Chapitre 10

Vecteurs et valeurs propres

10.1 Motivation

Les notions introduites jusqu'ici permettent de dire des choses très globales sur une application linéaire

$$T : V \to V'$$

Si V et V' sont de dimensions finies, une telle application peut être représentée par une matrice, et nous savons l'utiliser pour étudier l'injectivité, la surjectivité ; nous avons plusieurs critères permettant de déterminer quand l'application est bijective (via l'inversibilité de sa matrice et le déterminant).

Mais ce que nous n'avons pas encore c'est un outil, un peu comme la dérivée en analyse, qui nous permette de dire des choses plus fines sur cette application.

Nous nous concentrerons sur les applications linéaires

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m .$$

Pour motiver les nouvelles notions que nous allons introduire, voyons un exemple simple dans le plan :

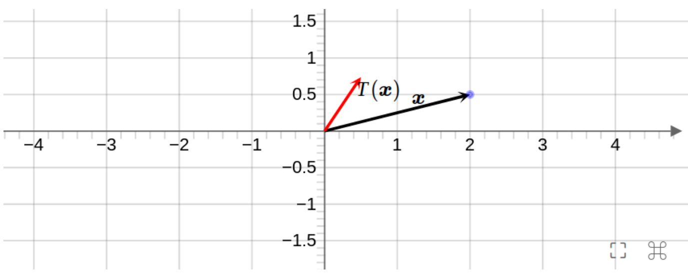
Exemple 10.1. Considérons l'application $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de A étant indépendantes, cette application est bijective.

Mais ne peut-on rien dire de plus ? Par exemple, peut-on dire plus précisément comment $A\mathbf{x}$ est relié *géométriquement* à $\mathbf{x}$?

Pour essayer de mieux comprendre cette application, faisons varier $\mathbf{x}$ sur l'animation ci-dessous, et observons comment l'image $A\mathbf{x}$ se comporte :



On se rend compte que certaines directions semblent jouer un rôle particulier. Sous l'action de T, c'est-à-dire lorsqu'on multiplie par A,

- $\star$ tout vecteur $\mathbf{x}$ sur la droite dirigée par $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ subit uniquement une modification de longueur, par un facteur $\frac{1}{2}$,
$$A\mathbf{x} = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}\,.$$
- $\star$ tout vecteur $\mathbf{x}$ sur la droite dirigée par $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ subit uniquement une modification de sens :
$$A\mathbf{x} = -\mathbf{x}\,.$$

En d'autres termes, les deux directions spécifiées par $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont particulières puisqu'elles définissent des vecteurs *dont la direction ne change pas sous l'action de T*. Leur longueur et leur sens, par contre, peuvent être altérés.

Ces vecteurs particuliers $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, que nous appellerons *vecteurs propres*, fournissent un point de départ pour comprendre la géométrie de l'application T. Au chapitre suivant, sur la *diagonalisation*, nous utiliserons ces vecteurs propres pour construire une nouvelle base dans laquelle nous exprimerons T. $\diamond$

10.2 Définition, espace propre

En général, lorsqu'on multiplie un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ par une matrice A ($n \times n$), on *change* la direction de $\mathbf{x}$.
Or on a vu dans l'exemple de la section précédente qu'il peut exister des vecteurs $\mathbf{v}$ particuliers dont la direction n'est pas modifiée lorsqu'ils sont multipliés par A. En d'autres termes, pour ces vecteurs, $A\mathbf{v}$ est colinéaire à $\mathbf{v}$.

Définition 10.2. Soit A une matrice $n \times n$. Un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est appelé **vecteur propre de** A si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\,.$$
Le scalaire λ est appelé **valeur propre de** A, et $\mathbf{v}$ est **un vecteur propre associé** à λ.

- $\star$ Le vecteur nul est toujours vecteur propre, puisque $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ quel que soit λ. On sera donc intéressé, par la suite, par l'existence de vecteurs propres *non-nuls* : $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
- $\star$ Puisqu'à toute matrice A ($n \times n$) correspond une application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, définie par $T(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$, on définit les **vecteurs propres** (resp. **valeurs propres**) de T comme étant ceux (resp. celles) de A. Donc un vecteur propre $\mathbf{v}$ de T, associé à une valeur propre λ, est tel que
$$T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\,.$$

Exemple 10.3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

- $\star$ Si $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$, alors
$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -4\mathbf{v}\,,$$
et donc $\mathbf{v}$ est vecteur propre, avec valeur propre $\lambda = -4$.

⋆ Si $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

qui n'est pas colinéaire à $\mathbf{v}$, donc $\mathbf{v}$ n'est pas vecteur propre.

$\diamond$

Exemple 10.4. Pour une matrice $n \times n$ diagonale,

$$A = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} ,$$

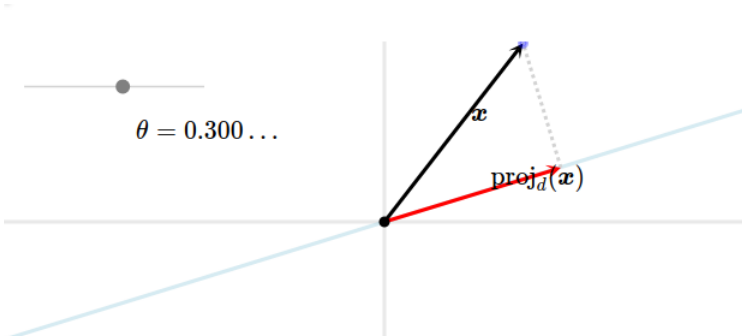
on a

$$A\mathbf{e}_k = d_k \mathbf{e}_k \,, \qquad \forall k = 1, \dots, n \,,$$

et donc chaque vecteur de la base canonique $\mathbf{e}_k$ est vecteur propre, avec valeur propre d_k. $\diamond$

Nous verrons bientôt comment calculer les vecteurs et valeurs propres d'une matrice. Mais parfois, lorsque l'application associée a un sens géométrique direct, on peut les connaître sans faire de calculs, par simple observation.

Exemple 10.5. Considérons la projection sur une droite passant par l'origine :



⋆ Nous avons déjà remarqué que les vecteurs sur d ne sont pas modifiés par la projection :

$$\mathrm{proj}_d(\mathbf{v}) = \mathbf{v} = 1\mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{v} \in d \,,$$

Ainsi, tous les vecteurs de d sont vecteurs propres de proj_d, avec valeur propre $\lambda = 1$.

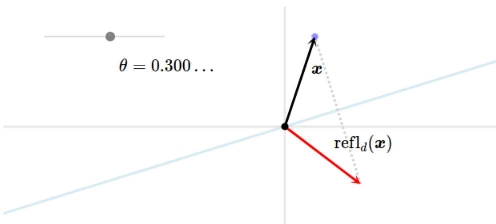
⋆ Les vecteurs qui sont *perpendiculaires* à d ont tous comme projection le vecteur nul :

$$\mathrm{proj}_d(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = 0\mathbf{v} \,, \qquad \forall \mathbf{v} \perp d \,,$$

Ainsi, tous les vecteurs perpendiculaires à d sont vecteurs propres de proj_d, avec valeur propre $\lambda = 0$.

Il n'y a, apparemment en tout cas, pas d'autres vecteurs propres. $\diamond$

Exemple 10.6. On peut faire de même avec la réflexion par rapport à une droite :



⋆ Tout vecteur sur d est vecteur propre, avec valeur propre $\lambda = 1$:

$$\mathrm{refl}_d(\mathbf{v}) = \mathbf{v} = 1\mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{v} \in d\,,$$

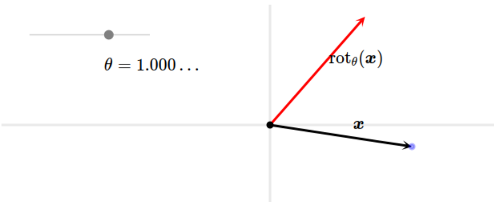
⋆ Tout vecteur perpendiculaire à d est vecteur propre, avec valeur propre $\lambda = -1$:

$$\mathrm{refl}_d(\mathbf{v}) = -\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{v} \perp d\,.$$

◇

Une matrice ne possède pas toujours des vecteurs et valeurs propres. En effet, l'existence de vecteurs $\mathbf{v}$ qui soient colinéaires à leur image $A\mathbf{v}$ est une propriété géométrique particulière que beaucoup de transformations, même naturelles, ne satisfont pas.

Exemple 10.7. Considérons la rotation d'angle θ, $\mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) = \mathrm{rot}_\theta(\mathbf{x})$:



Pour les valeurs de $\theta \in [-\pi, \pi]$ qui sont différentes de 0 et $\pm\pi$, $\mathrm{rot}_\theta(\mathbf{x})$ pointe toujours dans une direction différente de $\mathbf{x}$. Donc pour ces valeurs de θ, sa matrice n'a pas de vecteurs propres. Par contre,

⋆ Si $\theta = 0$, alors évidemment la rotation ne fait rien,

$$\mathrm{rot}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\,, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\,,$$

et donc n'importe quel vecteur du plan est vecteur propre, avec valeur propre $\lambda = 1$.

⋆ Si $\theta = \pm\pi$, alors l'effet de la rotation est de renverser $\mathbf{x}$,

$$\mathrm{rot}_{\pm\pi}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}\,, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\,,$$

et donc n'importe quel vecteur du plan est vecteur propre, avec valeur propre $\lambda = -1$.

Nous reviendrons plus tard sur ces cas particuliers. ◇

La question se pose maintenant de savoir comment calculer les vecteurs propres et valeurs propres de façon systématique, pour une matrice donnée.

Espace propre

Par linéarité, si $\mathbf{v}$ est vecteur propre avec valeur propre λ, alors tout vecteur colinéaire à $\mathbf{v}$ est aussi vecteur propre avec valeur propre λ .

Donc dès qu'une matrice possède une valeur propre, il y a une infinité de vecteurs propres qui lui sont associés. Ceci mène à considérer, pour une valeur propre λ donnée, l'ensemble de tous les vecteurs propres associés à λ :

Définition 10.8. Soit A une matrice $n \times n$, et λ une valeur propre de A. L'ensemble

$$E_\lambda := \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \;:\; A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\right\} \subset \mathbb{R}^n$$

est appelé **espace propre** associé à λ.

Remarque 10.9. Comme dit précédemment, E_λ contient toujours $\mathbf{0}$. ◇

Exemple 10.10. Nous avons vu plus haut que $\lambda = -4$ était valeur propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} .$$

Calculons son espace propre associé. Pour ce faire, on cherche tous les $\mathbf{v}$ solutions de

$$A\mathbf{v} = -4\mathbf{v} .$$

Comme on sait, ce système *doit* posséder une infinité de solutions ! En nommant les composantes de $\mathbf{v}$, on peut l'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} .$$

En passant le second membre du côté gauche,

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

L'espace propre associé à $\lambda = -4$ est donc une droite :

$$E_{-4} = \left\{ \mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

◇

Exemple 10.11. Considérons l'application associée à

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} .$$

Supposons que l'on ait déjà montré que $\lambda = 2$ est valeur propre. Calculons son espace propre associé, E_2 : on cherche tous les $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ solutions de

$$A\mathbf{v} = 2\mathbf{v} ,$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} .$$

En passant le second membre du côté gauche,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On peut donc prendre v_2 et v_3 comme variables libres, et prendre $v_1 = \frac{1}{2}(v_2 - 6v_3)$ comme variable de base. Ainsi, tout vecteur de la forme

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_2 - 3v_3 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est vecteur propre de A, avec valeur propre 2. Ceci montre que l'espace propre E_2 est un plan :

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ \mathbf{v} = s \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

◇

Remarque 10.12. On l'a observé sur ces deux premiers exemples : une fois la valeur propre connue, la recherche des vecteurs propres qui lui sont associés mène *toujours* à un système possédant une infinité de solutions. ◇

Donc une fois une valeur propre connue, un calcul explicite d'espace propre n'est que la résolution d'un système du type $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. La question naturelle, à laquelle nous répondrons dans la section suivante, est de savoir *comment trouver les valeurs propres*.

Mais avant ça, remarquons que dans les deux exemples ci-dessus, l'espace propre trouvé était engendré par certains vecteurs, et avait donc une structure de sous-espace vectoriel. C'est l'origine du terme "espace" propre :

Lemme 15. *L'espace propre associé à λ peut s'écrire*

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n).$$

Par conséquent, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Preuve:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in E_\lambda &\Leftrightarrow A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \\ &\Leftrightarrow A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I_n). \end{aligned}$$

Comme $A - \lambda I_n$ est une application linéaire, nous savons depuis les chapitres précédents que son noyau est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ □

Matrices inversibles et la valeur propre nulle

Théorème 10.13. *Une matrice A est inversible si et seulement si $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre.*

Preuve: On sait que A est inversible si et seulement si son noyau ne contient que le vecteur nul. Or le noyau pouvant être défini comme l'ensemble des vecteurs $\mathbf{v}$ tels que $A\mathbf{v} = 0\mathbf{v}$, ceci donne l'équivalence. □

On trouvera **ici (3Blue1Brown)** (lien web) une discussion qui pourra aider (ou pas) à comprendre certaines des choses faites ici, et qui motive aussi l'usage que nous ferons plus tard des vecteurs et valeurs propres.

10.3 Le polynôme caractéristique

Voyons le résultat qui rendra la recherche de valeurs propres un problème purement algébrique :

Théorème 10.14. *Soit A une matrice $n \times n$. Alors $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A si et seulement si*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0\,.$$

Preuve: En effet, λ est valeur propre de A si et seulement si il existe un vecteur non-nul $\mathbf{v}$ tel que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. On a vu plus haut que ceci est équivalent à dire que $\mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I_n)$. Mais l'existence de vecteurs non-nuls dans le noyau d'une matrice (ici : la matrice $A - \lambda I_n$) implique que celle-ci n'est pas inversible, ce qui est équivalent à dire que son déterminant est nul. □

Exemple 10.15. Considérons encore une fois la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Par le théorème, toutes les valeurs propres se trouvent en étudiant l'équation

$$\det(A - \lambda I_2) = 0\,.$$

Comme

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda) - 30 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 28 \\ &= (\lambda+4)(\lambda-7)\,, \end{aligned}$$

A possède exactement deux valeurs propres : $\lambda_1 = -4$ (comme nous avions déjà observé) et $\lambda_2 = 7$. ◇

Comme dans ce dernier exemple, la fonction $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ sera toujours un polynôme en λ.

Définition 10.16. Soit A une matrice $n \times n$. Le polynôme

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

est appelé le **polynôme caractéristique de** A.

Les valeurs propres d'une matrice se trouvent donc en cherchant les racines de son polynôme caractéristique.

Exemple 10.17. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 5\,.$$

Comme $P_A(\lambda) \geqslant 5$ pour tout λ, P_A n'a pas de racines. Donc A ne possède aucune valeur propre, et aucun vecteur propre. ◇

Exemple 10.18. Pour une matrice $n \times n$ diagonale, $A = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$, on a

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) \\ &= \det(\mathrm{diag}(d_1 - \lambda, \dots, d_n - \lambda)) \\ &= (d_1 - \lambda) \cdots (d_n - \lambda)\,, \end{aligned}$$

donc les valeurs propres de A sont ses éléments diagonaux $d_1, \dots, d_n$. ◇

Recherche de vecteurs et valeurs propres

Pour trouver les vecteurs propres et valeurs propres (s'il y en a) d'une matrice A, on pourra donc procéder comme suit :

1) Calculer le **spectre** de A, noté $\mathrm{spectre}(A)$, et défini comme l'ensemble de toutes ses valeurs propres, racines du polynôme caractéristique, $P_A(\lambda) = 0$.
2) Si $\mathrm{spectre}(A) \neq \emptyset$, calculer pour chaque valeur propre $\lambda \in \mathrm{spectre}(A)$ l'espace propre associé E_λ, en trouvant toutes les solutions de $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Informel 10.19. A priori, si A est $n \times n$, $P_A(\lambda)$ est un polynôme de degré n. Donc puisqu'on cherche les racines de $P_A(\lambda)$, on a avantage à le calculer avec précaution, de façon à tout de suite l'obtenir sous une forme factorisée (ou aussi factorisée que possible). Dans l'exemple suivant, un choix judicieux d'opérations sur la matrice $A - \lambda I_3$ évite de devoir étudier un polynôme de degré 3.

Exemple 10.20. Cherchons les vecteurs et valeurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Commençons par la recherche des valeurs propres, en calculant

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 \\ -1-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ -1-\lambda & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(1+\lambda)\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(1+\lambda)\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(1+\lambda)(2-\lambda)^2 . \end{aligned}$$

(Dans la deuxième ligne nous avons rajouté les colonnes 2 et 3 à la première, dans la troisième nous avons extrait un $(1+\lambda)$ de la première colonne, et dans la quatrième nous avons soustrait la première de la deuxième et troisième ligne. Dans la dernière ligne, nous avons profité du fait que la matrice était triangulaire.)

Nous avons donc deux valeurs propres, $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$. On calcule facilement leurs espaces propres associés :

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \ker(A + I_n) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ E_2 &= \ker(A - 2I_n) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} . \end{aligned}$$

◇

Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude

Rappelons que deux matrices carrées sont **semblables**, $A \sim B$, si il existe une matrice inversible M telle que $A = MBM^{-1}$.

Théorème 10.21. *Si deux matrices sont semblables, $A \sim B$, alors elles ont le même polynôme caractéristique :*

$$P_A(\lambda) = P_B(\lambda) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Par conséquent, elles ont le même spectre : $\text{spectre}(A) = \text{spectre}(B)$.

Preuve: Si $A = MBM^{-1}$, alors en récrivant $I_n = MM^{-1} = MI_nM^{-1}$,

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) \\ &= \det(MBM^{-1} - \lambda MM^{-1}) \\ &= \det(M(B - \lambda I_n)M^{-1}) \\ &= \det(M)\det(B - \lambda I_n)\det(M^{-1}) \\ &= \det(B - \lambda I_n)\det(M)\det(M^{-1}) \\ &= \det(B - \lambda I_n)\det(MM^{-1}) \\ &= \det(B - \lambda I_n) \\ &= P_B(\lambda)\,. \end{aligned}$$

□

Considérons une application linéaire

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,.$$

Si on possède deux bases dans $\mathbb{R}^n$, notées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, T peut se représenter comme une matrice,

- ⋆ $[T]_{\mathcal{B}}$ relativement à $\mathcal{B}$, ou
- ⋆ $[T]_{\mathcal{C}}$ relativement à $\mathcal{C}$,

La formule du changement de base nous dit que

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \\ &= {P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}}^{-1}[T]_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,. \end{aligned}$$

Ceci implique que $[T]_{\mathcal{B}} \sim [T]_{\mathcal{C}}$, et donc, par le théorème ci-dessus, que ces deux matrices ont le même spectre.

Ceci montre que le spectre est bel et bien associé à l'*application*, pas à la matrice qui est utilisée pour la représenter relativement à une base ou une autre.

10.4 Vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes

Théorème 10.22. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes ($\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) d'une matrice A, et soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ des vecteurs non-nuls tels que*

- ⋆ *$\mathbf{v}_1$ est vecteur propre associé à λ_1,*
- ⋆ $\vdots$
- ⋆ *$\mathbf{v}_k$ est vecteur propre associé à λ_k.*

Alors la famille $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ est libre.

Preuve: On démontre le résultat par récurrence sur k, c'est-à-dire sur le nombre de vecteurs propres dans la famille.

Cas $k = 2$: Soient $\lambda_1 \neq \lambda_2$ deux valeurs propres de A, et soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ deux vecteurs non nuls tels que

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1\,, \qquad A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2\,.$$

Considérons la relation linéaire

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}\,.$$

Agissons de deux manières sur cette relation :

- ⋆ En multipliant par A des deux côtés,

$$\alpha_1 \underbrace{A\mathbf{v}_1}_{=\lambda_1\mathbf{v}_1} + \alpha_2 \underbrace{A\mathbf{v}_2}_{=\lambda_2\mathbf{v}_2} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$

  on a

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}\,.$$

- ⋆ En multipliant par λ_2 des deux côtés,

$$\alpha_1\lambda_2\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}\,.$$

En faisant la différence de ces deux expressions, on obtient

$$\alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \underbrace{\mathbf{v}_1}_{\neq \mathbf{0}} = \mathbf{0}\,,$$

d'où on tire que $\alpha_1 = 0$. En refaisant la même chose mais en multipliant par λ_1 au lieu de λ_2, on montre que $\alpha_2 = 0$. Donc $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ est libre.

Cas $k > 2$: Supposons que le résultat est vrai pour des famille de k valeurs propres et k vecteurs propres, et considérons une famille qui en contient $k + 1$:

- ⋆ $\mathbf{v}_1$ est vecteur propre associé à λ_1,
- ⋆ $\vdots$
- ⋆ $\mathbf{v}_{k+1}$ est vecteur propre associé à λ_{k+1},

où tous les λ_j sont distincts, et tous les $\mathbf{v}_j$ sont non-nuls.

Considérons la relation

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}\,.$$

Comme avant, agissons de deux manière sur cette relation :

- ⋆ En multipliant par A des deux côtés,

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}\,.$$

- ⋆ En multipliant par λ_{k+1} des deux côtés,

$$\alpha_1\lambda_{k+1}\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}\,.$$

En faisant la différence de ces deux expressions, le terme $\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}$ disparaît, et il reste

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k = \mathbf{0}\,,$$

et comme l'hypothèse d'induction garantit que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ est libre, tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls :

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0\,, \qquad \cdots\,, \qquad \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0\,.$$

Mais λ_{k+1} est distinct de toutes les autres valeurs propres : $\lambda_j - \lambda_{k+1} \neq 0$. De là, on tire que $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$. En réinjectant ces zéros dans la relation de départ, elle devient

$$\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}\,.$$

Comme $\mathbf{v}_{k+1} \neq \mathbf{0}$, on conclut que α_{k+1} est nul comme les autres, et donc que la famille $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{k+1}\}$ est libre. □

On peut effectivement remarquer que dans les quelques exemples vus précédemment, des familles de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes étaient toujours libres.

Exemple 10.23. On a vu que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} .$$

possède exactement deux valeurs propres, $\lambda_1 = -4$ et $\lambda_2 = 7$. Les espaces propres associés sont

$$E_{-4} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \right\} , \qquad E_7 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Or si $\mathbf{v}_1 \in E_{-4}$ et $\mathbf{v}_2 \in E_7$ sont tous deux non-nuls, alors $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ est toujours libre. ⋄

10.5 Multiplicités algébriques et géométriques

L'utilisation des valeurs et vecteurs propres, dans l'étude d'une application linéaire, sera

Définition 10.24. Soit λ_k une valeur propre d'une matrice A. La **multiplicité algébrique de** λ_k est le plus grand entier n tel que $(\lambda - \lambda_k)^n$ divise $P_A(\lambda)$; on note cet entier $\text{mult}_a(\lambda_k)$.

En d'autres termes, si la factorisation complète du polynôme caractéristique contient

$$P_A(\lambda) = \cdots (\lambda - \lambda_k)^n \cdots ,$$

alors $\text{mult}_a(\lambda_k) = n$.

Remarque 10.25. On sait par le théorème fondamental de l'algèbre que $P_A(\lambda)$ possède au plus n racines réelles. Ceci signifie que si A possède les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, alors

$$\sum_{j=1}^{k} \text{mult}_a(\lambda_j) \leqslant n .$$

⋄

Exemple 10.26. Pour notre matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} ,$$

nous avions trouvé

$$P_A(\lambda) = (\lambda + 4)^1 (\lambda - 7)^1 ,$$

qui donne $\text{mult}_a(-4) = 1$, $\text{mult}_a(7) = 1$. ⋄

Exemple 10.27. Le polynôme caractéristique de la matrice identité I_n étant

$$P_{I_n}(\lambda) = (1 - \lambda)^n ,$$

l'unique valeur propre $\lambda_1 = 1$ est de multiplicité algébrique $\text{mult}_a(1) = n$. ⋄

Définition 10.28. Soit λ_k une valeur propre d'une matrice A. La **multiplicité géométrique de** λ_k est la dimension de son espace propre :

$$\text{mult}_g(\lambda_k) := \dim(E_\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda_k I_n)) .$$

Remarque 10.29. Par définition, une multiplicité géométrique est toujours $\geqslant 1$. ⋄

Théorème 10.30. *Soit λ_k une valeur propre de A. Alors*

$$\text{mult}_g(\lambda_k) \leqslant \text{mult}_a(\lambda_k) .$$

Preuve: Considérons une valeur propre de A, qu'on notera λ_0 pour simplifier, et son espace propre son espace propre associé, E_{λ_0}. Posons

$$k := \mathrm{mult}_g(\lambda_0) = \dim(E_{\lambda_0})\,,$$

et considérons des vecteurs propres $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ formant une base de E_{λ_0}. Complétons cette famille en une base de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_n)$$

Soit A' la matrice de l'application linéaire $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ relative à la base $\mathcal{B}$:

$$A' = \left[[T(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{B}} \cdots [T(\mathbf{v}_k)]_{\mathcal{B}} [T(\mathbf{w}_{k+1})]_{\mathcal{B}} \cdots [T(\mathbf{w}_n)]_{\mathcal{B}}\right]$$

Puisque chaque $\mathbf{v}_j 1$ est vecteur propre de T, $T(\mathbf{v}_j) = \lambda_0 \mathbf{v}_j$, A' a la structure suivante :

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & & & \\ & \ddots & & B \\ & & \lambda_0 & \\ \hline & 0 & & C \end{array}\right)$$

Maintenant, rappelons que A et A' sont semblables, et possèdent donc le même polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)\,.$$

Mais par la structure de A' donnée ci-dessus,

$$\begin{aligned} P_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda I_n) \\ &= \det \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 - \lambda & & & \\ & \ddots & & B \\ & & \lambda_0 - \lambda & \\ \hline & 0 & & C - \lambda I_{n-k} \end{array}\right) \\ &= (\lambda_0 - \lambda)^k \det(C - \lambda I_{n-k})\,. \end{aligned}$$

□

Exemple 10.31. Reprenons la matrice vue plus haut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avions calculé

$$P_A(\lambda) = -(1+\lambda)^{1}(2-\lambda)^{2}\,,$$

Nous avons donc deux valeurs propres,

- ⋆ $\lambda_1 = -1$, de multiplicité algébrique $\mathrm{mult}_a(\lambda_1) = 1$,
- ⋆ $\lambda_2 = 2$, de multiplicité algébrique $\mathrm{mult}_a(\lambda_2) = 2$,

En ce qui concerne les espaces propres,

$$E_{-1} = \ker(A + I_n) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

qui implique $\text{mult}_g(\lambda_1) = 1$, et

$$E_2 = \ker(A - 2I_n) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

qui implique $\text{mult}_g(\lambda_2) = 2$. Donc dans cet exemple,

$$\begin{aligned}\text{mult}_a(\lambda_1) &= \text{mult}_g(\lambda_1)\,,\\ \text{mult}_a(\lambda_2) &= \text{mult}_g(\lambda_2)\,.\end{aligned}$$

◇

Exemple 10.32. Considérons la matrice

$$B = \begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}$$

D'une part, son polynôme caractéristique est donné par

$$P_B(\lambda) = (3 - \lambda)^2\,,$$

et donc B ne possède qu'une valeur propre $\lambda_1 = 3$, de multiplicité algébrique $\text{mult}_a(\lambda_1) = 2$. Mais on a d'autre part que

$$E_1 = \ker(A - 3I_2) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\},$$

qui implique $\text{mult}_g(\lambda_1) = 1$. Donc dans ce cas,

$$\text{mult}_g(\lambda_1) < \text{mult}_a(\lambda_1)\,.$$

◇