Chapitre 6

Le produit matriciel

6.1 Définition

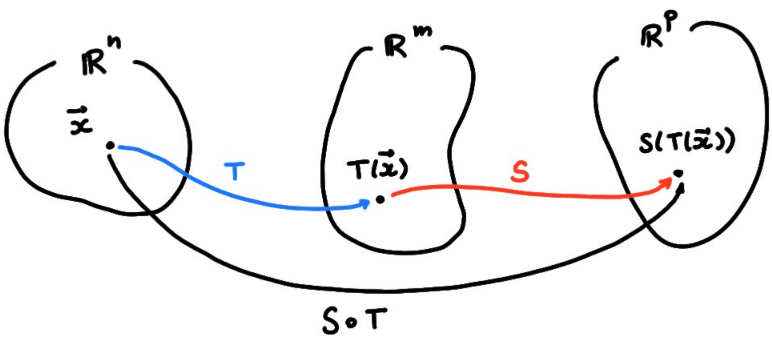
Le *produit* de deux matrices est motivé par la *composition* d'applications linéaires.

Or lorsqu'on veut *composer* deux applications, il faut que les ensembles qui apparaissent dans leurs définitions soient compatibles.

- ⋆ Soit donc
$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
une application linéaire, dont la matrice $m \times n$ est notée A. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la k-ème composante $(1 \leqslant k \leqslant m)$ de $T(\mathbf{x})$ est donnée par
$$(T(\mathbf{x}))_k = (A\mathbf{x})_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \,.$$

- ⋆ Soit ensuite
$$S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$$
une autre application linéaire, dont la matrice $p \times m$ est notée B. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, la k-ème composante $(1 \leqslant k \leqslant p)$ de $S(\mathbf{x})$ est donnée par
$$(S(\mathbf{x}))_k = (B\mathbf{x})_k = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} x_j \,.$$

Puisque l'ensemble d'arrivée de T est l'ensemble de départ de S, on peut les composer :



La **composition** est définie par

$$\begin{aligned} S \circ T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^p \\ \mathbf{x} &\mapsto (S \circ T)(\mathbf{x}) := S(T(\mathbf{x}))\,. \end{aligned}$$

Informel 6.1. Attention, même si on lit le symbole “$S \circ T$” de gauche à droite, en disant “*S composée avec T*”, c'est pourtant T que l'on applique en premier, suivie de S !

On peut vérifier (exercice !) que la composée $S \circ T$ est linéaire ; elle peut donc être représentée par une matrice. Quelle est cette matrice ?

Calculons la k-ème composante de $(S \circ T)(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} (S \circ T)(\mathbf{x})_k = (S(T(\mathbf{x})))_k &= (B(A\mathbf{x}))_k \\ &= \sum_{j=1}^{m} b_{kj}(A\mathbf{x})_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} b_{kj} \sum_{l=1}^{n} a_{jl}x_l \\ &= \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{m} b_{kj}a_{jl}\Big)}_{=:c_{kl}} x_l\,. \end{aligned}$$

On voit qu'après avoir interverti les sommes sur j et l, on a pu définir des coefficients c_{kl}, qui sont les coefficients d'une matrice $p \times n$, notée C, qui permet d'écrire

$$(S \circ T)(\mathbf{x})_k = \sum_{l=1}^{n} c_{kl}x_l = (C\mathbf{x})_k\,.$$

On a donc trouvé la matrice associée à $S \circ T$, et on sait calculer ses coefficients en fonction de ceux de A et B.

Définition 6.2. Soient $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times m$, et $A = (a_{ij})$ une matrice $m \times n$. Le **produit matriciel de** B **par** A est la matrice $p \times n$, notée $C = BA$, dont les coefficients sont définis par

$$c_{kl} := \sum_{j=1}^{m} b_{kj}a_{jl}\,.$$

L'expression ci-dessus pour le coefficient c_{kl} montre que ce dernier se calcule en parcourant la k-ème ligne de A et la l-ème colonne de B.

Exemple 6.3. Calculons un produit $BA = C$, pour des matrices 4×4 :

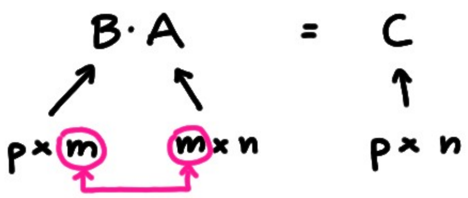
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 11 & -3 \\ 2 & 11 & \mathbf{10} & 9 \\ 3 & 6 & 7 & -6 \\ 4 & 52 & 12 & 30 \end{pmatrix}}_{C}$$

Comme exemple, on a indiqué le calcul de

$$\begin{aligned} c_{23} &= \sum_{j=1}^{4} b_{2j} a_{j3} \\ &= b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33} + b_{24}a_{43} \\ &= 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = \mathbf{10} \end{aligned}$$

◇

Informel 6.4. On peut multiplier deux matrices de dimensions différentes, BA, mais ces dimensions doivent être compatibles : le nombre de colonnes de B doit être égal au nombre de lignes de A.



Exemple 6.5. Le produit d'une 3×2 par une 2×4 est bien défini :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}}_{2\times 4} = \underbrace{\begin{pmatrix} a+5b & 2a+6b & 3a+7b & 4a+8b \\ c+5d & 2c+6d & 3c+7d & 4c+8d \\ e+5f & 2e+6f & 3e+7f & 4e+8f \end{pmatrix}}_{3\times 4}$$

Par contre, dans l'ordre inverse, le produit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}}_{2\times 4} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}}_{3\times 2} \qquad \text{n'est pas défini !}$$

◇

Quelques remarques :

- ⋆ Un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ peut s'interpréter comme une matrice $n \times 1$. Donc la multiplication d'une matrice $m \times n$ par $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, peut s'interpréter comme le produit matriciel d'une $m \times n$ par une $n \times 1$, qui donne une $A\mathbf{x}$ qui est $m \times 1$, c'est-à-dire un vecteur de $\mathbb{R}^m$.
- ⋆ Pour le produit d'une $1 \times n$ par une $n \times 1$, on obtient une matrice 1×1, qui n'est autre qu'un réel :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{x_1y_1 + \cdots + x_ny_n}_{\in\mathbb{R}} .$$

- ⋆ Par contre, le produit d'une $m \times 1$ par une $1 \times n$ donne évidemment une $m \times n$. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay & az & at \\ bx & by & bz & bt \\ cx & cy & cz & ct \end{pmatrix}$$

⋆ Considérons le produit de A ($m \times n$) par B ($n \times p$). Si on exprime B à l'aide de ses p colonnes, qui sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$
$$B = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_p]\,,$$
alors le produit AB peut s'écrire à l'aide de ses p colonnes :
$$AB = [A\mathbf{b}_1 \cdots A\mathbf{b}_p]\,,$$
où chaque colonne $A\mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^m$

6.2 Propriétés

Proposition 5. *Le produit matriciel satisfait aux propriétés suivantes. (Ci-dessous, on suppose que les dimensions des matrices sont toujours compatibles.)*

1) $A(BC) = (AB)C$ *(⚠ **associativité**)*
2) $A(B + C) = AB + AC$ *(**distributivité**)*
3) $(A + B)C = AC + BC$ *(**distributivité**)*
4) $A(\lambda B) = \lambda(AB) = (\lambda A)B$
5) $(AB)^T = B^T A^T$

Preuve: Les premières propriétés seront vérifiées en exercices. Pour la dernière, considérons A de dimensions $m \times n$, et B de dimensions $n \times p$, et calculons l'élément ij de $(AB)^T$:
$$\begin{aligned}((AB)^T)_{ij} &= (AB)_{ji}\\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki}\\ &= \sum_{k=1}^{n} (A^T)_{kj}(B^T)_{ik}\\ &= \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik}(A^T)_{kj}\\ &= (B^T A^T)_{ij}\,.\end{aligned}$$

□

L'associativité signifie que l'on n'a pas besoin d'utiliser de parenthèses lorsqu'on multiplie plusieurs matrices : les produits peuvent s'effecteur dans n'importe quel ordre. Donc au lieu de $A(BC)$ ou $(AB)C$, on peut simplement écrire ABC.

Ce qu'on n'a pas le droit de faire, par contre, c'est de changer l'ordre des matrices dans un produit : **le produit matriciel n'est pas commutatif**. De fait, en général, même pour des matrices A, B de dimensions compatibles,
$$AB \neq BA\,.$$

En effet, commençons par remarquer que si A est $m \times n$, alors AB et BA sont toutes deux bien définies seulement si B est $n \times m$. Mais alors AB est $m \times m$ et BA est $n \times n$, donc AB et BA sont de dimensions différentes dès que $m \neq n$. Donc pour que les deux matrices AB et BA soient toutes les deux définies et égales, il faut déjà que A et B soient **carrées**, de même dimension $n \times n$.

Or même si A et B sont carrées et de mêmes dimensions, en général $AB \neq BA$.

Exemple 6.6. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
BA &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

et donc $AB \neq BA$. ◇

Définition 6.7. Si A, B sont telles que $AB = BA$, on dit qu'elles **commutent**.

Mentionnons encore une différence importante qui distingue le calcul matriciel du calcul réel. On sait que dans les réels, un produit nul

$$ab = 0$$

implique qu'au moins un des nombres a, b est nul. Par contre, on peut avoir un produit matriciel nul,

$$AB = 0\,,$$

sans qu'aucune des matrices A, B ne soit identiquement nulle (voir exercices).

Matrice identité

Définition 6.8. La **matrice identité** I_n est la matrice $n \times n$ définie par

$$
I_n := \mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

L'action de I_n sur un vecteur n'a aucun effet :

$$I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}\,, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,.$$

De plus, la matrice identité est **l'élément neutre** pour la multiplication des matrices carrées $n \times n$, puisqu'on a, pour toute matrice A ($n \times n$),

$$AI_n = I_nA = A\,.$$

I_n est d'ailleurs la seule matrice qui commute avec toute matrice $n \times n$ (voir exercices).