Chapitre 7

Inversion

7.1 Motivation

Un des axiomes qui définit le corps des nombres réels est qu'il existe pour tout réel $a \neq 0$ un *inverse*, à savoir un nombre noté a^{-1} tel que

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1\,,$$

ou le nombre "1" est l'élément neutre pour la multiplication dans les réels (c'est-à-dire que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). C'est à l'aide de la notion d'inverse que l'on résout une équation du genre

$$ax = b\,,$$

où $a \neq 0$. En effet, en multipliant des deux côtés de l'équation par a^{-1}, on trouve

$$\underbrace{a^{-1}a}_{=1} x = a^{-1}b\,,$$

et donc $x = a^{-1}b$.

Pour les matrices, on aimerait idéalement pouvoir résoudre un système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

de la même façon. En effet, si on sait qu'il existe une matrice A^{-1} telle que $A^{-1}A = I_n$, alors en multipliant à gauche des deux côtés de l'équation vectorielle ci-dessus,

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I_n}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}\,,$$

qui donne $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Cette approche peut sembler élégante, mais elle présuppose qu'il existe une matrice A^{-1} telle que $A^{-1}A = I_n$. Or une telle matrice n'existe pas toujours, comme nous verrons. En effet, pouvoir isoler $\mathbf{x}$, dans l'équation "$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$", en multipliant juste par une matrice bien choisie, mène à une solution unique $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, et implique en particulier que la solution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est unique, ce qui n'arrive que dans certains cas (Théorème "$0, 1, \infty$").

Dans ce chapitre, on se propose donc de chercher des conditions sur A qui garantissent l'existence de A^{-1} ; c'est le problème de *l'inversibilité*. Nous verrons aussi plusieurs façons d'obtenir une expression explicite pour A^{-1}.

7.2 Définition et propriétés de base

Voyons le problème d'un point de vue un peu plus général.

Pouvoir isoler $\mathbf{x}$ dans $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ signifie, en termes d'application linéaire, que l'on cherche à récupérer la préimage de $\mathbf{b}$. Pour que cette préimage soit bien définie et unique pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, il faut que T soit bijective.

Or nous avons vu qu'une application linéaire ne peut être bijective que si elle a des espaces de départ et d'arrivée de mêmes dimensions :

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

On peut aussi montrer que dans ce cas, la réciproque $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est également linéaire (exercice) ; on peut donc lui associer une matrice :

$$T^{-1}(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}\,.$$

Les relations

$$\begin{aligned} T(T^{-1}(\mathbf{y})) &= \mathbf{y} \qquad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\,,\\ T^{-1}(T(\mathbf{x})) &= \mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,. \end{aligned}$$

s'expriment donc, en termes des matrices et du produit matriciel,

$$\begin{aligned} AB\mathbf{y} &= \mathbf{y} \qquad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\,,\\ BA\mathbf{x} &= \mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,. \end{aligned}$$

Or ces deux dernières conditions peuvent s'exprimer simplement par

$$AB = I_n\,, \qquad BA = I_n\,.$$

La matrice B sera appelée *inverse de A*.

Par la discussion précédente, on ne peut parler d'*inverse* que pour des matrices **carrées**, c'est à dire ayant autant de lignes que de colonnes.

Définition 7.1. Soit A une matrice $n \times n$.

- ⋆ Si il existe une matrice B, $n \times n$, telle que

  $$AB = BA = I_n\,,$$

  on dit que A est **inversible**. La matrice B est alors appelée **inverse de** A ; on la note A^{-1} (au lieu de B).
- ⋆ Si A n'est pas inversible, elle est dite **singulière**.

Remarque 7.2. Puisque deux matrices A et B ne commutent a priori pas, la condition "$AB = BA = I_n$" représente en fait *deux* conditions, à savoir $AB = I_n$ et $BA = I_n$. ⋄

Exemple 7.3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible. En effet, en définissant

$$B := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\,,$$

on remarque que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \,,$$

et que

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \,.$$

Donc A est inversible, et son inverse est $A^{-1} = B$. ◇

Dans cet exemple, on a juste *vérifié* que A était inversible en vérifiant que le produit de A avec B donnait bien la matrice identité. Mais en général, on aimerait des *critères* qui nous permettent d'étudier une matrice donnée A, de savoir si elle est inversible ou pas, et si oui de calculer son inverse.

Informel 7.4. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Si oui, quel est son inverse ?

Exemple 7.5. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est singulière. En effet, quelle que soit B (2×2), le coefficient $(AB)_{11}$ est toujours égal à 0, et donc AB ne peut pas être égale à I_2. Cet exemple montre qu'il ne suffit pas de ne pas être identiquement nulle pour ne pas être inversible. ◇

Listons encore quelques propriétés de base de la matrice inverse.

Proposition 6. *Soit A une matrice $n \times n$ inversible. Alors*

a) *L'inverse A^{-1} est unique,*
b) *A^{-1} est aussi inversible, et $(A^{-1})^{-1} = A$,*
c) *Pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, λA est aussi inversible, et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$,*
d) *A^T est aussi inversible, et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

De plus, si M est une autre matrice $n \times n$ inversible, alors AM est inversible, et

$$(AM)^{-1} = M^{-1} A^{-1} \,.$$

Preuve:

a) Supposons qu'il existe deux matrices C, B telles que $AC = CA = I_n$, $AB = BA = I_n$. Alors

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C \,.$$

b) En considérant A comme la "matrice de départ", l'inversibilité signifie que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Or ces deux conditions peuvent aussi se lire en considérant A^{-1} comme la "matrice de départ", et elles nous disent bien que A^{-1} est inversible et que son inverse est égal à A.

NumChap: chap-inversion, Dernière compilation: 2022-12-09 06:44:16+01:00. (Version Web: botafogo.saitis.net)

c) Par simple vérification, en utilisant les propriétés de la multiplication d'une matrice par un scalaire,
$$(\lambda A)(\tfrac{1}{\lambda}A^{-1}) = (\lambda\tfrac{1}{\lambda})(AA^{-1}) = I_n$$
De même, $(\frac{1}{\lambda}A^{-1})(\lambda A) = I_n$.

d) Par simple vérification,
$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n\,.$$
De même, $(A^{-1})^T A^T = I_n$.

Finalement, si M est aussi inversible, alors
$$\begin{aligned}(AM)(M^{-1}A^{-1}) &= A(\underbrace{MM^{-1}}_{=I_n})A^{-1} = AA^{-1} = I_n\,,\\ (M^{-1}A^{-1})(AM) &= M^{-1}(\underbrace{AA^{-1}}_{=I_n})M = MM^{-1} = I_n\,,\end{aligned}$$

et donc AM est inversible et son inverse est $M^{-1}A^{-1}$. □

Inverse et résolution de systèmes $n \times n$

Considérons un système $n \times n$,
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,,$$
dans lequel la matrice A est inversible. On peut alors résoudre cette équation em multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par A^{-1},
$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I_n}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}\,,$$
qui donne directement la solution
$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}\,.$$
Si cette méthode peut paraître élégante, elle a le désavantage (en plus de ne pouvoir être appliquée que lorsque A est inversible) d'être plus coûteuse en termes de calcul, puisqu'elle

7.3 Le cas 2×2

Avant de nous attaquer au problème général d'une matrice $n \times n$, attardons-nous sur le cas 2×2. Même si ce cas est le plus simple, il va nous permettre de présenter quelques notions qui seront réutilisées dans d'autres chapitres.

Considérons une matrice 2×2 quelconque :
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,.$$
L'inversibilité de A va dépendre des valeurs des coefficients a, b, c, d bien-sûr, et l'avantage du cas 2×2 est qu'il y a une condition facilement exprimable en fonction de ces coefficients.

Théorème 7.6. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si son* ***déterminant****, c'est-à-dire le nombre réel défini par*

$$\det(A) := ad - bc\,,$$

est différent de zéro. De plus, lorsque $\det(A) \neq 0$*, l'inverse de* A *est donné par*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Preuve: Supposons pour commencer que $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, la matrice A^{-1} de l'énoncé est bien définie, et on vérifie par un calcul direct que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$. Comme l'inverse est unique, A^{-1} est bien l'inverse de A.

Supposons maintenant que $\det(A) = ad - bc = 0$. Si tous les coefficients de A sont nuls, elle ne peut pas être inversible (on peut la multiplier par n'importe quoi, on n'obtiendra jamais I_n !). Supposons donc qu'au moins un de ses coefficients est non-nul, par exemple $a \neq 0$. Dans ce cas, $ad - bc = 0$ implique $d = \frac{bc}{a}$, et donc

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{a}a \\ c & \frac{b}{a}c \end{pmatrix},$$

ce qui implique que les colonnes de A sont colinéaires. Comme on sait, ceci implique que A n'est pas inversible. □

Exemple 7.7. À titre d'illustration, considérons la matrice 2×2 déjà mentionnée au début du chapitre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$, et donc A est inversible, et son inverse est donné par la formule du théorème :

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

comme nous avions déjà vérifié.

Cette expression permet maintenant de résoudre n'importe quelle équation vectorielle impliquant A. En effet, le système

$$(*) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 \\ 3x_1 + 4x_2 = b_2 \end{cases}$$

se formule comme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

En multipliant des deux côtés par A^{-1}, on obtient $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, qui donne

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_1 + b_2 \\ \frac{3}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 \end{pmatrix}.$$

◇

Exemple 7.8. Considérons quelques transformations linéaires dans le plan.

⋆ Nous avions remarqué que la **projection orthogonale** sur une droite d (passant par l'origine) est une transformation qui n'est ni injective ni surjective, donc pas bijective. On voit maintenant que ceci se reflète dans sa matrice relativement à la base canonique, puisque

$$\det([\mathrm{proj}_d]_{\mathcal{B}_{can}}) = \det \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = 0\,.$$

⋆ La **réflexion** d'axe d était inversible, ce que nous voyons maintenant au niveau de sa matrice, puisque

$$\det([\mathrm{refl}_d]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}) = \det \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} = -1 \neq 0\,.$$

De plus, on sait que $\mathrm{refl}_d{}^{-1} = \mathrm{refl}_d$, ce que l'on vérifie au niveau de la matrice :

$$\begin{aligned} [\mathrm{refl}_d]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}{}^{-1} &= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \\ &= [\mathrm{refl}_d]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}\,. \end{aligned}$$

⋆ Finalement, nous avions remarqué que la rotation d'angle α est inversible, ce qui au niveau de la matrice se traduit par

$$\det([\mathrm{rot}_\alpha]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}) = \det \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

En utilisant la formule ci-dessus, on peut vérifier que son inverse correspond, comme on sait, à une rotation de $-\alpha$. En effet, à l'aide des propriétés de parité des fonctions trigonométriques,

$$\begin{aligned} [\mathrm{rot}_\alpha]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}{}^{-1} &= \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \\ &= [\mathrm{rot}_{-\alpha}]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}\,. \end{aligned}$$

◇

Le déterminant pour des matrices plus grandes ?

Plus tard, nous verrons comment la notion de déterminant peut se généraliser à des matrices carrées de tailles arbitraires, et comment celui-ci renseigne sur l'inversibilité d'une matrice. Pour l'instant, restons-en à l'étude de l'inversibilité, sans déterminant, en nous tournant vers le cas $n \times n$.

7.4 Le cas $n \times n$: matrices élémentaires et algorithme de Gauss-Jordan

Introduction

D'un point de vue très concret, le problème de l'inversibilité d'une matrice A ($n \times n$) peut se formuler de la façon suivante.

Puisqu'on cherche donc une matrice B $(n \times n)$ telle que

$$AB = BA = I_n\,,$$

si on écrit l'inconnue B en nommant ses colonnes,

$$B = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n]\,,$$

alors le produit devient $AB = [A\mathbf{b}_1 \cdots A\mathbf{b}_n]$, et comme la matrice identité peut aussi s'écrire $I_n = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n]$, la contrainte $AB = I_n$ s'écrit

$$[A\mathbf{b}_1 \cdots A\mathbf{b}_n] = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n]\,.$$

Les colonnes de B doivent donc être solutions des n systèmes suivants :

$$\begin{cases} (*)_1 & : A\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1\,, \\ (*)_2 & : A\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2\,, \\ \ \vdots & \\ (*)_n & : A\mathbf{b}_n = \mathbf{e}_n\,. \end{cases}$$

Si on met en route l'algorithme de Gauss pour résoudre chacun de ces systèmes, on se rend compte que les opérations élémentaires faites pour résoudre le premier système $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1$ pourront être réutilisées dans tous les systèmes suivants . On conclut que l'on peut en fait étudier la résolution de ces n systèmes *en parallèle*, en se concentrant uniquement sur les coefficients de la matrice A.

Si on trouve des vecteurs $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ solutions, respectivement, de $(*)_1, \dots, (*)_n$, alors on aura déjà une matrice $B = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n]$ satisfaisant $AB = I_n$.

Puisqu'on aimerait maintenir l'interprétation matricielle du résultat final, nous allons garder la trace des opérations élémentaires effectuées successivement, afin d'obtenir notre premier critère d'inversibilité.

Matrices élémentaires

Nous avons précédemment introduit des opérations élémentaires de Type I, II et III, qui agissaient sur un système $m \times n$ ou, de façon équivalente, sur sa matrice augmentée. Il se trouve que chaque opération élémentaire, prise individuellement, peut se formuler à l'aide d'un produit matriciel.

Rappelons que I_n est la matrice identité $n \times n$.

Définition 7.9. Une matrice $n \times n$ est dite **élémentaire** si elle s'obtient en effectuant une (et une seule) opération élémentaire sur I_n.

Exemple 7.10. $\star$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est élémentaire, puisqu'on l'obtient à partir de I_3 par l'opération de Type I $L_2 \leftrightarrow L_3$.

$\star$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est élémentaire, puisqu'on l'obtient à partir de I_3 par l'opération de Type II $L_2 \leftrightarrow -2L_2$.

⋆ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas élémentaire. (On peut l'obtenir à partir de I_3, mais avec pas moins de *deux* opérations élémentaires.)

◇

Maintenant, pour effectuer une transformation $\mathcal{E}$ sur une matrice A ($n \times p$), on pourra simplement considérer la matrice élémentaire E ($n \times n$) obtenue en effectuant $\mathcal{E}$ sur I_n, puis l'utiliser pour multiplier A **à gauche** par E : le résultat EA est alors la matrice A sur laquelle on a effectué $\mathcal{E}$.

Exemple 7.11. Considérons une matrice 3×4

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}.$$

Supposons que l'on veuille effectuer sur A l'opération élémentaire $\mathcal{E}$ donnée par "$L_1 \leftrightarrow L_2$". Pour ce faire, on commence par appliquer $\mathcal{E}$ à I_3, qui donne

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis, on multiplie A par E, à gauche :

$$EA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \end{pmatrix},$$

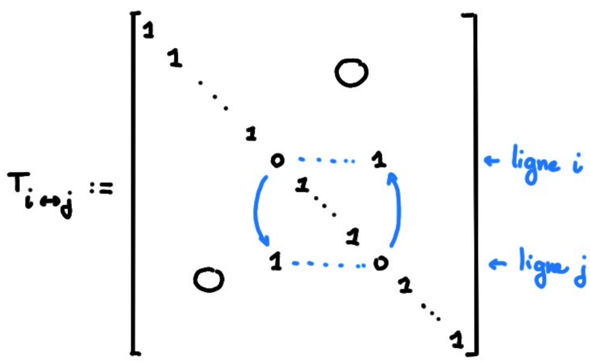
qui est bien ce qu'on voulait. ◇

Nous avions vu qu'une transformation élémentaire effectuée sur un système ne change pas son ensemble de solutions, puisqu'on pouvait toujours revenir au système de départ en appliquant une transformation réciproque. Une traduction de cette affirmation, dans le langage matriciel, est la suivante :

Lemme 12. *Toute matrice élémentaire est inversible.*

Pour le vérifier, écrivons explicitement les matrices élémentaires $n \times n$, ainsi que leurs inverses.

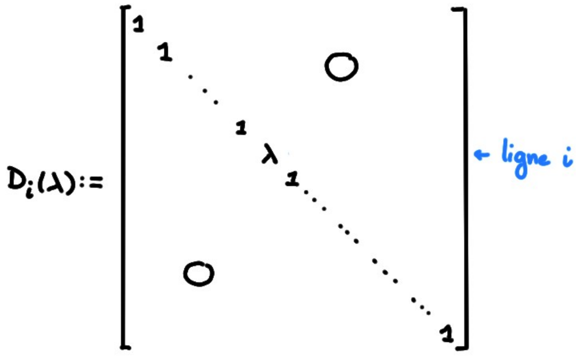
⋆ Type I : La matrice élémentaire associée à l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ est



On remarque que $T_{i\leftrightarrow j}T_{i\leftrightarrow j} = I_n$, et donc

$$T_{i\leftrightarrow j}{}^{-1} = T_{i\leftrightarrow j}$$

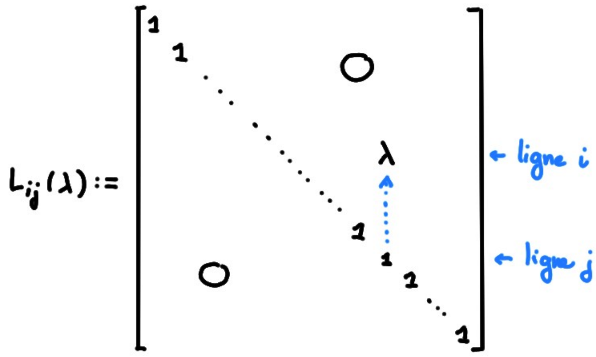
⋆ Type II : La matrice élémentaire associée à l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$, où $\lambda \neq 0$, est



On remarque que $D_i(\lambda)D_i(\lambda^{-1}) = I_n$, et donc

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$$

⋆ Type III : La matrice élémentaire associée à l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est



On remarque que $L_{ij}(\lambda)L_{ij}(-\lambda) = I_n$, et donc

$$L_{ij}(\lambda)^{-1} = L_{ij}(-\lambda)$$

Lorsqu'on résout un système, on choisit une *suite* d'opérations élémentaires, dans le but d'arriver à une forme échelonnée du système. Notons ces opérations $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}, \dots, \mathcal{E}^{(k)}$. L'application de ces opérations (d'abord $\mathcal{E}^{(1)}$, puis $\mathcal{E}^{(2)}$, etc.) correspondent à des multiplications successives de A *à gauche* par les matrices élémentaires qui leur correspondent :

$$\begin{aligned}
&\text{Opération } \mathcal{E}^{(1)} : && E^{(1)}A\,,\\
&\text{Opération } \mathcal{E}^{(1)} : && E^{(2)}E^{(1)}A\,,\\
&\qquad\vdots\\
&\text{Opération } \mathcal{E}^{(k)} : && E^{(k)}\cdots E^{(2)}E^{(1)}A\,.
\end{aligned}$$

Comme on sait, une matrice possède une *unique* version échelonnée réduite, et donc il est toujours possible de bien choisir les matrices $E^{(j)}$, de façon à ce que la matrice finale,

$$\widetilde{A} = E^{(k)}\cdots E^{(2)}E^{(1)}A\,,$$

soit la réduite de A.

Théorème 7.12. *Soit A une matrice $n \times n$. Alors A est inversible si et seulement si on peut réduire A à l'identité I_n à l'aide d'un produit de matrices élémentaires, c'est-à-dire s'il existe des matrices élémentaires $E^{(1)}, \dots, E^{(k)}$ telles que la réduite*

$$\widetilde{A} = E^{(k)} \cdots E^{(1)} A$$

soit la matrice identité : $\widetilde{A} = I_n$.

Preuve: Supposons que A est inversible. Alors $T(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ est bijective, et par conséquent pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une unique solution. Ceci implique que sa forme échelonnée réduite ne présente aucune variable libre (chaque pivot est situé immédiatement à droite du pivot de la ligne supérieure). Comme A est $n \times n$, ceci implique que la réduite de A est I_n.

Supposons ensuite qu'il existe des matrices élémentaires $E^{(1)}, \dots, E^{(k)}$ telles que

$$E^{(k)} E^{(k-1)} \cdots E^{(1)} A = I_n \,.$$

Rappelons que chaque $E^{(j)}$ est inversible. En multipliant la relation ci-dessus à gauche par $(E^{(k)})^{-1}$,

$$\underbrace{(E^{(k)})^{-1} E^{(k)}}_{=I_n} E^{(k-1)} \cdots E^{(1)} A = (E^{(k)})^{-1} I_n = (E^{(k)})^{-1} \,.$$

En multipliant successivement, à gauche, par $(E^{(k-1)})^{-1}, \dots, (E^{(1)})^{-1}$, on arrive à

$$A = (E^{(1)})^{-1} \cdots (E^{(k)})^{-1} \,.$$

Puisque chacune des matrices $(E^{(j)})^{-1}$ est inversible, A est un produit de matrices inversibles, et donc elle aussi est inversible. Son inverse est donné par

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \big((E^{(1)})^{-1} \cdots (E^{(k)})^{-1}\big)^{-1} \\ &= \big((E^{(k)})^{-1}\big)^{-1} \cdots \big((E^{(1)})^{-1}\big)^{-1} \\ &= E^{(k)} \cdots E^{(1)} \,. \end{aligned}$$

□

Comme conséquence de ce qui a été fait dans la preuve :

Corollaire 5. *Une matrice A ($n \times n$) est inversible si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit de matrices élémentaires.*

L'algorithme

L'argument développé dans la preuve du précédent théorème fournit un algorithme pour déterminer si une matrice est inversible et, dans le cas où elle est inversible, de calculer son inverse.

Reprenons l'expression

$$[A\mathbf{b}_1 \cdots A\mathbf{b}_n] = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n] \,.$$

Pour résoudre n'importe lequel de ces systèmes, $A\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$, on applique successivement des opérations élémentaires en multipliant à gauche par les matrices correspondantes

$E^{(1)}, \dots, E^{(k)}$, jusqu'à obtenir, du côté gauche, la réduite de A :

$$\begin{aligned} A\mathbf{b}_j &= \mathbf{e}_j \\ E^{(1)}A\mathbf{b}_j &= E^{(1)}\mathbf{e}_j \\ E^{(2)}E^{(1)}A\mathbf{b}_j &= E^{(2)}E^{(1)}\mathbf{e}_j \\ &\vdots \\ \underbrace{E^{(k)}\cdots E^{(2)}E^{(1)}A}_{=\widetilde{A}}\mathbf{b}_j &= E^{(k)}\cdots E^{(2)}E^{(1)}\mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Si $\widetilde{A} = I_n$, le théorème ci-dessus dit que A est inversible ; de plus la j-ème colonne de son inverse est donnée par

$$\mathbf{b}_j = E^{(k)}\cdots E^{(1)}\mathbf{e}_j\,,$$

qui n'est autre que la j-ème colonne de la matrice $E^{(k)}\cdots E^{(1)}$.

On peut résumer ce procédé dans l'algorithme suivant, appelé **algorithme de Gauss-Jordan** (pour l'étude de l'inversibilité d'une matrice) :

a) Commencer par considérer la matrice $n \times 2n$

$$\big(A\,|\,I_n\big)$$

b) Considérer des opérations élémentaires permettant de transformer A en sa réduite $\widetilde{A}$, et les appliquer *simultanément sur chaque moitié* :

$$\begin{gathered} (A\,|\,I_n) \\ (E^{(1)}A\,|\,E^{(1)}I_n) \\ (E^{(2)}E^{(1)}A\,|\,E^{(2)}E^{(1)}I_n) \\ \vdots \\ (\underbrace{E^{(k)}\cdots E^{(2)}E^{(1)}A}_{=\widetilde{A}}\,|\,\underbrace{E^{(k)}\cdots E^{(2)}E^{(1)}}_{=:C})\,. \end{gathered}$$

c) Regarder le résultat obtenu, $(\widetilde{A}\,|\,C)$, et conclure :
   - ⋆ Si $\widetilde{A} = I_n$, alors A est inversible, et $A^{-1} = C$.
   - ⋆ Si $\widetilde{A} \neq I_n$, alors A est singulière.

Exemple 7.13. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, et étudions son inversibilité à l'aide de l'algorithme ci-dessus. On pose donc

$$(A\,|\,I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Comme il suffit d'une seule transformation pour réduire A, $\mathcal{E}^{(1)} = (L_2 \to L_2 - 2L_1)$, on a

$$(\widetilde{A}\,|\,C) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Comme $\widetilde{A} \neq I_2$, A est singulière. (On voit aussi que $\det(A) = 0$, qui montre également que A n'est pas inversible.) ◇

Exemple 7.14. Étudions l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$. On pose

$$(A \,|\, I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Appliquons successivement des opérations élémentaires afin de réduire A du côté gauche ; *on applique chaque opération sur toute la matrice, y compris sur le côté droit.*

Commençons par $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$, suivie de $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

Ensuite, $L_1 \leftrightarrow L_2$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right),$$

puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right),$$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right),$$

et enfin $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right).$$

On a donc obtenu

$$(\widetilde{A} \,|\, C) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Comme $\widetilde{A} = I_3$, A est inversible, et son inverse est ce qu'on voit du côté droit :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(Exercice : Pourquoi pas vérifier, à la main, que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$!) $\diamond$

7.5 Critères d'inversibilité

Dans la section précédente, nous avons vu un premier critère d'inversibilité général pour une matrice A, caractérisé par la possibilité de réduire (ou non) A à l'identité. Relions maintenant l'inversibilité à d'autres propriétés algébriques. (Dans la suite du cours, d'autres critères viendront s'ajouter à cette liste.)

Théorème 7.15. *(Critères d'inversibilité) Soit A une matrice $n \times n$. Alors les propriétés suivantes sont toutes équivalentes.*

a) *A est inversible.*

b) *A est un produit fini de matrices élémentaires.*

c) *La réduite de A est I_n.*

d) *Pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une unique solution.*

e) *Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ne possède que la sol. triviale ($\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$).*

f) *Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.*

g) *Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$ ($\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$).*

h) $\mathrm{rang}(A) = n$.

i) *Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$.*

Preuve: Les équivalences 1.⇔2.⇔3. ont été démontrées dans la section précédente.

1.⇒4. Si A est inversible, alors pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, la solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est donnée par $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, et est donc unique.

4.⇒5. On sait que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ possède toujours la solution triviale. Donc en prenant $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, on assure que la solution triviale est unique.

5.⇔6. Suit du fait que les colonnes d'une matrice A (de taille quelconque) sont linéairement indépendantes si et seulement si le systèmes homogène associé $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ne possède que la solution triviale.

6.⇒9. En effet, nous savons que dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille libre contenant n vecteurs forme une base.

9.⇒1. Supposons que les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$. Pour montrer que A est inversible, il suffit de montrer que l'application $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ est bijective. Montrons d'abord qu'elle est injective. Supposons que $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}')$, c'est-à-dire $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbf{0}$. Puisque les colonnes de A sont indépendantes, l'unique solution de ce système est $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{0}$, et donc $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Ensuite, T est clairement surjective puisque pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, le système $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ possède une solution (ici on utilise le fait que les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$).

9.⇒7⇔8. (Évident)

7.⇒9. Si les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$, elles forment nécessairement une famille libre (sinon, la dimension de l'espace qu'elles engendrent serait strictement inférieur à n), et donc une base comme on a déjà dit. □

Conséquence : une simplification de la définition d'inversibilité

Nous avons insisté plusieurs fois sur le fait que la définition d'inversibilité implique *deux* conditions : il doit exister B telle que $AB = I_n$ **et** $BA = I_n$. Or nous avons maintenant les outils pour prouver qu'il suffit qu'*une seule* de ces conditions soit vérifiée :

Proposition 7. *Soit A une matrice $n \times n$.*

a) Si il existe une matrice C ($n \times n$) telle que $CA = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = C$.

b) Si il existe une matrice B ($n \times n$) telle que $AB = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Preuve: 1. Supposons que $CA = I_n$. Si $\mathbf{x}$ est solution du système homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, alors

$$\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = CA\mathbf{x} = C(A\mathbf{x}) = C\mathbf{0} = \mathbf{0}\,.$$

Donc le système homogène ne possède que la solution triviale. Par le théorème (critère 5), A est inversible : son inverse A^{-1} existe. En multipliant l'identité $CA = I_n$ à droite par A^{-1}, on obtient $C = A^{-1}$.

2. Supposons que $AB = I_n$. Fixons un $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ quelconque. On a alors $AB\mathbf{y} = I_n\mathbf{y} = \mathbf{y}$, que l'on peut récrire $A\mathbf{x}_* = \mathbf{y}$ (où $\mathbf{x}_* = B\mathbf{y}$). Ceci implique bien que $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}(A)$. Comme ceci est vrai pour tout $\mathbf{y}$, on a que $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$. Par le théorème (critère 7.) ce qui implique que A est inversible. En multipliant l'identité $AB = I_n$ à gauche par A^{-1}, on obtient $A^{-1} = B$. □