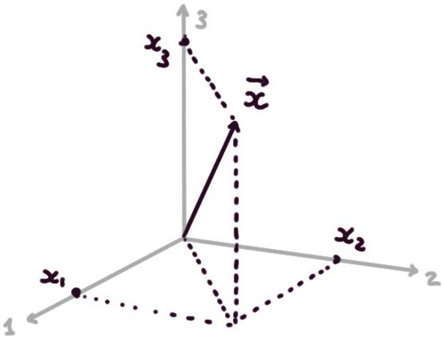
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Informel 2.1. En analyse, $\mathbb{R}^n$ est considéré comme un ensemble de *points*. En algèbre linéaire, $\mathbb{R}^n$ est considéré comme un ensemble de *vecteurs*.

Il est clair que la liste $(x_1, \ldots, x_n)$ et le vecteur $\mathbf{x}$ contiennent la même information, mais ici il faut interpréter $\mathbf{x}$ comme le *déplacement* depuis l'origine jusqu'au point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Par exemple, dans le plan $\mathbb{R}^2$,



ou dans l'espace $\mathbb{R}^3$:



L'avantage d'identifier des points avec des vecteurs est que le langage vectoriel permet d'introduire des opérations qui rendent les vecteurs propices au *calcul*.

Addition et multiplication par des scalaires

On munit l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de deux opérations :

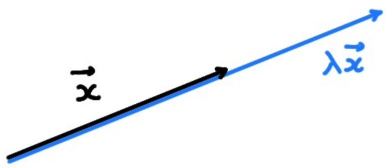
a) (Multiplication par un scalaire) La **multiplication d'un vecteur**

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

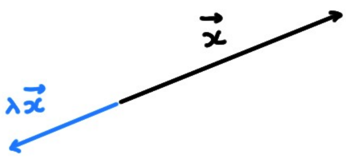
par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est le vecteur $\lambda\mathbf{x}$ défini par

$$\lambda\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Du point de vue géométrique, la multiplication par un scalaire $\lambda > 0$ correspond à étirer (si $\lambda \geqslant 1$) ou comprimer (si $0 < \lambda < 1$) :



Lorsque $\lambda < 0$, cette transformation est en plus accompagnée d'un changement de sens :



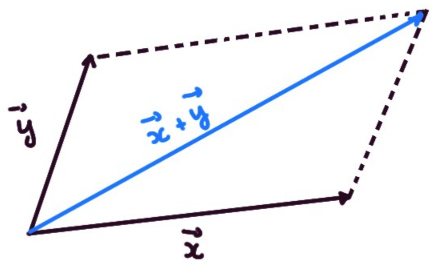
b) (Addition vectorielle) Si deux vecteurs

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

sont donnés, leur **somme** est définie par

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} .$$

Remarque 2.2. En petites dimensions, $n = 2$ et $n = 3$, l'addition vectorielle peut s'interpréter géométriquement comme la **règle du parallélogramme** :



On comprend ici que c'est l'interprétation d'un vecteur comme à un *déplacement* qui rend cette opération d'addition naturelle. ◇

Le **vecteur nul** est celui dont toutes les composantes sont égales à zéro. On le notera

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Par définition, on a $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, et

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} .$$

Pour tout vecteur $\mathbf{x}$, on appelle **opposé de** $\mathbf{x}$ le vecteur $-\mathbf{x} := (-1)\mathbf{x}$. Par définition,

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0} .$$

Les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire permettent de manipuler les vecteurs à l'aide de calculs. Ces calculs obéissent aux règles standard de l'arithmétique :

Proposition 1. *Pour tous vecteurs $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ de $\mathbb{R}^n$, et pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*

a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ *(commutativité)*

b) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ *(associativité)*

c) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ *(distributivité)*

d) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$ *(distributivité)*

e) $(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x}) = \mu(\lambda\mathbf{x})$

Preuve: Ces propriétés ne font que refléter une propriété élémentaire semblable, valide dans le corps des nombres réels. Ci-dessous, on indiquera par le symbole $\stackrel{!}{=}$ une identité obtenue en utilisant une propriété de base dans les réels, pour chacune des composantes :

a)

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} y_1+x_1 \\ y_2+x_2 \\ \vdots \\ y_n+x_n \end{pmatrix} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+z_1 \\ y_2+z_2 \\ \vdots \\ y_n+z_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1+(y_1+z_1) \\ x_2+(y_2+z_2) \\ \vdots \\ x_n+(y_n+z_n) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} (x_1+y_1)+z_1 \\ (x_2+y_2)+z_2 \\ \vdots \\ (x_n+y_n)+z_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \lambda \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x_1+y_1) \\ \lambda(x_2+y_2) \\ \vdots \\ \lambda(x_n+y_n) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \lambda x_1+\lambda y_1 \\ \lambda x_2+\lambda y_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n+\lambda y_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y} \end{aligned}$$

d)

$$(\lambda+\mu)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)x_1 \\ (\lambda+\mu)x_2 \\ \vdots \\ (\lambda+\mu)x_n \end{pmatrix}$$
$$\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_1 \\ \lambda x_2 + \mu x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu x_n \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$$

e)

$$(\lambda\mu)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (\lambda\mu)x_1 \\ (\lambda\mu)x_2 \\ \vdots \\ (\lambda\mu)x_n \end{pmatrix}$$
$$\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \lambda(\mu x_1) \\ \lambda(\mu x_2) \\ \vdots \\ \lambda(\mu x_n) \end{pmatrix} = \lambda(\mu\mathbf{x})$$
$$\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \mu(\lambda x_1) \\ \mu(\lambda x_2) \\ \vdots \\ \mu(\lambda x_n) \end{pmatrix} = \mu(\lambda\mathbf{x})$$

□

Avec ces propriétés, on peut résoudre des équations vectorielles, dont l'inconnue est un vecteur $\mathbf{x}$, de la même façon qu'on résout des équations élémentaires où l'inconnue est un réel x.

Exemple 2.3. Considérons deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ fixés, et étudions l'équation vectorielle

$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{x} = 5\mathbf{x} + 7\mathbf{b}\,.$$

Utilisons les propriétés démontrées ci-dessus pour *isoler* $\mathbf{x}$, comme on le fait quand on résout une équation en arithmétique élémentaire.

Rajoutons $+3\mathbf{x}$ des deux côtés. Du côté gauche, détaillons l'utilisation des propriétés :

$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{x} + 3\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + (-3+3)\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + 0\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + \mathbf{0} = 2\mathbf{a}\,.$$

En procédant de même du côté droit, on obtient

$$2\mathbf{a} = 8\mathbf{x} + 7\mathbf{b}\,.$$

En soustrayant $7\mathbf{b}$ des deux côtés,

$$8\mathbf{x} = 2\mathbf{a} - 7\mathbf{b}\,,$$

puis en multipliant par $\frac{1}{8}$,

$$\mathbf{x} = \tfrac{1}{4}\mathbf{a} - \tfrac{7}{8}\mathbf{b}\,.$$

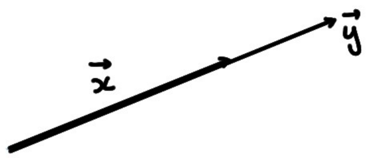
◇

2.2 Colinéarité

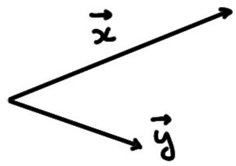
La *colinéarité* est une généralisation du *parallélisme*.

Définition 2.4. Deux vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sont **colinéaires** si il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$ ou $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$.

Deux vecteurs sont colinéaires si ils sont supportés par la même droite,



et non-colinéaires (on dira bientôt *indépendants*) si ils pointent dans des directions différentes :



Exemple 2.5. Parmi les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

seuls $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ sont colinéaires, puisque $\mathbf{z} = -2\mathbf{y}$. ◇

Remarque 2.6. Le vecteur nul, $\mathbf{0}$, est colinéaire à n'importe quel autre vecteur. En effet, quel que soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, on peut toujours écrire $\mathbf{0} = \lambda\mathbf{y}$, où $\lambda = 0$. ◇

2.3 Combinaisons linéaires et parties engendrés

En algèbre linéaire, une façon standard et non-triviale d'obtenir de nouveaux vecteurs à partir d'une famille donnée est de former des *combinaisons linéaires*.

Définition 2.7. Soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Une somme du type

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k\,,$$

où les $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont des scalaires fixés, est appelée **combinaison linéaire** des vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Les scalaires λ_j sont les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 2.8. Dans $\mathbb{R}^2$, considérons $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. En prenant $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$,

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = -2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Choisissons maintenant un troisième vecteur : $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, et posons la question : est-il possible d'écrire $\mathbf{w}$ comme une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$? Il s'agit donc de voir si il existe des scalaires λ_1, λ_2 tels que

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}.$$

Lorsqu'on exprime cette relation en composantes,

$$\begin{pmatrix} 3\lambda_1 - \lambda_2 \\ 5\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Puisque deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales deux-à-deux, on en déduit que λ_1 et λ_2 doivent être solution du système

$$\begin{cases} 3\lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 5 \\ 5\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & -2 \end{cases}$$

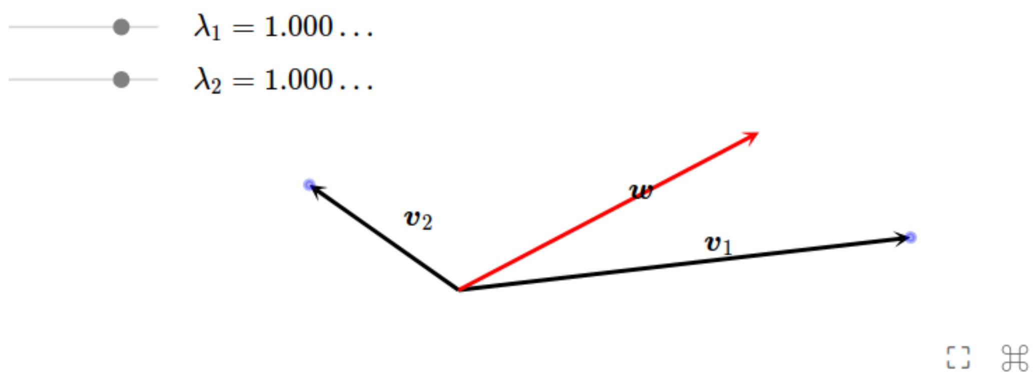
La solution de ce système est unique, donnée par $\lambda_1 = \frac{8}{11}$, $\lambda_2 = \frac{-31}{11}$. On en déduit que $\mathbf{w}$ est bien combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{w} = \tfrac{8}{11}\mathbf{v}_1 - \tfrac{31}{11}\mathbf{v}_2.$$

$\diamond$

Plus généralement, fixons deux vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ dans le plan, et considérons toutes les combinaisons linéaires de la forme

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$



On remarque que

- ⋆ Si $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ ne sont pas colinéaires, alors *toutes les combinaisons linéaires possibles de* $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ *remplissent le plan*, dans le sens suivant : n'importe quel vecteur $\mathbf{w}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$.

- ⋆ Si $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont colinéaires, alors seulement certains vecteurs $\mathbf{w}$ du plan peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ (essentiellement ceux qui sont sur la droite portée par $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$).

Exemple 2.9. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Est-ce que $\mathbf{w}$ est combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$? Pour le savoir, cherchons λ_1, λ_2 tels que

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}\,,$$

qui mène au système

$$\begin{cases} -3\lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 4 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & = & 3 \end{cases}$$

Ce système est incompatible, donc $\mathbf{w}$ ne peut *pas* s'écrire comme combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. ◇

Informel 2.10. Dans ce dernier exemple, on a résolu un problème de combinaison linéaire en l'exprimant sous la forme d'un système linéaire. Dans la section suivante nous ferons l'inverse, en montrant qu'un système linéaire peut se traduire en un problème de combinaison linéaire.

Parties engendrées

Définition 2.11. Soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ donnés. La **partie de $\mathbb{R}^n$ engendrée par la famille** $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$, notée

$$\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}\,,$$

est définie comme l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$:

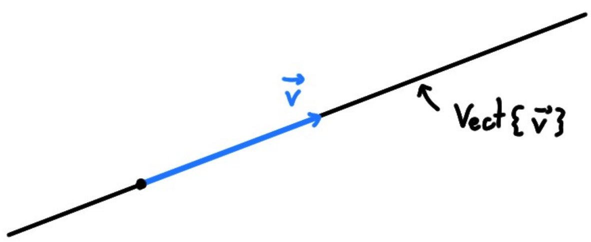
$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_p \mathbf{v}_p\,.$$

Informel 2.12. La partie engendrée par une famille de vecteurs, c'est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de ces vecteurs.

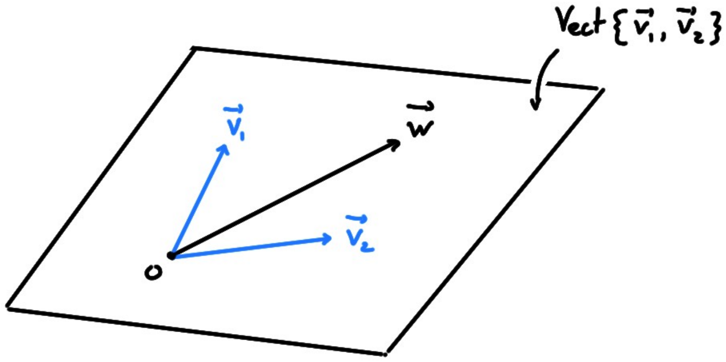
Remarque 2.13. En anglais, $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ se note $\mathrm{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$. ◇

Pour les familles contenant un ou deux vecteurs :

- ⋆ Lorsqu'on considère une famille $\{\mathbf{v}\}$ contenant un seul vecteur non-nul $\mathbf{v}$, $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}\}$ est constitué de tous les vecteurs colinéaires à $\mathbf{v}$, c'est-à-dire de la forme $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$. Il est donc naturel d'interpréter $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}\}$ comme **la droite de $\mathbb{R}^n$ engendrée par $\mathbf{v}$**, passant par l'origine :



- ⋆ Lorsqu'on considère une famille $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ contenant deux vecteurs non-colinéaires, on interprète $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ comme **le plan de $\mathbb{R}^n$ engendrée par** $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, passant par l'origine :

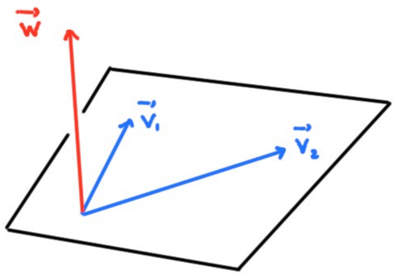


Même si cette terminologie ("droite", "plan") est empruntée à la géométrie du plan ($n = 2$) et de l'espace ($n = 3$), nous l'utiliserons aussi dans les dimensions supérieures ($n > 3$).

Exemple 2.14. Plus haut, nous avions défini

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

et montré que $\mathbf{w}$ n'est pas combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Nous pouvons maintenant interpréter ceci en disant que $\mathbf{w}$ n'est pas dans le plan engendré par $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$:



◇

La base canonique de $\mathbb{R}^n$

Définissons, pour tout $k = 1, \dots, n$, le vecteur $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^n$ comme étant le vecteur dont toutes les composantes sont nulles, sauf la k-ème, qui vaut 1.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cette famille de vecteur peut être utilisée pour décomposer n'importe quel vecteur, comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \,.\end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \,.$$

Plus tard, on appellera $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ la **base canonique de** $\mathbb{R}^n$.

2.4 In-dépendance linéaire

La notion *d'indépendance linéaire* (et celle qui lui est associée, la *dépendance linéaire*) est une des plus importantes de l'algèbre linéaire.

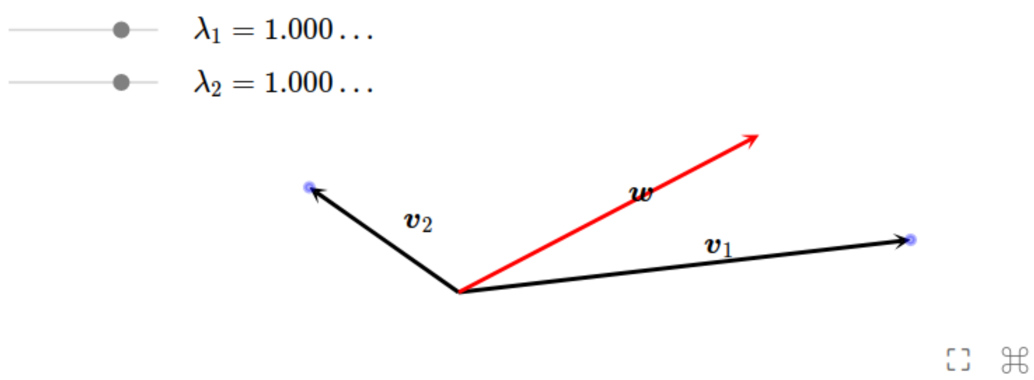
Informel 2.15. En effet, il sera important de comprendre comment des vecteurs peuvent être utilisés pour "remplir l'espace", à l'aide de combinaisons linéaires. Pour ce faire, il faudra pouvoir décrire dans quelle mesure ces vecteurs pointent dans des *dimensions différentes* de $\mathbb{R}^n$. Et pour avoir en main une notion qui permette de travailler (et faire des calculs !), il faut introduire une définition abstraite, qui s'utilise en toute dimension. Cette notion, c'est l'*indépendance linéaire*.

Motivation : une caractérisation de la non-colinéarité

En guise de motivation, considérons deux vecteurs dans le plan. Clairement, si ces vecteurs ne sont pas colinéaires, c'est qu'ils pointent dans des directions différentes. Or on peut reformuler ce que signifie être *non-colinéaire* un peu différemment.

Fixons deux vecteurs du plan, $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, et étudions toutes les combinaisons linéaires de la forme

$$\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 \,, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \,.$$



Bien-sûr, quels que soient $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, on a $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ dès que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, puisque

$$0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}\,.$$

Mais posons-nous la question de savoir s'il existe d'autres paires (λ_1, λ_2) telles que $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Par un simple calcul, ou en utilisant l'animation ci-dessus , on se convainc facilement des deux faits suivants :

a) Si $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ ne sont pas colinéaires, alors l'unique façon d'avoir $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ est de prendre $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

b) Si $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont colinéaires, alors il existe une infinité de choix possibles pour λ_1 et λ_2 qui garantissent $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

c) La même chose fonctionne en toute dimension.

On conclut de cette simple discussion que la non-colinéarité, pour deux vecteurs, peut s'exprimer de façon plus abstraite, par cette condition à propos de leurs combinaisons linéaires nulles :

Lemme 1. *Deux vecteurs non-nuls $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ sont non-colinéaires si et seulement si l'unique combinaison linéaire nulle,*

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}\,,$$

est celle pour laquelle $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

L'avantage de cette caractérisation de la non-colinéarité de deux vecteurs, proposée dans le lemme précédent, est qu'elle se généralise naturellement à des familles contenant plus que deux vecteurs (de $\mathbb{R}^n$). Voyons comment, dans la section suivante.

Définition

Définition 2.16. Soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ donnés. La famille $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ est dite

⋆ **linéairement indépendante** (ou **libre**) si l'unique combinaison linéaire nulle,

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

est celle pour laquelle $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$.

⋆ **dépendante** (ou **liée**) si il existe des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, dont au moins un n'est pas nul, tels que

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}\,.$$

Remarque 2.17. Dès qu'un des vecteurs de la famille $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ est nul, cette famille est dépendante. En effet, supposons que $\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. On peut alors écrire l'identité suivante, toujours vraie,

$$0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_{k-1} + 1\underbrace{\mathbf{v}_k}_{=\mathbf{0}} + 0\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_p = \mathbf{0}\,,$$

qui implique bien que $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p\}$ est dépendante. ◇

Exemple 2.18. Considérons la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ contenant les trois vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette famille est-elle libre ou liée ? Pour répondre, considérons la relation linéaire

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Lorsqu'on écrit explicitement cette relation en composantes, on obtient le système 4×3 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & & & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -3\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

La matrice augmentée de ce système devient, après échelonnage,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La solution du système correspondant est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On conclut que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est une famille libre. ◇

Exemple 2.19. Montrons que la famille formée des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, est libre. Pour ce faire, considérons la relation linéaire

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Lorsqu'on l'exprime en composantes, cette dernière devient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ & \vdots & \\ \lambda_n & = & 0 \end{array} \right. ,$$

qui montre bien que la famille est libre. ◇

Théorème 2.20. *Une famille $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ est liée si et seulement si un de ses vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres, plus précisément : si il existe $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\mathbf{v}_k$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des $\mathbf{v}_j$, $j \neq k$.*

Preuve: Si la famille est liée, alors il existe des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, non tous nuls, tels que

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k + \cdots + \lambda_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

Si on supposons que le coefficient $\lambda_k \neq 0$, on peut isoler $\mathbf{v}_k$ dans cette dernière :

$$\mathbf{v}_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{(-\lambda_j)}{\lambda_k} \mathbf{v}_j.$$

On a donc bien exprimé $\mathbf{v}_k$ comme combinaison linéaire des autres. Inversément, si un $\mathbf{v}_k$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres,

$$\mathbf{v}_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} \alpha_j \mathbf{v}_j ,$$

et on peut récrire cette dernière comme

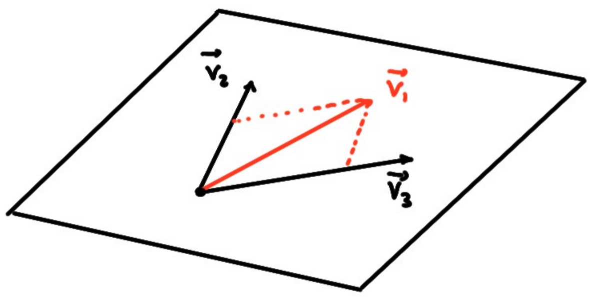
$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + (-1)\mathbf{v}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + \alpha_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} ,$$

qui montre bien que la famille est liée. □

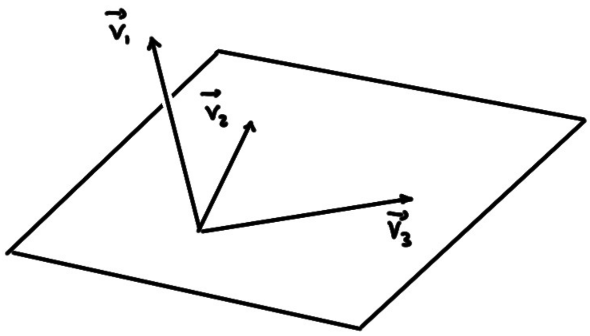
À la lumière de ce dernier théorème, illustrons encore la différence libre/liée dans le cas simple de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.21. Considérons une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

- ⋆ Si $\mathcal{F}$ est liée, alors le théorème précédent implique que l'un des vecteurs, disons $\mathbf{v}_1$, peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres. En d'autres termes, cela signifie que $\mathbf{v}_1$ est dans le plan engendré par $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$:



- ⋆ Par contre, si $\mathcal{F}$ est libre, alors le théorème implique qu'aucun des vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres (aucun n'est dans le plan engendré par les deux autres), ce qui exprime bien le fait que ces trois vecteurs *pointent tous dans des dimensions différentes* :



◇