Chapitre 3

Systèmes : formulation vectorielle

3.1 Systèmes : formulation matricielle

Dans ce chapitre, nous allons reformuler ce qui a été dit à propos des systèmes en utilisant le langage vectoriel de l'algèbre linéaire. Ceci aura plusieurs avantages, et mènera en particulier à une compréhension plus profonde des divers aspects liés à la recherche des solutions d'un système linéaire.

On peut voir un système $m \times n$ général, de la forme

$$(*) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

comme une égalité entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} .$$

Or on peut récrire cette dernière comme suit :

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} ,$$

dans laquelle on reconnaît maintenant, dans le membre de gauche, une combinaison linéaire *des colonnes de la matrice associée au système*, qui est donnée, rappelons-le, par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Récrivons la même chose de façon plus compacte, en commençant par définir le vecteur associé au second membre,

$$\mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

et récrivons la matrice du système comme une famille de colonnes,

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix},$$

où, la k-ème colonne est le vecteur de $\mathbb{R}^m$ donné par

$$\mathbf{a}_k := \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}.$$

Donc la recherche de solutions $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ au système $(*)$ est équivalente à demander si le membre de droite $\mathbf{b}$ appartient à la partie de $\mathbb{R}^m$ engendrée par les colonnes de A, c'est-à-dire si on peut écrire $\mathbf{b}$ comme une combinaison linéaire des colonnes de A :

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

Dans cette formulation, les inconnues $x_1, \dots, x_n$ jouent le rôle de coefficients de la combinaison linéaire.

Une dernière définition permettra de faire encore un pas dans la description du système $(*)$.

Définition 3.1. Soit A une matrice $m \times n$, dont la k-ème colonne est notée $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^m$,

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix},$$

et soit $\mathbf{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Le **produit de** A **par** $\mathbf{x}$ est le vecteur $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ défini par la combinaison linéaire

$$A\mathbf{x} := x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Le produit d'une matrice A ($m \times n$) par un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ crée donc un vecteur $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Cette transformation est l'exemple standard de ce que l'on appellera plus tard une *transformation linéaire*, puisqu'elle satisfait aux deux propriétés suivantes :

Lemme 2. *Soit A une matrice $m \times n$. Alors pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,*

a) $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$,

b) $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}$.

*Ensemble, ces deux propriétés constituent la **linéarité**.*

Preuve: Notons la matrice $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$, et les vecteurs

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Pour la première propriété,

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1 + y_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\mathbf{a}_n \\ &= \big(x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n\big) + \big(y_1\mathbf{a}_1 + \cdots + y_n\mathbf{a}_n\big) \\ &= A\mathbf{x} + A\mathbf{y}\,. \end{aligned}$$

Pour la deuxième,

$$\begin{aligned} A(\lambda\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \\ &= (\lambda x_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (\lambda x_n)\mathbf{a}_n \\ &= \lambda(x_1\mathbf{a}_1) + \cdots + \lambda(x_n\mathbf{a}_n) \\ &= \lambda\big(x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n\big) \\ &= \lambda\, A\mathbf{x}\,. \end{aligned}$$

□

Avec les notations introduites, on peut maintenant écrire le système $(*)$ sous une forme purement vectorielle :

$$(*) : \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

L'existence d'une solution $\mathbf{x}$, pour ce système, signifie donc qu'il existe au moins une façon d'écrire le membre de droite $\mathbf{b}$ comme combinaison linéaire des colonnes de A.

3.2 Sur le nombre de solutions d'un système linéaire (BIS)

Comme première application de la formulation vectorielle d'un système linéaire $m \times n$, revisitons le Théorème "$0, 1, \infty$", en donnant une preuve plus transparente que celle vue précédemment :

Théorème 3.2. *Soit A une matrice $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ un second membre, et soit $S_{(*)}$ l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ solutions de*

$$(*) : \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,,$$

Si $S_{(*)}$ n'est pas vide, alors soit il contient exactement un vecteur, soit il en contient une infinité.

Preuve: (La preuve est la même que dans la première version, mais formulée dans un langage vectoriel.) Supposons que $S_{(*)}$ n'est pas vide, et qu'il contient plus d'un élément. On a donc deux vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ distincts, tels que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \qquad A\mathbf{y} = \mathbf{b}\,.$$

Considérons un scalaire λ quelconque, et définissons

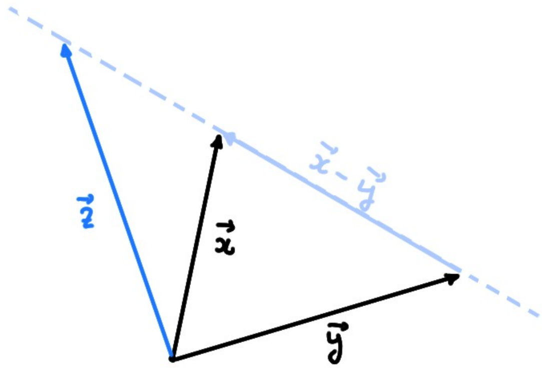
$$\mathbf{z} := \mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,.$$

Si λ est différent de 0 et 1, alors $\mathbf{z}$ est différent de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{y}$. Vérifions que $\mathbf{z}$ est aussi solution de $(*)$. En effet, par la linéarité démontrée dans le lemme,

$$A\mathbf{z} = A\big(\mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y})\big) = \underbrace{A\mathbf{y}}_{=\mathbf{b}} + \lambda\big(\underbrace{A\mathbf{x} - A\mathbf{y}}_{=\mathbf{b}-\mathbf{b}=\mathbf{0}}\big) = \mathbf{b}\,.$$

On peut donc, en choisissant λ, créer une infinité de nouvelles solutions.

La formulation vectorielle permet d'interpréter géométriquement la preuve donnée ci-dessus. En effet, on sait de la géométrie analytique que le vecteur $\mathbf{z} = \mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ a son extrémité située sur la droite passant $\mathbf{y}$, dirigée par $\mathbf{x} - \mathbf{y}$:



L'infinité de solutions vient du fait qu'il existe une infinité de vecteurs ayant tous leur extrémité sur cette droite. □

3.3 Systèmes homogènes et inhomogènes

Dans l'étude des systèmes $m \times n$ du type

$$(*) : \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,,$$

il sera important de distinguer ceux dont le second membre $\mathbf{b}$ est nul.

Définition 3.3. Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- ⋆ Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, le système $(*)$ est dit **homogène** :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}\,.$$

- ⋆ Si $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, le système $(*)$ est dit **inhomogène**.

Solutions des systèmes homogènes

Commençons par une remarque importante : *tout système homogène est compatible*. En effet, il possède toujours la **solution triviale** , donnée par le vecteur nul $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, puisque le produit d'une matrice par le vecteur nul donne toujours le vecteur nul :

$$A\mathbf{0} = \mathbf{0}\,.$$

(Attention, le "$\mathbf{0}$" du membre de gauche est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$, alors que le "$\mathbf{0}$" du membre de droite est le vecteur nul de $\mathbb{R}^m$!)

Exemple 3.4. Étudions le système 3×3 homogène donné par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

qui correspond au système triangulaire

$$\begin{cases} x_1 & & + & 2x_3 & = & 0 \\ & 3x_2 & & & = & 0 \\ & & - & 3x_3 & = & 0 \end{cases} ,$$

dont l'unique solution est $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. On conclut que dans ce cas, il n'y a pas d'autre solution que la solution triviale. ◇

Mais un système homogène peut posséder des solutions autres que la solution triviale. En fait, dès qu'il possède une solution autre que la triviale, on sait qu'il doit en posséder une infinité.

Exemple 3.5. Le système 3×3 homogène

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On voit que x_3 est libre, et donc que le système possède une infinité de solutions, décrites par

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

On retrouve bien-sûr la solution triviale en prenant $t = 0$, mais toute valeur $t \neq 0$ donne une solution non-triviale.

Remarquons encore que l'ensemble S ci-dessus n'est autre que la partie de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur non-nul $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$: $S = \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}\}$. On peut donc interpréter S comme l'ensemble de tous les vecteurs situés sur la droite dirigée par $\mathbf{v}$, passant par l'origine de $\mathbb{R}^3$. ◇

Informel 3.6. Remarquons que quand on travaille dans les réels, l'équation (avec $a \neq 0$)

$$ax = 0$$

ne possède que "$x = 0$" comme solution. Ici, un système homogène

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

peut posséder une infinité de solutions *non-nulles* (même si A contient des coefficients différents de zéro).

Exemple 3.7. Considérons le système homogène 2×4 suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Deux opérations élémentaires ($L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, suivie de $L_1 \leftrightarrow L_2$) mènent à la forme réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

qui correspond à

$$(*) \begin{cases} x_1 & & - & x_3 & & & = & 0 \\ & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{cases} ,$$

dans lequel $x_3 = s$ et $x_4 = t$ sont libres. On a donc

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -2s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\diamond$

Systèmes homogènes et indépendance linéaire

Par définition, le problème de savoir si une famille $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ est libre ou liée revient à étudier les familles de coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ pour lesquelles la condition

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

peut être satisfaite. D'un point de vue calculatoire, ce problème peut être reformulé comme suit.

Définissons la matrice $n \times p$,

$$A := \left[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_p \right] ,$$

et introduisons le vecteur

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p .$$

Alors $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ est libre si et seulement si le système homogène

$$A\alpha = \mathbf{0}$$

ne possède que la **solution triviale** : $\alpha = \mathbf{0}$.

Exemple 3.8. Soient

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

La famille $\mathcal{F} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ est-elle libre ou liée ?

Le système $A\alpha = \mathbf{0}$ correspondant est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui ne possède que la solution triviale. Donc $\mathcal{F}$ est libre. ◇

Cette façon de traiter l'indépendance linéaire permet d'énoncer un résultat général sur l'indépendance linéaire :

Théorème 3.9. *Dans $\mathbb{R}^n$, toute famille de plus de n vecteurs est liée.*

Preuve: Soit $\mathcal{F} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$, avec $p > n$. On peut ranger ces vecteurs dans une matrice $n \times p$, qui a plus de colonnes que de lignes :

$$A := [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_p] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix},$$

où a_{ij}, $i = 1, \dots, n$, sont les composantes du vecteur $\mathbf{v}_j$.

Maintenant, étudions la dépendance en considérant la relation linéaire

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

Celle-ci correspond au système $A\alpha = \mathbf{0}$, qui a pour matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & 0 \end{array}\right)$$

Puisque $p > n$, sa forme réduite doit contenir au moins une colonne ne contenant pas de pivot, et donc le système possède au moins une variable libre. Ceci implique, comme le second membre est nul, qu'il existe une infinité de solutions non-triviales, et donc que $\mathcal{F}$ est liée. □

Solutions des systèmes inhomogènes

Fixons maintenant un $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *non-nul*, et considérons le système inhomogène

$$(*) : \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

À l'opposé des systèmes homogènes (qui ont toujours au moins la solution triviale), il n'y a aucune garantie concernant l'existence d'une solution. Mais pour que la discussion ci-dessous ne soit pas vide, supposons que ce système est compatible : $S_{(*)} \neq \emptyset$. Notre but ci-dessous sera décrire une propriété générale de l'ensemble $S_{(*)}$.

Le résultat suivant va nous montrer que les solutions de ce système sont intimement liées à celle du **système homogène associé**, qui est celui avec la même matrice A, mais dans lequel on remplace $\mathbf{b}$ par $\mathbf{0}$:

$$(*)_h : \quad A\mathbf{x} = \mathbf{0}\,.$$

Théorème 3.10. *Supposons déjà connue une solution de $(*)$, que l'on nommera* ***particulière****, et que l'on notera $\mathbf{v}_p$. Alors toute autre solution de $(*)$, $\mathbf{v} \in S_{(*)}$, peut s'écrire comme*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_h\,,$$

où $\mathbf{v}_h$ est une certaine solution du problème homogène $(*)_h$ associé.

Preuve: Si $\mathbf{v} \in S_{(*)}$, alors

$$A\mathbf{v} = \mathbf{b}\,.$$

Mais puisque $\mathbf{v}_p \in S_{(*)}$, on a aussi

$$A\mathbf{v}_p = \mathbf{b}\,.$$

En soustrayant ces deux dernières expressions, on obtient

$$A\mathbf{v} - A\mathbf{v}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}\,.$$

Par linéarité, ceci implique que

$$A(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p) = \mathbf{0}\,.$$

Ainsi, en définissant $\mathbf{v}_h := \mathbf{v} - \mathbf{v}_p$, cette dernière dit bien que $\mathbf{v}_h$ est solution du problème homogène associé : $A\mathbf{v}_h = \mathbf{0}$. Puisque $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_h$, ceci démontre le résultat. □

Ce théorème peut être résumé comme suit : si on connaît seulement *une* solution du système $(*)$, et si on sait complètement résoudre le système homogène associé $(*)_h$, alors on connaît *toutes* les solutions du système $(*)$. Plus concrètement, pour résoudre $(*)$, on pourra procéder comme suit :

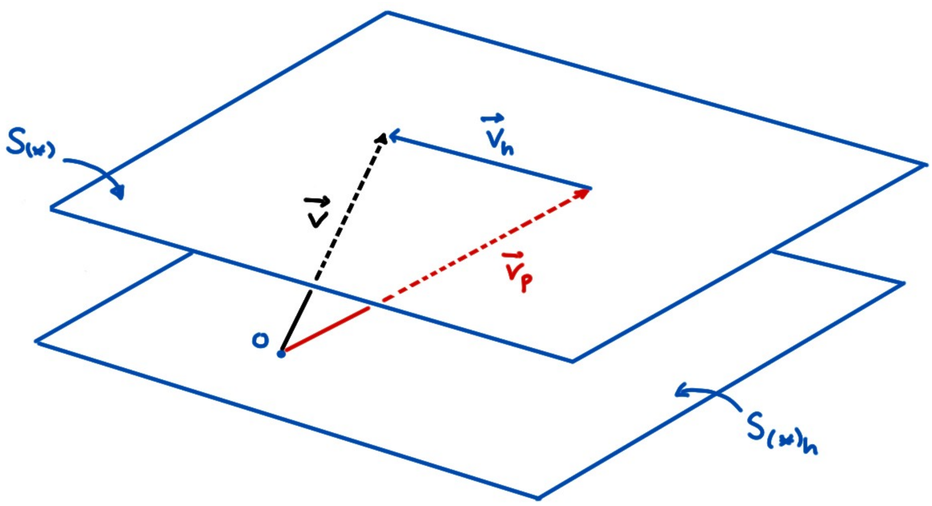
a) Chercher une solution particulière $\mathbf{v}_p$ de $(*)$.

b) Résoudre le système homogène associé $(*)_h$, c'est-à-dire trouver l'ensemble $S_{(*)_h}$.

c) Combiner les deux, pour produire

$$S_{(*)} = \left\{ \mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_h \,|\, \mathbf{v}_h \in S_{(*)_h} \right\}.$$

Interprétation géométrique :



Voyons comment cette structure peut s'observer sur un exemple concret.

Exemple 3.11. Considérons le système 3×3 suivant :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 7 \\ -x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 & = & -9 \end{array} \right.$$

qui correspond à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que le vecteur

$$\mathbf{v}_p := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est solution du système. En effet,

$$A\mathbf{v}_p = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \mathbf{b}\,.$$

On a donc une solution particulière $\mathbf{v}_p$. On sait maintenant, par le théorème, que l'on aura toutes les autres solutions en résolvant le système homogène associé, c'est-à-dire

$$(*)_h : \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En procédant comme d'habitude, on obtient

$$S_{(*)_h} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

On sait donc, par le théorème, que toutes les solutions du problème inhomogène sont données par

$$\begin{aligned} S_{(*)} &= \left\{ \mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_h \,|\, \mathbf{v}_h \in S_{(*)_h} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Bien-sûr, on observe cette structure aussi si on résout le système avec la technique habituelle. En partant de la matrice augmentée,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 7 \\ -1 & 5 & 7 & -9 \end{array} \right),$$

dont l'échelonnage mène à identifier la variable libre $x_3 = t$, on trouve

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 + 2t\,, \\ x_2 &= -1 - t\,, \\ x_3 &= t\,. \end{aligned}$$

Vectoriellement, on peut écrire l'ensemble des solutions comme

$$S_{(*)} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

On voit donc encore une fois la structure "solution particulière + toutes les solutions du problème homogène associé". $\diamond$

3.4 Applications linéaires : introduction

Plus haut, nous avons défini le membre de droite d'un système $m \times n$, à savoir "$A\mathbf{x}$", comme le produit d'une matrice (de taille $m \times n$) A par le vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ce produit étant défini comme une combinaison linéaire des colonnes de A, $A\mathbf{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

La multiplication par une matrice $m \times n$ est donc une opération qui transforme les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ en des vecteurs de $\mathbb{R}^m$. C'est un cas particulier d'une **application (ou fonction) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$** :

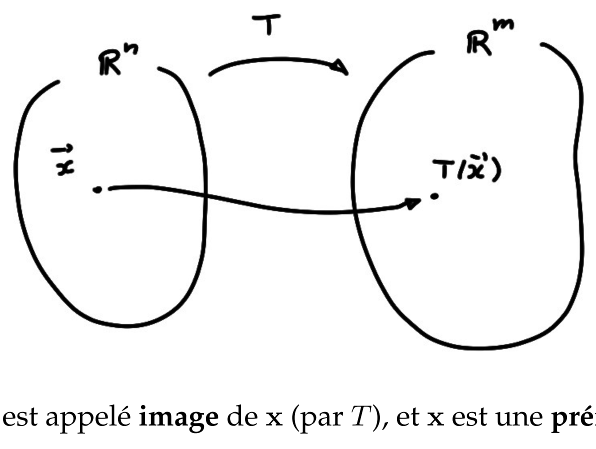
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\mapsto A\mathbf{x}\,. \end{aligned}$$

Si nécessaire, quelques notions générales sur les fonctions sont rappelées **ici** (lien web).

Applications : le point de vue général

Plus généralement, une application n'est pas forcément définie à l'aide d'une matrice. On utilisera souvent la lettre "T" pour représenter une application générique :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\mapsto T(\mathbf{x})\,. \end{aligned}$$



Le vecteur $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ est appelé **image** de $\mathbf{x}$ (par T), et $\mathbf{x}$ est une **préimage** de $\mathbf{y}$.

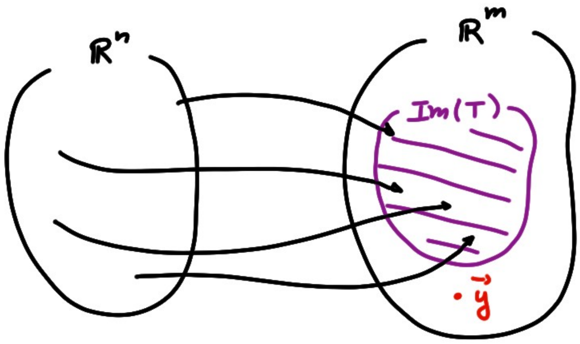
Considérons un instant une équation du type suivant

$$(*)\ :\ T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\,,$$

où le membre de droite $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ est fixé. L'existence d'au moins une solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pour cette équation, revient à demander si $\mathbf{b}$ fait partie des éléments de l'ensemble d'arrivée qui sont "atteints" par l'application, c'est-à-dire pour lesquels il existe au moins une préimage. Ceci mène à la définition suivante :

Définition 3.12. L'**ensemble image** de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est défini par

$$\mathrm{Im}(T) := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \ : \ \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } T(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \right\}.$$



On a donc, pour l'équation $(*)$ ci-dessus :

- $\star$ Si $\mathbf{b} \notin \mathrm{Im}(T)$, alors $(*)$ ne possède aucune solution.
- $\star$ Si $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(T)$, alors $(*)$ possède au moins une solution.

Définition de la linéarité

Définition 3.13. Une application

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\mapsto T(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

est dite **linéaire** si elle satisfait aux deux propriétés suivantes :

a) $T(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}')$ pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$.

b) $T(\lambda \mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x})$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 3.14. Considérons l'application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie ainsi :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_3 + 7x_1 \end{pmatrix}$$

Montrons, "à la main", uniquement à l'aide de la définition de linéarité, que T est linéaire. Pour ce faire, prenons un $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et un scalaire λ. On utilise la définition de T pour calculer

$$\begin{aligned} T(\lambda \mathbf{x}) &= T\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} (-\lambda x_1) + 3(\lambda x_2) + 5(\lambda x_3) \\ (\lambda x_3) + 7(\lambda x_1) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 + 5\lambda x_3 \\ x_3 + 7x_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda T(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ensuite, pour toute paire $\mathbf{x}, \mathbf{y}$,

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= T\Big(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}\Big) \\
&= \begin{pmatrix} -(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)+5(x_3+y_3) \\ (x_3+y_3)+7(x_1+y_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -x_1+3x_2+5x_3 \\ x_3+7x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_1+3y_2+5y_3 \\ y_3+7y_1 \end{pmatrix} \\
&= T(\mathbf{x})+T(\mathbf{y})\,.
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que T est linéaire. ◇

Nous avons déjà vu que si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, et si il existe une matrice $m \times n$ telle que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,,$$

alors T est linéaire . Mais a priori, une application peut être linéaire sans forcément être associée à une matrice.

Exemple 3.15. Si on reprend l'application T de l'exemple précédent, on peut remarquer que

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1+3x_2+5x_3 \\ x_3+7x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}\,.$$

Ainsi, T est linéaire. ◇

Pour montrer qu'une application n'est *pas* linéaire, il suffit de montrer qu'une des deux conditions qui définit la linéarité n'est pas satisfaite, en exhibant un *contre-exemple*. On pourra donc

- ⋆ soit trouver un $\mathbf{x}_*$ et un scalaire λ tel que $T(\lambda\mathbf{x}_*) \neq \lambda T(\mathbf{x}_*)$,
- ⋆ soit trouver deux vecteurs $\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*$ tels que $T(\mathbf{x}_*+\mathbf{y}_*) \neq T(\mathbf{x}_*)+T(\mathbf{y}_*)$.

Exemple 3.16. Considérons l'application $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

L'apparition de la multiplication "x_1x_2" indique que cette application n'est probablement pas linéaire. Comme contre-exemple, prenons $\lambda = 2$, et $\mathbf{x}_* = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. On a

$$T(\lambda\mathbf{x}_*) = T\Big(2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\Big) = T\Big(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}\,,$$

alors que

$$\lambda T(\mathbf{x}_*) = 2T\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\Big) = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

On a donc $T(\lambda\mathbf{x}_*) \neq \lambda T(\mathbf{x}_*)$, ce qui implique que T n'est pas linéaire. ◇

Pour la suite...

Nous aurons encore beaucoup à dire sur les applications linéaires, qui sont les vraies "fonctions" étudiées en algèbre linéaire (un peu comme les fonctions continues sont les fonctions les plus étudiées en analyse).

Mais avant d'en dire plus, nous allons faire un pause, dans le chapitre suivant, et reprendre tout ce que nous avons fait jusqu'ici, en adoptant un point de vue beaucoup plus général, celui des *espaces vectoriels* abstraits. Nous introduirons plus de choses dans ce cadre, en particulier à propos des applications linéaires d'un espace vectoriel dans un autre. Plus tard, nous appliquerons alors ces notions lorsque nous reviendrons plus en profondeur sur les applications linéaires du type $\mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.