Chapitre 14

Matrices symétriques et orthogonales

14.1 Définitions

Dans ce chapitre, on ne traitera que des matrices carrées.

Définition 14.1. Une matrice A $(n \times n)$ est **symétrique** si $A^T = A$, c'est-à-dire si

$$a_{ji} = a_{ij} \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Donc une matrice symétrique a ses coefficients symétriques par rapport à la diagonale.

Exemple 14.2. $\star$ La matrice identité I_n est symétrique.

$\star$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ est symétrique.

$\star$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique.

$\diamond$

Avant de commencer l'étude des propriétés remarquables des matrices symétriques, introduisons une autre classe de matrices, intimement liées (comme on le verra) aux matrices symétriques :

Définition 14.3. Une matrice A $n \times n$ est **orthogonale** si

$$A^T A = A A^T = I_n\,.$$

De par sa définition, une matrice A orthogonale est inversible, et son inverse est égale à sa transposée :

$$A^{-1} = A^T\,.$$

Aussi, on sait qu'il suffit qu'un des conditions ($A^T A = I_n$ ou $AA^T = I_n$) soit satisfaite pour garantir l'orthogonalité.

De plus, on a déjà vu que si on écrit une matrice carrée à l'aide de ses colonnes, $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$, alors on peut interpréter chaque coefficient du produit $A^T A$ comme un produit scalaire :

$$A^T A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_1 & \cdots & \cdots & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, A est orthogonale ($A^TA = I_n$) si et seulement si

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j\,, \\ 0 & \text{si } i \neq j\,, \end{cases}$$

Autrement dit :

Lemme 20. *$A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]$ est orthogonale si et seulement si ses colonnes sont des vecteurs unitaires ($\|\mathbf{a}_k\| = 1$ pour tout $k = 1, \dots, n$) et orthogonaux deux à deux ($\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$ si $i \neq j$).*

Il y a donc autant de matrices $n \times n$ orthogonales qu'il y a de familles orthonormales de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple 14.4. $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ est orthogonale, puisque ses colonnes sont unitaires et orthogonales deux-à-deux. Par conséquent, son inverse est donné par

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

⋄

En général, dans le cas $n \times n$, on parle des matrices orthogonales comme des **rotations**, puisqu'elles représentent des transformations *rigides, qui préservent l'orthogonalité*. Nous reviendrons là-dessus.

14.2 Sur les espaces propres d'une matrice symétrique

Commençons par une propriété élémentaire du produit scalaire :

Lemme 21. *Soit B une matrice $n \times n$ quelconque. Alors pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,*

$$(B\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (B^T\mathbf{y})\,.$$

En particulier, si B est symétrique, alors

$$(B\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (B\mathbf{y})\,.$$

Preuve: Par l'interprétation matricielle du produit scalaire,

$$(B\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (B\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^TB^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T(B^T\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (B^T\mathbf{y})\,.$$

□

Une conséquence immédiate :

Corollaire 7. *Soit G une matrice $n \times n$ orthogonale. Alors pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,*

- ⋆ $(G\mathbf{x}) \cdot (G\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$,
- ⋆ $\|G\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

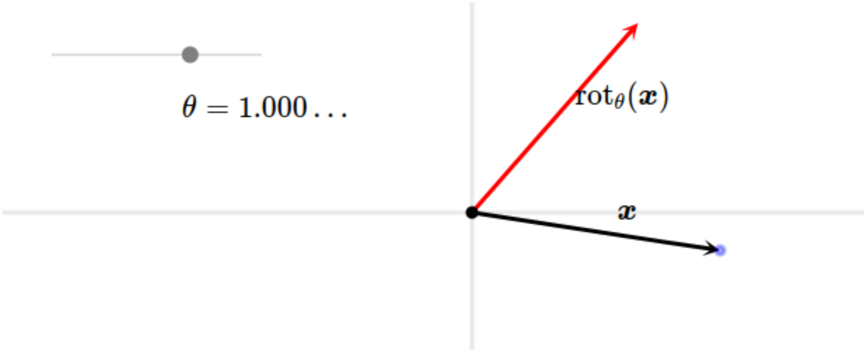
Preuve: Supposons que G est orthogonale. Par le lemme précédent,

$$(G\mathbf{x}) \cdot (G\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (G^TG\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\,.$$

La deuxième identité s'obtient en prenant $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. □

Remarque 14.5. La deuxième propriété montre qu'une application linéaire définie par une matrice orthogonale est une **isométrie**, c'est-à-dire qu'elle ne change pas la longueur d'un vecteur (seulement sa direction). ◇

Exemple 14.6. Un exemple typique d'isométrie est la rotation d'angle θ dans le plan :



Rappelons que relativement à la base canonique, la matrice de cette rotation est donnée par

$$[\mathrm{rot}_\theta]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} .$$

Cette matrice est orthogonale puisque ses colonnes sont unitaires et perpendiculaires entre elles :

$$\begin{aligned} {[\mathrm{rot}_\theta]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}}^T [\mathrm{rot}_\theta]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= I_2 . \end{aligned}$$

◇

On sait que pour une matrice quelconque, des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont indépendants. Pour une matrice symétrique, cette propriété est vérifiée dans un sens plus fort :

Corollaire 8. *Soit A une matrice $n \times n$ symétrique. Si $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont deux vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes, alors $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$.*

Preuve: Si $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2$, alors

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = (\lambda_1 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 &= (A\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1 \cdot (A\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \cdot (\lambda_2 \mathbf{v}_2) = \lambda_2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) , \end{aligned}$$

qui implique $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = 0$. Donc si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a forcément que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. □

Dans l'exemple suivant, nous vérifierons ce résultat sur un exemple concret, et nous observerons encore une propriété qui sera énoncée comme un résultat général dans la prochaine section.

Exemple 14.7. Étudions les espaces propres de la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

On calcule son polynôme caractéristique,

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 6-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda+2)(\lambda-7)^2 \,. \end{aligned}$$

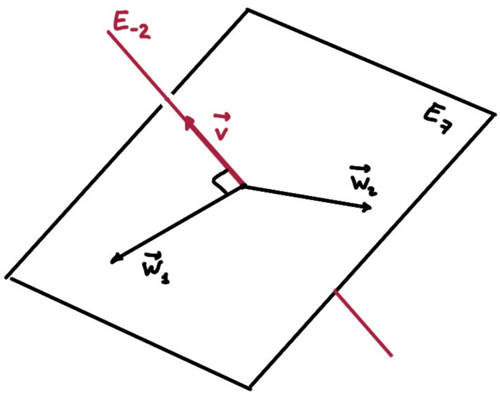
Donc A possède deux valeurs propres, $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 7$. Les espaces propres associés se calculent facilement :

- ⋆ $E_{-2} = \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}\}$, où $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,
- ⋆ $E_7 = \mathrm{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, où $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On remarque qu'effectivement, $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}_1$, et $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}_2$, et donc n'importe quel vecteur de E_{-2} est orthogonal à n'importe quel autre vecteur de E_7. En d'autres termes :

$$E_{-2}{}^{\perp} = E_7 \,, \qquad E_7{}^{\perp} = E_{-2} \,.$$

(Pourtant, $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ ne sont pas orthogonaux entre eux.)



Remarquons aussi que

$$\sum_{k=1}^{2} \mathrm{mult}_g(\lambda_k) = 1 + 2 = 3 \,,$$

ce qui implique que A est diagonalisable. En prenant par exemple

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \,, \quad P = [\mathbf{v}\,\mathbf{w}_1\,\mathbf{w}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \,,$$

on obtient la diagonalisation $A = PDP^{-1}$.

Mais rappelons que l'on peut former la matrice de changement de base en choisissant les vecteurs propres que l'on veut, tant qu'ils forment une base des espaces propres concernés, et que l'on respecte l'ordre des valeurs propres dans la matrice diagonale D.

Donc on peut très bien, si on veut, commencer par orthogonaliser la base de E_7 avant de mettre en place P :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1' &:= \mathbf{w}_1\,, \\ \mathbf{w}_2' &:= \mathbf{w}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{w}_1}(\mathbf{w}_2) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, une autre diagonalisation de A serait $A = QDQ^{-1}$, avec la même matrice D qu'avant, et

$$Q = [\mathbf{v}\, \mathbf{w}_1'\, \mathbf{w}_2'] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Cette fois, les colonnes de Q *sont orthogonales deux à deux*. Or rien ne nous empêche de les normaliser avant de définir Q :

$$R = \left[\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\, \frac{\mathbf{w}_1'}{\|\mathbf{w}_1'\|}\, \frac{\mathbf{w}_2'}{\|\mathbf{w}_2'\|} \right],$$

qui donne une troisième diagonalisation de A : $A = RDR^{-1}$ (avec D la même matrice qu'avant). Mais ici, R étant orthogonale, son inverse est $R^{-1} = R^T$, et donc le changement de base devient

$$A = RDR^T.$$

On a donc pu *diagonaliser A dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.* ◇

Nous verrons, dans la section suivante, que ce que nous avons fait sur ce dernier exemple peut se faire avec *n'importe quelle matrice symétrique*.

14.3 Théorème et décomposition spectrale

Le Théorème Spectral

Un des résultats importants de l'algèbre linéaire :

Théorème 14.8. *(Théorème spectral) Soit A une matrice $n \times n$. Alors A symétrique si et seulement si elle peut se diagonaliser à l'aide d'une matrice de changement de base orthogonale.*

On dit que les matrices symétriques sont **orthogonalement diagonalisables**.
Preuve: $\Leftarrow$: Supposons que A peut se diagonaliser à l'aide d'une matrice de changement de base G orthogonale : $A = GDG^T$. Alors

$$A^T = (GDG^T)^T = (G^T)^T D^T G^T = GDG^T = A\,,$$

donc A est symétrique.

$\Rightarrow$: Donnons la preuve dans le cas $n = 2$. Soit A une matrice 2×2 symétrique, que l'on écrit comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Montrons que A est toujours diagonalisable, quelles que soient les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$. Commençons donc par calculer les valeurs propres, à l'aide du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 \\ &= \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac-b^2)\,. \end{aligned}$$

Calculons le discriminant

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2\,.$$

Cette dernière ligne montre que l'on a toujours $\Delta \geqslant 0$, et donc toujours au moins une valeur propre. Distinguons les cas.

1) $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2 = 00$. Ceci signifie que $a = c$ et $b = 0$, et donc que A est en fait la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\,,$$

qui est déjà diagonale ! On peut évidemment l'écrire comme $A = I_2 A I_2^T$.

2) $\Delta > 0$. Dans ce cas, P_A possède deux racines distinctes

$$\lambda_\pm = \frac{a+c\pm\sqrt{\Delta}}{2}\,.$$

Si on considère un vecteur propre quelconque $\mathbf{v}_+$ associé à λ_+, et un vecteur propre quelconque $\mathbf{v}_-$ associé à λ_-, on sait par le corollaire de la section précédente que $\mathbf{v}_+ \perp \mathbf{v}_-$. Ainsi, la matrice

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{v}_+}{\|\mathbf{v}_+\|} & \frac{\mathbf{v}_-}{\|\mathbf{v}_-\|} \end{bmatrix}$$

est orthogonale, et permet de diagonaliser A : $A = GDG^T$, où $D = \operatorname{diag}(\lambda_+, \lambda_-)$.

La preuve du cas général $n \geqslant 3$ est plus compliquée, nous ne la donnons pas ici.

□

Exemple 14.9. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} & \sqrt{8} & \sqrt{11} \\ \sqrt{2} & \sqrt{\pi} & \pi & \pi^2 & \pi^3 & \pi^2 & \pi \\ \sqrt{3} & \pi & -1 & e & -e & e & -e \\ \sqrt{5} & \pi^2 & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & \pi^3 & -e & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{8} & \pi^2 & e & 0 & 1 & 2 & 2 \\ \sqrt{11} & \pi & -e & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

étant symétrique, le Théorème Spectral s'applique : elle est diagonalisable. Il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale G telles que $A = GDG^T$. ◇

Décomposition spectrale

Voyons comment le Théorème Spectral permet de *représenter* l'application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associée à une matrice $n \times n$ symétrique A,

$$\mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}\,.$$

En effet, le Théorème Spectral garantit que A peut être diagonalisée à l'aide d'une matrice de changement de base orthogonale :

$$A = GDG^{-1} = GDG^T$$

Ici, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est formée de valeurs propres de A (pas forcément distinctes), et G est formée de vecteurs propres associés, formant une base orthonormale $(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$G = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n\end{bmatrix},$$

On peut donc écrire, pour un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ quelconque,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = GDG^T\mathbf{x} &= \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n\end{bmatrix} D \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T\mathbf{x}\end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\lambda_1\mathbf{u}_1 \cdots \lambda_n\mathbf{u}_n\end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T\mathbf{x}\end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{x} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T\right) \mathbf{x}\,. \end{aligned}$$

On peut donc écrire A comme une combinaison linéaire de matrices :

$$\boxed{A = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T\,.}$$

On sait que chaque $\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^T$ est une matrice $n \times n$, et représente le projecteur sur $\mathbf{u}_k$. En effet, puisque chaque $\mathbf{u}_k$ est unitaire,

$$\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^T\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2}\mathbf{u}_k = \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{x})\,.$$

On a donc pu récrire l'applications linéaire T comme la combinaison linéaire de projecteurs :

$$\boxed{T = \sum_{k=1}^n \lambda_k \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_k}\,.}$$

Définition 14.10. Les représentations de A et T à l'aide de projecteurs sur les espaces propres de A sont appelées **décompositions spectrales**.

Remarque 14.11. La représentation spectrale dépend bien-sûr du choix des vecteurs propres pour la matrice ; elle n'est donc pas unique. ◇

Une décomposition spectrale fournit une interprétation très *géométrique* de comment A agit sur un vecteur $\mathbf{x}$.

En effet, l'expression

$$A\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{x})$$

montre que $A\mathbf{x}$ est une somme vectorielle, dans laquelle chaque terme, $\lambda_k \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{x})$, a une interprétation très claire :

1) Projeter $\mathbf{x}$ sur $\mathbf{u}_k$.

2) Amplifier cette projection par la valeur propre λ_k.

L'intérêt est que l'on peut travailler indépendamment pour chaque $k = 1, 2, \dots, n$, puis les sommer.

Voyons comment réaliser concrètement cette décomposition, dans des cas particuliers.

Exemple 14.12. Considérons la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

On vérifie facilement que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, et que leurs espaces propres associés sont

- $\star$ $E_{-1} = \text{Vect}\{\mathbf{v}\}$, où $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- $\star$ $E_3 = \text{Vect}\{\mathbf{w}\}$, où $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

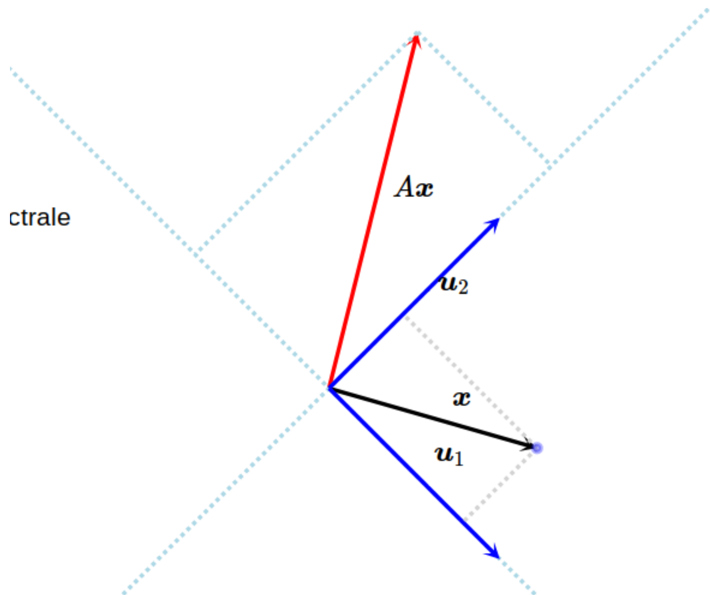
(On observe à nouveau, comme on sait, que ces espaces sont orthogonaux.) Pour faire la décomposition spectrale, on a besoin de vecteurs propres unitaires. On peut par exemple prendre

$$\mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{u}_2 := \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Maintenant, la décomposition spectrale de A est donnée par

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{x} \\ &= (-1)\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + 3\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T \\ &= (-1)\text{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x}) + 3\text{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x}) . \end{aligned}$$

L'interprétation géométrique de la transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ devient limpide :



Vérifions encore, pourquoi pas :

$$\begin{aligned}
&(-1)\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + 3\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T = \\
&\quad = (-1)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&\quad = (-1)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A\,.
\end{aligned}$$

◇

Exemple 14.13. Considérons la matrice symétrique déjà étudiée plus haut :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A possède deux valeurs propres, $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 7$, et nous avions appliqué le procédé de Gram-Schmidt pour trouver

- ⋆ $E_{-2} = \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}\}$, où $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$,
- ⋆ $E_7 = \mathrm{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, où $\mathbf{w}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2' = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

En normalisant ces vecteurs,

$$\mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\,, \qquad \mathbf{u}_2 := \frac{\mathbf{w}_1'}{\|\mathbf{w}_1'\|} \qquad \mathbf{u}_3 := \frac{\mathbf{w}_2'}{\|\mathbf{w}_2'\|}$$

on a obtenu une matrice de changement de base, orthogonale,

$$R = [\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2\,\mathbf{u}_3]\ ,$$

qui donne $A = RDR^T$.

Donc la décomposition spectrale obtenue est

$$A = (-2)\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + 7\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T + 7\mathbf{u}_3\mathbf{u}_3^T\,.$$

◇