Chapitre 4

Espaces vectoriels

4.1 Motivation

On a pu apprécier, dans les dernières sections, à quel point l'introduction de la notion abstraite de *vecteur* s'est avérée utile, non seulement dans la description des systèmes linéaires, mais aussi dans l'avantage qu'ils représentent d'un point de vue calculatoire : on peut les manipuler un peu comme de simples *nombres* , sans se soucier du fait qu'ils représentent, a priori, des objets de grandes dimensions.

Les vecteurs nous ont également permis de développer le début de la théorie des applications linéaires $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, qui nous occuperont pour la plupart de ce que nous allons faire jusqu'à la fin de ce cours.

Mais avant de poursuivre cette étude, nous allons généraliser tout ce que nous avons fait jusqu'ici, pour l'utiliser dans d'autres situations.

En effet, il est profitable, dans beaucoup de situations qui vont bien au-delà de ce que nous avons vu jusqu'à maintenant, d'avoir une structure vectorielle abstraite qui permette de manipuler des objets à l'aide d'une *addition vectorielle* et d'une *multiplication par un scalaire*, telle que les propriétés classiques de l'arithmétique (commutativité, distributivité, etc) soient satisfaites. Cette structure, qui généralise la notion de vecteur dans $\mathbb{R}^n$, est ce qu'on appelle un *espace vectoriel*, et constitue le sujet de ce chapitre.

Les espaces vectoriels offrent un cadre de travail sur lequel nous redéfinirons naturellement tout ce que nous avons fait dans le cas de $\mathbb{R}^n$. Nous introduirons également de nouvelles notions, qui seront après utilisées dans le cas particulier des espaces $\mathbb{R}^n$.

Informel 4.1. Attention : le contenu de ce chapitre est *abstrait* ! La difficulté principale, pour le novice, est d'accepter le fait que l'on va parler de "vecteurs" sans dire exactement ce qu'ils sont ; il faudra s'habituer à travailler avec ces objets en utilisant uniquement les propriétés qui les définissent, et qui sont décrites dans la définition de la section suivante.

4.2 Définition et exemples

Commençons par introduire la généralisation abstraite de la notion de vecteur rencontrée dans les chapitres précédents :

Définition 4.2. Un **espace vectoriel** est un ensemble non-vide, noté souvent V, dont les éléments sont appelés **vecteurs**, notés souvent $u, v, w, \dots$, muni d'une **addition** et d'une **multiplication par un scalaire**, satisfaisant aux propriétés suivantes :

a) $u + v = v + u$ pour tous $u, v \in V$ (commutativité)

b) $u + (v + w) = (u + v) + w$ pour tous $u, v, w \in V$ (associativité)

c) Il existe un **vecteur nul**, noté "0", tel que pour tout $v \in V$,

$$0 + v = v + 0 = v\,.$$

d) Pour tout $v \in V$, il existe un vecteur **opposé**, noté $-v$, tel que

$$v + (-v) = (-v) + v = 0\,.$$

e) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$

f) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v \in V$

g) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v = \mu(\lambda v)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v \in V$

h) $1v = v$ pour tout $v \in V$

Remarque 4.3. Ce que l'on vient de définir est généralement appelé espace vectoriel *réel*, car les scalaires utilisés pour multiplier les vecteurs sont des nombres *réels*. ⋄

Donc un espace vectoriel est simplement un ensemble d'objets abstraits appelés vecteurs, dans lequel un "$+$" permet d'additionner ces vecteurs, et dans lequel on peut multiplier les vecteurs par des scalaires.

Informel 4.4. Cela peut prendre du temps de s'habituer à ce niveau d'abstraction, et d'imaginer que ce genre de structure existe ailleurs que dans le cadre des "flèches de $\mathbb{R}^n$". C'est surtout à la fin du cours qu'on se rendra compte de l'utilité de cette généralisation, lorsqu'on pourra résoudre des problèmes concrets en appliquant des méthodes algébriques/géométriques (par exemple : la méthode des moindres carrés) dans un espace vectoriel abstrait.

Voyons quelques-uns des principaux exemples d'espaces vectoriels.

Espaces $\mathbb{R}^n$

Le premier exemple d'espace vectoriel que nous avons rencontré est bien-sûr celui où V est formé de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas l'addition et la multiplication par un scalaire avaient été définis de façon naturelle, à savoir *composante par composante*. C'est souvent le même procédé qui est utilisé dans des cas plus généraux.

Espaces de fonctions

Dans ce premier exemple, nous allons voir comment des ensembles de *fonctions* peuvent aussi être vus comme des espaces vectoriels.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (borné ou non, I peut même être la droite toute entière), et soit V l'ensemble de toutes les fonctions définies sur I, à valeurs réelles :

$$V = \big\{\text{fonctions } f : I \to \mathbb{R}\big\}\,.$$

Remarque 4.5. Une fonction $f \in V$ est définie une fois que l'on a défini la valeur du réel $f(t)$ pour chaque $t \in I$. Ainsi, deux fonctions $f, g \in V$ sont **égales**, ce qu'on écrit $f = g$, si et seulement si elles prennent la même valeur en tout point, c'est-à-dire si

$$f(t) = g(t)\,, \quad \forall t \in I\,.$$

$\diamond$

- ⋆ Définissons une **addition** sur V. Pour ce faire, nous devons associer à toute paire $f, g \in V$ une nouvelle fonction $f + g \in V$. On doit donc définir le réel $(f + g)(t)$ pour tout $t \in I$, ce que l'on fait naturellement en posant

$$(f+g)(t) := f(t) + g(t)\,, \qquad \forall t \in I\,.$$

- ⋆ Définissons la **multiplication par un scalaire** : si $f \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in V$ est la fonction $\lambda f : I \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$(\lambda f)(t) := \lambda f(t)\,, \qquad \forall t \in I\,.$$

Nous devons maintenant vérifier que V est bien un espace vectoriel. Pour cela, nous aurons besoin de la **fonction nulle** $0 \in V$, comme étant la fonction qui vaut zéro en tout point,

$$0(t) := 0\,, \quad \forall t \in I\,,$$

et l'**opposé** d'une fonction $f \in V$, notée $-f \in V$, est la fonction

$$(-f)(t) := -f(t)\,, \quad \forall t \in I\,.$$

Théorème 4.6. *Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire (définies ci-dessus), V est un espace vectoriel.*

Preuve: On vérifie une à une chacune des propriétés qui définissent un espace vectoriel. (On remarquera qu'à chaque fois, c'est une propriété des *réels* qui fait le travail !)

a) Soient $f, g \in V$. Si on fixe $t \in I$, on peut écrire

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) = g(t) + f(t) = (g+f)(t)\,.$$

Comme cette identité est vraie pour tout $t \in I$, cela implique bien que $f + g = g + f$.

b) Soient $f, g, h \in V$. Si on fixe $t \in I$, alors

$$\begin{aligned}(f+(g+h))(t) &= f(t) + (g+h)(t)\\ &= f(t) + (g(t) + h(t))\\ &= (f(t) + g(t)) + h(t)\\ &= (f+g)(t) + h(t) = ((f+g)+h)(t)\,.\end{aligned}$$

Comme cette identité est vraie pour tout $t \in I$, cela implique bien que $f+(g+h) = (f+g)+h$.

c) Par la définition de la fonction nulle, on a bien-sûr que $f + 0 = f$ pour toute $f \in V$, puisque

$$(f+0)(t) = f(t) + 0(t) = f(t)\,, \qquad \forall t \in I\,.$$

d) Avec l'opposé $-f$ défini plus haut, pour tout $t \in I$,

$$(f+(-f))(t) = f(t) + (-f)(t) = f(t) - f(t) = 0 = 0(t)\,,$$

ce qui implique que $f + (-f) = 0$.

e) Soient $f, g \in V$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda(f+g))(t) &= \lambda((f+g)(t)) \\ &= \lambda(f(t)+g(t)) \\ &= \lambda f(t) + \lambda g(t) \\ &= (\lambda f)(t) + (\lambda g)(t) \\ &= (\lambda f + \lambda g)(t)\,,\end{aligned}$$

ce qui implique $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$.

f) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $f \in V$. On a, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}((\lambda+\mu)f)(t) &= (\lambda+\mu)f(t) \\ &= \lambda f(t) + \mu f(t) \\ &= (\lambda f)(t) + (\mu f)(t) \\ &= (\lambda f + \mu f)(t)\,,\end{aligned}$$

ce qui implique bien que $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$.

g) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f \in V$. On a, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}(\lambda(\mu f))(t) &= \lambda((\mu f)(t)) \\ &= \lambda(\mu f(t)) \\ &= (\lambda\mu) f(t) \\ &= (\mu\lambda) f(t) \\ &= \mu(\lambda f(t)) \\ &= \mu((\lambda f)(t)) \\ &= (\mu(\lambda f))(t)\,,\end{aligned}$$

ce qui implique bien que $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f = \mu(\lambda f)$.

h) Soit $f \in V$. On a, pour tout $t \in I$,

$$(1f)(t) = 1 \cdot f(t) = f(t)\,,$$

ce qui implique bien $1f = f$.

□

Informel 4.7. La preuve est étonnamment longue, mais ne présente *aucune* subtilité ! (La seule difficulté, peut-être, est de comprendre pourquoi il est nécessaire de faire tout ça !)

Espaces de polynômes

Les polynômes sont des fonctions très particulières mais fournissent un cas important d'espace vectoriel, jouant un rôle important dans de nombreuses applications.

Soit $n \geqslant 1$ un entier, et soit $\mathbb{P}_n$ l'**ensemble de tous les polynômes réels de degré au plus égal à** n. Cela signifie qu'un élément $p \in \mathbb{P}_n$ est un polynôme de la forme

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

où les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des réels. On additionne et multiplie (par des scalaires) comme on l'a fait pour les fonctions.

Théorème 4.8. *Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, $\mathbb{P}_n$ est un espace vectoriel.*

Preuve: (voir exercices) □

Espace des matrices

Considérons l'**ensemble des matrices** $m \times n$ **à coefficients réels**, noté $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Si une matrice $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ a des coefficients a_{ij} ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$), on écrira simplement

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

On rappelle les définitions d'addition et de multiplication par un scalaire, introduites précédemment :

- ⋆ Si $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$,

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}\,, \qquad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}\,,$$

  on définit $A + B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ comme la matrice dont les éléments sont les nombres $a_{ij} + b_{ij}$:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}\,.$$

- ⋆ Pour un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\lambda A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ comme la matrice dont les éléments sont les nombres λa_{ij} :

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}\,.$$

Théorème 4.9. *Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire (définies ci-dessus), $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.*

Preuve: En exercice ! L'élément nul "0" est la matrice $m \times n$ dont tous les éléments sont égaux à zéro, et l'opposé d'une matrice A est la matrice dont tous les éléments sont les opposés de ceux de A. □

Autres exemples

La structure d'espace vectoriel apparaît dans de nombreuses situations.

Exemple 4.10. Soit V l'ensemble des **suites de réels**, dans lequel une suite est notée simplement $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geqslant 0}$. En définissant une multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda\mathbf{x} := (\lambda x_n)_{n\geqslant 0}\,,$$

et l'addition

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_n + y_n)_{n\geqslant 0}\,,$$

on peut vérifier (en exercice) que V a une structure d'espace vectoriel. ◇

4.3 Colinéarité et in-dépendance linéaire

Une fois que l'on est dans un espace vectoriel V bien défini, on peut *importer* n'importe quelle notion vectorielle, rencontrée dans $\mathbb{R}^n$, dans V. Ceci permettra de profiter de ces notions pour résoudre des problèmes dans un cadre abstrait, ayant parfois des conséquences pratiques surprenantes.

Arrêtons-nous sur quelques-unes de ces notions, qui seront empruntées directement de ce que nous avons fait dans $\mathbb{R}^n$.

Colinéarité

Définition 4.11. Soit V un espace vectoriel. Deux vecteurs $u, v \in V$ sont **colinéaires** si l'un d'eux peut s'écrire comme un multiple de l'autre.

Exemple 4.12. Les matrices $A, B \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

sont colinéaires, puisque $B = -2A$. Par contre,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas colinéaires, parce qu'il n'existe aucun $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda B$ ou tel que $B = \lambda A$. ◇

Exemple 4.13. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions

$$f(t) := \sin(t) \qquad g(t) := \cos(t) \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Montrons que f et g ne sont pas colinéaires. On le démontre par l'absurde : supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda f$, c'est-à-dire tel que

$$\cos(t) = \lambda \sin(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En écrivant cette relation pour le choix particulier $t = \frac{\pi}{4}$, on obtient

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \lambda \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

qui implique $\lambda = 1$. Mais, pour le choix $t = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$0 = \lambda \cdot 1,$$

qui implique $\lambda = 0$. On conclut qu'il ne peut pas exister de scalaire λ qui fonctionne pour tous les $t \in \mathbb{R}$. On conclut que f et g ne sont pas colinéaires. ◇

Combinaisons linéaires et in-dépendance

Si $v_1, \dots, v_p$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel V, et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des scalaires, on peut considérer la **combinaison linéaire**

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

On peut alors généraliser la notion d'indépendance linéaire :

Définition 4.14. Soient $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs d'un espace vectoriel V. La famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est dite

- ⋆ **linéairement indépendante** (ou **libre**) si l'unique combinaison linéaire nulle,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

  est celle pour laquelle $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$.
- ⋆ **dépendante** (ou **liée**) si il existe des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, dont au moins un n'est pas nul, tels que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0.$$

Exemple 4.15. Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et montrons que la famille $\{A, B, C\}$ est libre. Pour ce faire, considérons la relation linéaire

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = 0\,,$$

qui signifie en fait

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deux matrices sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux, donc cette dernière égalité entre matrices 2×2 est équivalente à

$$(*)\begin{cases} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

Ce système ne possédant que la solution triviale, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, on en conclut que $\{A, B, C\}$ est libre ou, en d'autres termes, qu'aucune de ces matrices ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres. $\diamond$

Exemple 4.16. Dans l'espace V de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, considérons pour tout $k = 0, 1, \ldots, p$, le polynôme $f_k(t) := t^k$, c'est-à-dire que

$$f_0(t) := 1\,, \quad f_1(t) := t\,, \quad f_2(t) := t^2\,, \cdots, f_p(t) := t^p\,.$$

Lemme 3. *$\{f_0, f_1, \ldots, f_p\}$ est libre.*

Preuve: Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des scalaires. On a

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p = 0$$

si et seulement si

$$\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots + \lambda_p t^p = 0\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

On va maintenant utiliser le résultat suivant :

Théorème 4.17. *Soit $p(t)$ un polynôme à coefficients réels :*

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_p t^p\,.$$

Si $p(t) = 0$ pour tout $t \in I$ (où I est un intervalle ouvert), alors p est le polynôme nul, c'est-à-dire que $a_0 = a_1 = \cdots = a_p = 0$.

Preuve: Voir par exemple **ici** (lien web). $\diamond$

Ce résultat implique, en prenant $I = \mathbb{R}$, que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, et donc que la famille $\{f_0, f_1, \ldots, f_p\}$ est libre. $\diamond$

$\diamond$

Exemple 4.18. Dans l'espace V de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, considérons la famille $\{f, g, h\}$, où pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) := 7\,, \qquad g(t) := \cos(2t)\,, \qquad h(t) := \cos^2(t)\,.$$

Pour savoir $\{f, g, h\}$ est libre ou liée, on considère la relation linéaire

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 h = 0\,,$$

qui signifie

$$7\lambda_1 + \lambda_2 \cos(2t) + \lambda_3 \cos^2(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Or si on se souvient de la relation trigonométrique

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}\,,$$

on peut écrire

$$h(t) = \cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) = \frac{1}{14} f(t) + \frac{1}{2} g(t)\,.$$

Donc $h = \frac{1}{14} f + \frac{1}{2} g$, ce qui montre que la famille $\{f, g, h\}$ est liée. $\diamond$

4.4 Sous-espaces vectoriels

Définition 4.19. Soit V un espace vectoriel. Un sous-ensemble non vide $W \subset V$ est un **sous-espace vectoriel de** V si, lorsqu'on le munit de l'addition de V et de la multiplication par les scalaires, devient un espace vectoriel.

Proposition 2. *Un sous-ensemble non vide $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si les trois conditions ci-dessous sont satisfaites :*

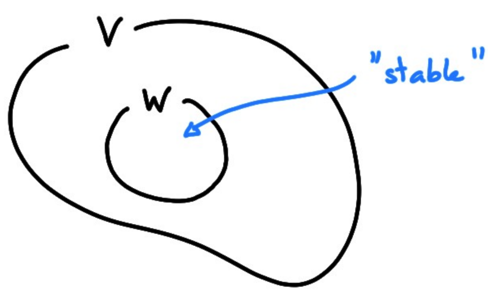
a) $0 \in W$.

b) Si $w \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda w \in W$.

c) Si $w, w' \in W$, alors $w + w' \in W$.

Preuve: (exercice) $\square$

On dit aussi qu'un sous-espace vectoriel est un sous-ensemble de V qui est *stable* par addition et par multiplication par des scalaires. Schématiquement :



Remarque 4.20. $\star$ Soit W un sous-espace vectoriel de V. Si on fixe un $w \in W$, alors $(-1)w = -w \in W$, et donc $w + (-w) \in W$, ce qui implique $0 \in W$. (Ceci montre que la première condition de la définition est en fait superflue.)

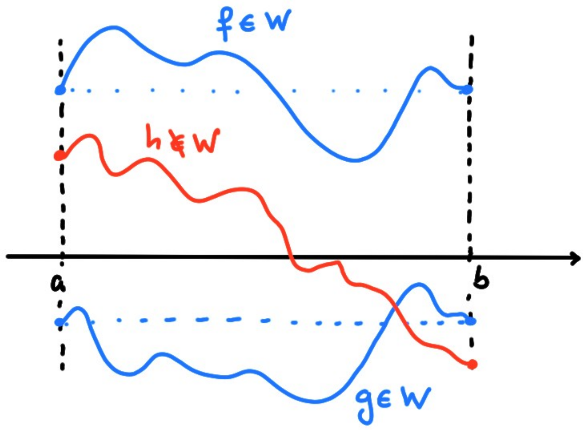
- ⋆ V, vu comme sous-ensemble de lui-même, peut être considéré comme un sous-espace vectoriel. Donc tous ce que nous dirons dans la suite peut aussi être appliqué au cas où $W = V$.

◇

Exemple 4.21. Soit V l'espace vectoriel des fonctions réelles sur l'intervalle $I = [a, b]$. Considérons

$$W := \{ f \in V \mid f(a) = f(b) \} .$$

Donc les éléments de W sont les fonctions sur $[a, b]$ dont le graphe a un point initial à même hauteur que le point final :



Montrons que W est un sous-espace vectoriel de V.

a) D'abord, la fonction nulle 0 est évidemment dans W, puisque $0(a) = 0(b) = 0$.

b) Ensuite, si $f \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$(\lambda f)(a) = \lambda f(a) = \lambda f(b) = (\lambda f)(b) ,$$

et donc $\lambda f \in W$.

c) Finalement, si $f, g \in W$, alors

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) = f(b) + g(b) = (f + g)(b) ,$$

et donc $f + g \in W$.

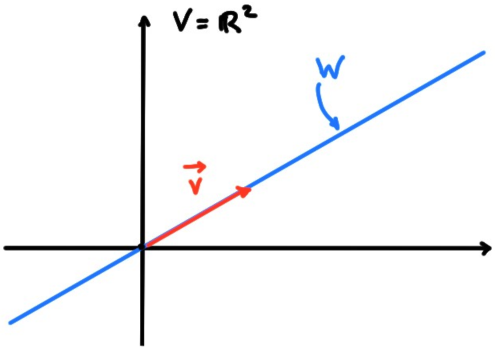
Sur le même espace vectoriel V (des fonctions réelles définies sur $[a, b]$), les sous-ensembles suivants sont aussi des sous-espaces vectoriels :

- ⋆ Les fonctions paires (si $[a, b]$ est symétrique).
- ⋆ Les fonctions impaires (si $[a, b]$ est symétrique).
- ⋆ Les fonctions continues sur $[a, b]$.
- ⋆ Les fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.

◇

Exemple 4.22. Si V est l'espace de toutes les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, et si $\mathbb{P}_n$ est l'ensemble de tous les polynômes de degré au plus égal à n, alors $\mathbb{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de V. (Voir exercices.) ◇

Exemple 4.23. Dans $V = \mathbb{R}^2$, considérons le sous-ensemble W des vecteurs situés sur la droite dirigée par $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, passant par l'origine :



Intuitivement, il est clair que cet ensemble W est "stable" : si on multiplie un vecteur de W par un scalaire, on obtient un vecteur qui est aussi dans W, et si on additionne deux vecteurs de W, alors on obtient un vecteur qui est aussi dans W : "on ne sort pas de W" en additionnant ou en multipliant par des scalaires.

Plus rigoureusement, montrons que W est un sous-espace vectoriel de $V = \mathbb{R}^2$. *Preuve*: Par définition, $W = \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}\}$: $\mathbf{w} \in W$ si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$.

a) Le vecteur nul $\mathbf{0}$ est évidemment dans W puisque $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}$.

b) Soit $\mathbf{w} \in W$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$, et soit $\mu \in \mathbb{R}$. Alors clairement $\mu\mathbf{w} \in W$ puisque $\mu\mathbf{w} = \mu(\lambda\mathbf{v}) = (\mu\lambda)\mathbf{v} \in W$.

c) Si $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, alors il existe $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}' = \lambda'\mathbf{v}$, et donc

$$\mathbf{w} + \mathbf{w}' = \lambda\mathbf{v} + \lambda'\mathbf{v} = (\lambda + \lambda')\mathbf{v}\,,$$

ce qui entraîne $\mathbf{w} + \mathbf{w}' \in W$.

◇

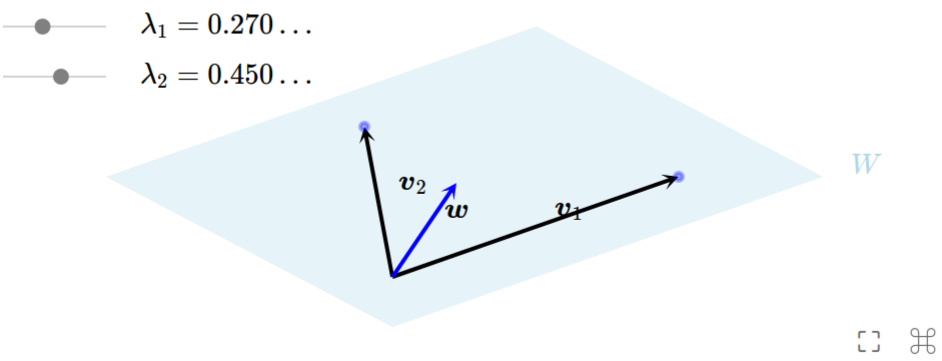
◇

Exemple 4.24. Dans $V = \mathbb{R}^3$, considérons le plan $W = \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ dirigé par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Par définition, tout vecteur $\mathbf{w} \in W$ est de la forme

$$\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2\,, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\,.$$



On affirme : W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. *Preuve*: Clairement, W est formé de tous les vecteurs qui sont combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, donc $\mathbf{w} \in W$ si et seulement si il existe des scalaires λ_1, λ_2 tels que

$$\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2\,.$$

En d'autres termes : $W = \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

a) Clairement, $\mathbf{0} \in W$ (prendre $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).
b) Soit $\mathbf{w} \in W$, de la forme $\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$, et soit $\mu \in \mathbb{R}$. Alors $\mu \mathbf{w} \in W$, car

$$\mu \mathbf{w} = \mu(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2) = (\mu\lambda_1)\mathbf{v}_1 + (\mu\lambda_2)\mathbf{v}_2 \,.$$

c) Si $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, de la forme $\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}' = \lambda_1' \mathbf{v}_1 + \lambda_2' \mathbf{v}_2$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{w} + \mathbf{w}' &= (\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2) + (\lambda_1' \mathbf{v}_1 + \lambda_2' \mathbf{v}_2) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_1')\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 + \lambda_2')\mathbf{v}_2 \,, \end{aligned}$$

et donc $\mathbf{w} + \mathbf{w}' \in W$.

◇

◇

Les deux derniers exemples sont des cas particuliers d'un procédé très général permettant de construire des sous-espaces vectoriels.

Définition 4.25. Soit V un espace vectoriel, et soient $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de V. Le sous-ensemble de V **engendré par** $v_1, \dots, v_p$, noté $\mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, est défini comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles des vecteurs $v_1, \dots, v_p$.

Lemme 4. $W = \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ *est un sous-espace vectoriel de* V.

Preuve: Fonctionne exactement comme les deux preuves dans les exemples ci-dessus.

a) La combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls, donne l'élément nul :

$$0 = 0v_1 + \cdots + 0v_p \in W \,.$$

b) Si $w \in W$, $w = \lambda_1 v_p + \cdots + \lambda_p v_p$, alors pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda w = \lambda(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p) = (\lambda\lambda_1)v_p + \cdots + (\lambda\lambda_p)v_p \in W$$

c) Si $w \in W$ et $w' \in W$,

$$\begin{aligned} w &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \,, \\ w' &= \lambda_1' v_1 + \cdots + \lambda_p' v_p \,, \end{aligned}$$

alors

$$w + w' = (\lambda_1 + \lambda_1')v_1 + \cdots + (\lambda_p + \lambda_p')v_p \in W \,.$$

□

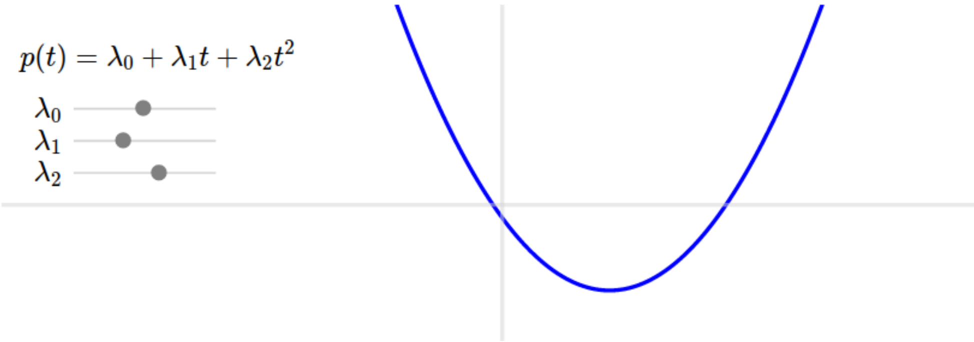
Exemple 4.26. Si V est l'espace de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et si $f_0, f_1, f_2 \in V$ sont définies par $f_k(t) := t^k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors

$$W = \mathrm{Vect}\{f_0, f_1, f_2\} = \mathbb{P}_2$$

est le sous-espace vectoriel de V contenant toutes les combinaisons linéaires

$$p = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \,,$$

c'est-à-dire tous les polynômes p de degré plus petit ou égal à 2 :

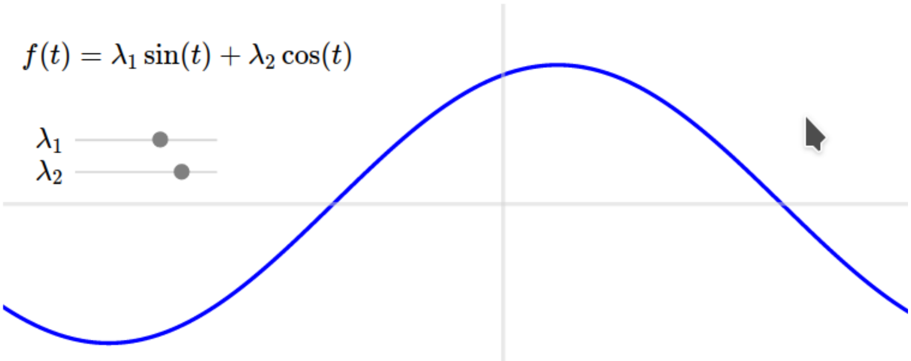


◇

Exemple 4.27. Si V est l'espace de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et si $f_1, f_2 \in V$ sont définies par

$$f_1(t) = \sin(t)\,, \qquad f_2(t) = \cos(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

alors $W = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2\}$ est le sous-espace vectoriel de V contenant toutes les combinaisons linéaires :



◇

4.5 Bases

Dans toute cette section, V est un espace vectoriel fixé.

Définition 4.28. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Une famille finie de vecteurs $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset W$ est une **base de** W si

a) $\mathcal{B}$ est libre, et si

b) $\mathcal{B}$ engendre W, c'est-à-dire que $W = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$.

L'avantage d'une base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ est qu'elle fournit une manière *simple et univoque de représenter les vecteurs de* W.

En effet, fixons un vecteur quelconque $w \in W$. Puisque $\mathcal{B}$ engendre W, w peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$: il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p\,.$$

Or il se trouve que ces coefficients sont uniques. En effet, supposons qu'il existe une autre famille de scalaires $\alpha'_1, \dots, \alpha'_p \in \mathbb{R}$, telle que

$$w = \alpha'_1 v_1 + \cdots + \alpha'_p v_p\,.$$

En soustrayant ces deux dernières expressions, on obtient que

$$0 = (\alpha_1 - \alpha_1')v_1 + \cdots + (\alpha_p - \alpha_p')v_p \, .$$

Mais puisque par hypothèse, $\mathcal{B}$ est libre, ceci entraîne

$$\alpha_1 - \alpha_1' = \cdots = \alpha_p - \alpha_p' = 0 \, ,$$

et donc $\alpha_1 = \alpha_1'$, . . ., $\alpha_p = \alpha_p'$. Il n'existe donc qu'une seule manière d'exprimer w comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Définition 4.29. Les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ définis ci-dessus sont les **composantes de** w **relativement à la base** $\mathcal{B}$.

Informel 4.30. Attention : les composantes sont des nombres que l'on peut utiliser pour décrire un vecteur, mais le vecteur **existait**, avant qu'on ne connaisse ses composantes, avant même qu'on ne parle de base !

Représentation en composantes

D'un côté, un vecteur $w \in W$ et un objet abstrait. De l'autre, sa représentation dans la base $\mathcal{B}$, à l'aide des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, en fait un objet avec lequel on peut *faire des calculs*. En effet, on peut stocker ces nombres dans un vecteur de $\mathbb{R}^p$, en définissant

$$[w]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

Remarque 4.31. L'*ordre* dans lequel on stocke les $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ est important. En effet, la $k$ème composante α_k est associée au $k$ème vecteur de la base, v_k. Il est donc important, quand on introduit une base, de *fixer l'ordre de ses vecteurs*. Donc pour indiquer que les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont ordonnés, on écrira dorénavant

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p) \, ,$$

qui est une famille ordonnée , au lieu de

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\} \, .$$

◇

Insistons sur le fait que le vecteur $[w]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^p$ contient *exactement la même information que* w (il **représente** w), puisque w peut toujours être reconstruit exactement à l'aide des composantes de $[w]_{\mathcal{B}}$:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = w \, .$$

Ceci implique que finalement, dès qu'on est en possession d'une base dans un sous-espace vectoriel, aussi abstrait soit-il, ses vecteurs peuvent être traités comme des vecteurs de $\mathbb{R}^p$!

Dans le cas où $W = V$, la définition ci-dessus revient donc à définir une **base de** V comme étant une famille libre qui engendre V.

Exemple 4.32. Considérons $V = \mathbb{R}^n$. Rappelons que l'on peut écrire tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ comme

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \cdots + x_n\mathbf{e}_n\,,$$

où

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \dots \quad \mathbf{e}_n := \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

Puisque cette famille de vecteurs est libre , on conclut que $\mathcal{B}_{\text{can}} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ est bien une base, la **base canonique de** $\mathbb{R}^n$. ◇

Exemple 4.33. Dans $V = \mathbb{R}^2$, considérons les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix},$$

et montrons que $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est une base de V. D'abord, on voit que $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont ne sont pas colinéaires, et donc que $\mathcal{B}$ est libre. Ensuite, pour montrer qu'elle engendre bien tout V, fixons un $\mathbf{x} \in V$ quelconque, et montrons qu'il peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, c'est-à-dire qu'il existe des scalaires λ_1 et λ_2 tels que

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2\,.$$

Si on nome x_1, x_2 les composantes de $\mathbf{x}$, alors cette dernière devient

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix},$$

qui n'est autre que

$$(*)\left\{\begin{array}{ccccc} 2\lambda_1 & - & 7\lambda_2 & = & x_1\\ \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & = & x_2\end{array}\right.$$

Après $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$,

$$(*)\left\{\begin{array}{ccccc} 2\lambda_1 & - & 7\lambda_2 & = & x_1\\ & & \frac{13}{2}\lambda_2 & = & x_2 - \frac{1}{2}x_1\end{array}\right.$$

En procédant "du bas vers le haut", on trouve

$$\lambda_1 = \tfrac{3}{13}x_1 + \tfrac{7}{13}x_2\,, \qquad \lambda_2 = -\tfrac{1}{13}x_1 + \tfrac{2}{13}x_2\,.$$

Ceci montre que $\mathbf{x}$ peut effectivement s'écrire comme combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Comme ceci vaut pour tout $\mathbf{x} \in V$, $\mathcal{B}$ engendre bien V.

On a donc montré que $\mathcal{B}$ est une base de V. ◇

Exemple 4.34. Considérons $V = \mathbb{P}_n$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré au plus égal à n. Rappelons que tout élément $p \in \mathbb{P}_n$ est de la forme

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Considérons les polynômes $e_0, e_1, \dots, e_n \in \mathbb{P}_n$ définis ainsi : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e_0(t) &:= 1\,,\\ e_1(t) &:= t\,,\\ e_2(t) &:= t^2\,,\\ &\vdots\\ e_n(t) &:= t^n\,. \end{aligned}$$

Pour le polynôme écrit au-dessus,

$$p = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \,.$$

Donc la famille $\{e_0, e_1, \ldots, e_p\}$ engendre $\mathbb{P}_n$. Mais on a aussi montré dans une section précédente que cette famille est libre. Ainsi, la famille $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ forme une base, appelée **base canonique de** $\mathbb{P}_n$.
Avec la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$, l'application $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ associe au polynôme p du dessus le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .$$

On peut alors manipuler le polynôme p à l'aide de sa représentation sous la forme $[p]_{\mathcal{B}}$, exactement comme si c'était un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$! ◇

Exemple 4.35. Considérons, dans $V = \mathbb{P}_2$, la famille $\mathcal{B} = (q_1, q_2, q_2)$, où

$$q_1(t) = 3 \,, \qquad q_2(t) = 1 - 2t \,, \qquad q_3(t) = t^2 + t$$

Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de V. Pour commencer, montrons que $\mathcal{B}$ est libre, en posant

$$\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3 = 0 \,,$$

qui signifie, après avoir regroupé les termes,

$$(3\lambda_1 + \lambda_2) + (-2\lambda_2 + \lambda_3)t + \lambda_3 t^2 = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \,.$$

On sait qu'un polynôme s'annule en tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. On en déduit que $\lambda_3 = 0$, puis que $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_3 = 0$, puis que $\lambda_1 = -\frac{1}{3}\lambda_2 = 0$. Ceci montre que $\mathcal{B}$ est libre.

Montrons ensuite que $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{P}_2$. Pour ce faire, fixons un $p \in \mathbb{P}_2$ quelconque, et montrons qu'on peut trouver des scalaires α_1, α_2 tels que

$$p = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3 \,.$$

Si $p(t) = a + bt + ct^2$, cela signifie que

$$a + bt + ct^2 = \alpha_1 3 + \alpha_2(1 - 2t) + \alpha_3(t^2 + t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \,,$$

qui devient, après avoir regroupé les termes,

$$(3\alpha_1 + \alpha_2 - a) + (-2\alpha_2 + \alpha_3 - b)t + (\alpha_3 - c)t^2 = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \,.$$

On voit donc que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ doivent satisfaire

$$(*) \left\{ \begin{array}{ccccccc} 3\alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = & a \\ & - & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & b \\ & & & & \alpha_3 & = & c \end{array} \right.$$

On trouve

$$\alpha_3 = c \,, \qquad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}(c - b) \,, \qquad \alpha_3 = \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{6}b - \tfrac{1}{6}c \,.$$

Ceci montre que $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{P}_2$.

Donc on a bien montré que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$. ◇

Extraire une base d'une famille génératrice

Supposons qu'un sous-espace $W \subset V$ soit engendré par une famille :

$$W = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_p\} .$$

Par définition, tout vecteur $w \in W$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des $v_1, \ldots, v_p$, mais cela ne signifie pas que ces vecteurs forment une base pour W : il se peut que certains ne soient pas nécessaires dans la description de W ; en d'autres termes, cette famille peut contenir "trop" de vecteurs, certains de ses vecteurs peuvent être superflus.

Lemme 5. *Soit W un sous-espace vectoriel de V, et soit*

$$\mathcal{F} = \{w_1, \ldots, w_r\}$$

une famille qui engendre W. Si un des vecteurs de $\mathcal{F}$, disons w_j, peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres w_k ($k \neq j$), alors en retirant w_j, la famille

$$\mathcal{F} \setminus \{w_j\} = \{w_1, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_r\}$$

engendre toujours W.

Preuve: Puisque $\mathcal{F}$ engendre W, tout vecteur $w \in W$ peut s'écrire

$$w = a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r .$$

Si $w_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i w_i$, alors

$$\begin{aligned} w = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i = \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} a_i w_i\Big) + a_j w_j &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} a_i w_i + a_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} \alpha_i w_i \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} (a_i + a_j \alpha_i) w_i , \end{aligned}$$

donc w peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F} \setminus \{w_j\}$. Ceci signifie que la famille $\mathcal{F} \setminus \{w_j\}$ engendre aussi W. □

Ce dernier résultat fournit un algorithme pour construire une base d'un sous-espace W, du moment que l'on possède une famille génératrice.

En effet, supposons qu'une famille finie $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ engendre W. On peut "nettoyer" cette famille à l'aide du lemme précédent, de la façon suivante :

a) Chercher un vecteur $v_j \in \mathcal{F}$ qui peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

b) S'il y en a un, retirer v_j de la famille, et recommencer. S'il n'y en a pas, s'arrêter.

Une fois que cet algorithme s'arrête, on obtient une famille $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ qui engendre toujours W, et dans laquelle aucun vecteur ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres ; c'est donc une base de W.

Exemple 4.36. Soit $V = \mathbb{R}^4$, et soit $W \subset V$ le sous-espace défini par

$$W = \mathrm{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} ,$$

où

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

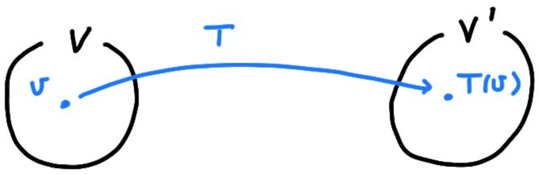
Remarquons que $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ n'est pas libre puisque $\mathbf{w}_2 = 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3$. Donc $\mathbf{w}_2$ est "superflu", et on peut le retirer, sans changer W :

$$W = \mathrm{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3\}.$$

Maintenant, $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_3$ n'étant pas colinéaires, $\mathcal{B} := (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3)$ est une base de W. ◇

4.6 Applications linéaires

Dans cette section, nous généralisons la notion d'application linéaire, au cas d'une application d'un espace vectoriel V (de départ) dans un espace vectoriel V' (d'arrivée) :



Rappelons que pour $v \in V$, l'élément $v' = T(v) \in V'$ est appelé **l'image de** v, et v est une **préimage de** v'.

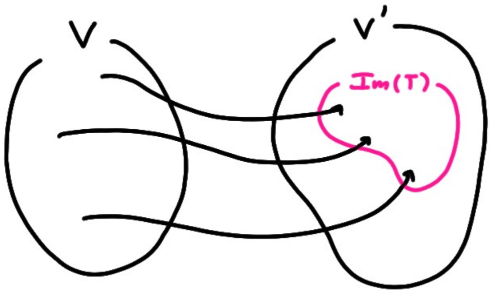
Étant des espaces vectoriels, V et V' possèdent chacun un zéro ; on les notera $0 \in V$ et $0' \in V'$ pour les distinguer. Par contre, l'addition dans ces espaces sera toujours notée "+" pour ne pas trop allourdir les notations .

Généralités

Rappelons rapidement, dans ce cadre général, quelques notions élémentaires de la théorie des fonctions $T : V \to V'$. (Si nécessaire, on pourra aller voir **ici** (lien web), pour d'autres exemples à propos de ces notions.)

Définition 4.37. L'**ensemble image** d'une application $T : V \to V'$ est défini par l'ensemble des éléments de l'ensemble d'arrivée qui possèdent au moins une préimage :

$$\mathrm{Im}(T) := \{v' \in V' \,|\, \exists\, v \in V \text{ tel que } T(v) = v'\}.$$

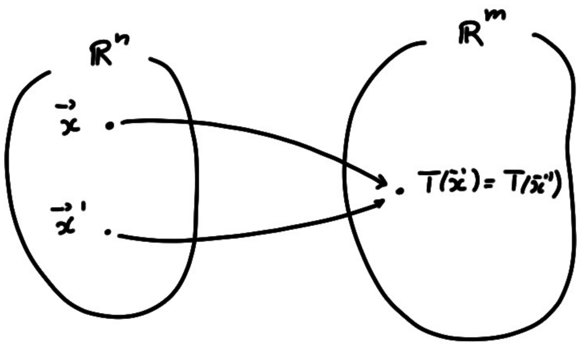


Définition 4.38. Une application $T : V \to V'$ est

- ⋆ **surjective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée V' possède au moins une préimage, c'est-à-dire si $\mathrm{Im}(T) = V'$.
- ⋆ **injective** si des éléments distincts ont des images distinctes, c'est-à-dire si $v_1 \neq v_2$ implique $T(v_1) \neq T(v_2)$.
- ⋆ **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.

Remarquons que :

- ⋆ Lorsque $T : V \to V'$ est surjective, alors pour tout $b \in V'$, l'équation
$$T(v) = b$$
possède au moins une solution $v \in V$.
- ⋆ Une application n'est pas injective si il existe au moins une paire de vecteurs, distincts ($v \neq v'$), tels que $T(v) = T(v')$:



Lorsque $T : V \to V'$ est injective, alors pour tout $b \in V'$, si l'équation
$$T(v) = b$$
possède une solution $v \in V$, cette solution est unique. (En effet, s'il y avait deux solutions, $v_1, v_2 \in V$, alors $T(v_1) = T(v_2) = b$, qui par l'injectivité implique $v_1 = v_2$.)
- ⋆ L'intérêt d'une application $T : V \to V'$ bijective est que l'on peut l'*inverser*. En effet, fixons un $v' \in V'$. Puisque T est surjective, v' possède au moins une préimage : il existe un $v_* \in V$ tel que
$$T(v_*) = v' \,.$$
Mais comme T est aussi injective, il ne peut pas exister, à part v_*, d'autre vecteur dont l'image soit égale à v'.

Par ce procédé, on associe à tout $v' \in V'$ un unique $v_* \in V$ tel que $T(v_*) = v'$. L'application qui à chaque v' associe son unique préimage v_* est appelée la **réciproque** de T. On la notera
$$\begin{aligned} T^{-1} : V' &\to V \\ v' &\mapsto T^{-1}(v') := v_* \,. \end{aligned}$$

Applications linéaires ; définition

Généralisons maintenant la notion d'application linéaire, que nous avions précédemment définie seulement dans le cas $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

Définition 4.39. Soient V et V' des espaces vectoriels. Une application $T : V \to V'$ est **linéaire** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

a) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ pour tous $v_1, v_2 \in V$,

b) $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ pour tout $v \in V$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque 4.40. On peut mettre les deux conditions de la définition en une seule : une application $T : V \to V'$ est **linéaire** si pour tous $v_1, v_2 \in V$, et pour tous scalaires $\alpha, \beta, \in \mathbb{R}$,

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)\,.$$

$\diamond$

Nous avons déjà vu plusieurs exemples d'applications linéaires dans le cas $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Rappelons le plus important :

Exemple 4.41. Si A est une matrice réelle $m \times n$, alors l'application

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\mapsto T(\mathbf{x}) := A\mathbf{x} \end{aligned}$$

est linéaire. $\diamond$

Exemple 4.42. Soit V l'espace des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, soit $V' = \mathbb{R}^2$, et soit $T : V \to V'$ définie ainsi : pour tout $f \in V$,

$$T(f) := \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \end{pmatrix} .$$

Alors T est linéaire. En effet, si $f, g \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} T(\alpha f + \beta g) &= \begin{pmatrix} (\alpha f + \beta g)(a) \\ (\alpha f + \beta g)(b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha f(a) + \beta g(a) \\ \alpha f(b) + \beta g(b) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} g(a) \\ g(b) \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f) + \beta T(g)\,. \end{aligned}$$

$\diamond$

Exemple 4.43. Soit $V = C([a, b])$ l'espace des fonctions (à valeurs réelles) continues sur $[a, b]$, et soit $V' = \mathbb{R}^2$. Soit $c \in]a, b[$ un point fixé et soit $T : V \to V'$ définie ainsi : pour tout $f \in V$,

$$T(f) := \begin{pmatrix} \displaystyle\int_a^c f(t)\,dt \\ \displaystyle\int_c^b f(t)\,dt \end{pmatrix} .$$

Alors T est linéaire et surjective. (voir exercices) $\diamond$

Linéarité de l'application "composantes"

On peut maintenant en dire plus sur l'application fondamentale :

Lemme 6. *Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$ une base d'un sous-espace vectoriel W. L'application $[\cdot]_\mathcal{B}$, qui associe à w le vecteur de $\mathbb{R}^p$ formé des composantes de w relativement à $\mathcal{B}$,*

$$\begin{aligned} [\cdot]_\mathcal{B} : W &\to \mathbb{R}^p \\ w &\mapsto [w]_\mathcal{B} \end{aligned}$$

est linéaire et bijective.

Preuve: En exercice. □

Noyau

Lorsqu'une application $T : V \to V'$ est linéaire, plusieurs choses peuvent être dites à son sujet.

Par exemple, la linéarité implique que le zéro est toujours envoyé sur le zéro :

$$T(0) = 0' .$$

En effet, en écrivant $0 = 0 + 0$ et en utilisant la linéarité,

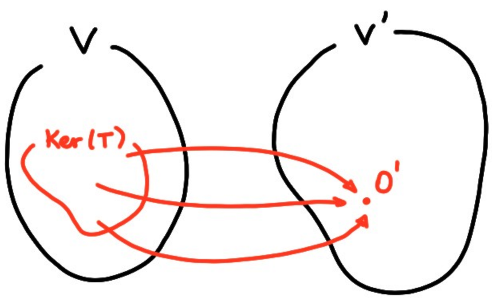
$$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) = (1 + 1)T(0) = 2T(0) ,$$

ce qui implique bien que $T(0) = 0'$.

Si 0 est toujours envoyé sur $0'$, il se pourrait aussi que d'autres éléments de V soient aussi envoyés sur $0'$:

Définition 4.44. Le **noyau** d'une application $T : V \to V'$ est l'ensemble de toutes les préimages de $0'$:

$$\ker(T) := \{v \in V \mid T(v) = 0'\} .$$



On a vu plus haut que le noyau contient toujours le zéro de V. On peut en dire un peu plus :

Lemme 7. *Une application linéaire $T : V \to V'$ est injective si et seulement si son noyau ne contient que le zéro :* $\ker(T) = \{0\}$.

Preuve: Supposons d'abord que T est injective. Considérons un $v \in \ker(T)$, c'est-à-dire tel que $T(v) = 0'$. Comme on sait que $T(0) = 0'$, on a donc $T(v) = T(0)$, et l'injectivité implique que $v = 0$. Donc $\ker(T) = \{0\}$.

Supposons maintenant que $\ker(T) = \{0\}$. Considérons $v_1, v_2 \in V$ tels que $T(v_1) = T(v_2)$. Par linéarité, ceci implique $T(v_1 - v_2) = 0'$, et donc $v_1 - v_2 \in \ker(T)$, et donc $v_1 - v_2 = 0$, ce qui implique $v_1 = v_2$. Donc T est injective. □

Exemple 4.45. Soit $T : V \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie plus haut ; pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$T(f) := \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \end{pmatrix} .$$

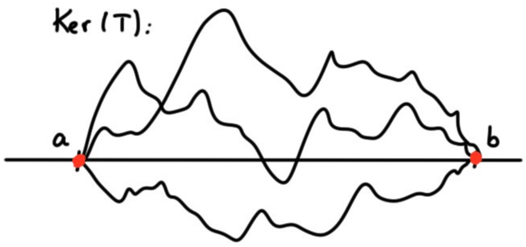
Le noyau de cette application est formé de toutes les fonctions f pour lesquelles

$$T(f) = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

c'est-à-dire

$$\ker(T) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \, : \, f(a) = f(b) = 0\} .$$

Ce noyau contient en particulier la fonction identiquement nulle bien-sûr, mais aussi une infinité de fonctions non-nulles :



Donc T n'est pas injective. ◇

Finalement, notons que le noyau et l'image sont des sous-ensembles stables de V et V', respectivement :

Lemme 8. *Si $T : V \to V'$ est linéaire, alors*

- ⋆ $\ker(T)$ *est un sous-espace vectoriel de* V.
- ⋆ $\mathrm{Im}(T)$ *est un sous-espace vectoriel de* V'.

Preuve: Commençons par le noyau :

- ⋆ On a vu que $T(0) = 0'$, ce qui signifie que $0 \in \ker(T)$.
- ⋆ Si $v_1, v_2 \in \ker(T)$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors la linéarité de T implique

  $$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \underbrace{T(v_1)}_{=0'} + \beta \underbrace{T(v_2)}_{=0'} = 0' ,$$

  et donc $\alpha v_1 + \beta v_2 \in \ker(T)$.

Pour $\mathrm{Im}(T)$, voir les exercices. □

Lemme 9. *Si $T : V \to V'$ est linéaire et bijective, alors sa réciproque $T^{-1} : V' \to V$ est aussi linéaire.*

Preuve: (Voir exercices.) □

Images de bases et bijections

Théorème 4.46. *Soit $T : V \to V'$ une application linéaire. Alors T est bijective si et seulement si l'image d'une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$ de V, notée $T(\mathcal{B}) = (T(v_1), \dots, T(v_p))$, est une base de V'.*

Preuve: Supposons que T est bijective, et considérons une base de V, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$. Montrons que $T(\mathcal{B}) := (T(v_1), \dots, T(v_p))$ est une base.

- ⋆ Soit v' un vecteur quelconque de V'. Puisque T est surjective, il existe $v \in V$ tel que $v' = T(v)$. Si on décompose $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$, on a

$$v' = T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_p T(v_p)\,.$$

Ceci signifie que $T(\mathcal{B})$ engendre V'.

- ⋆ Considérons une combinaison linéaire nulle,

$$0 = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_p T(v_p) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p)\,.$$

Puisque T est injective, on a $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = 0$, et comme $\mathcal{B}$ est une base, on en déduit que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$. Donc $T(\mathcal{B})$ est libre.

Supposons ensuite que $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$ est une base de V, et que son image $T(\mathcal{B}) := (T(v_1), \dots, T(v_p))$ est une base de V'.

- ⋆ Soit $v \in V$ tel que $T(v) = 0$. Puisqu'on peut décomposer v sur la base $\mathcal{B}$, $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$, on a

$$0 = T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_p T(v_p)\,.$$

Puisque $T(\mathcal{B})$ est une base, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$. Donc $v = 0$, ce qui implique que T est injective.

- ⋆ Soit $v' \in V'$, que l'on peut décomposer sur $T(\mathcal{B})$:

$$v' = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_p T(v_p) = T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p)\,,$$

qui implique que $v' \in \mathrm{Im}(T)$. Donc T eset surjective.

Donc T est bijective. □

4.7 Dimension

C'est à l'aide de la notion de *base* que l'on définit naturellement celle de *dimension*.

Dans cette section, nous définirons la dimension pour un sous-espace vectoriel $W \subset V$, en gardant à l'esprit que tout ce qui est dit est aussi valable dans le cas où $W = V$.

Commençons par voir une première conséquence de l'existence d'une base :

Lemme 10. *Si $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel W, et si $\mathcal{F} \subset W$ est une famille contenant plus de vecteurs que $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire plus de p vecteurs), alors $\mathcal{F}$ est liée.*

Preuve: Le résultat va suivre de ce que nous avons vu dans un chapitre précédent : dans $\mathbb{R}^p$, toute famille de plus de p vecteurs est liée.

Écrivons $\mathcal{F} = \{w_1, \dots, w_k\} \subset W$, avec $k > p$. Considérons la relation linéaire

$$(*)_1 : \qquad \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k = 0\,.$$

Appliquons $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ des deux côtés de cette relation. Par linéarité, et comme $[0]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$, on a

$$(*)_2 : \qquad \alpha_1 [w_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + \alpha_k [w_k]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}\,.$$

Comme $\{[w_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [w_k]_{\mathcal{B}}\}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on sait qu'elle est liée puisque $k > p$. On conclut qu'il existe une famille de coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, non tous nuls, tels que $(*)_2$ soit vérifiée. Puisque $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est linéaire et inversible, sa réciproque $[\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}$ est aussi linéaire (voir lemme de la section précédente). Donc en appliquant $[\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}$ des deux côtés de $(*)_2$, on récupère $(*)_1$, qui est donc vérifiée pour les mêmes coefficients α_j, ce qui implique que $\mathcal{F}$ est liée. □

Ainsi, si $\mathcal{B}$ est une base de W, on sait qu'une famille libre dans W ne peut pas contenir plus de vecteurs que le nombre de vecteurs contenus dans $\mathcal{B}$. Ceci implique aussi :

Corollaire 2. *Toutes les bases d'un même sous-espace vectoriel W contiennent le même nombre d'éléments.*

Preuve: Soient $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_p)$ et $\mathcal{B}' = (w_1', \ldots, w_n')$ deux bases de W. Si on suppose que $p > n$, alors le lemme précédent implique que $\mathcal{B}$ est liée, ce qui n'est pas possible puisque $\mathcal{B}$ est une base ; on conclut que $p \leqslant n$. De même, si on suppose que $n > p$, alors le lemme précédent implique que $\mathcal{B}'$ est liée, ce qui n'est pas possible puisque $\mathcal{B}'$ est une base ; on conclut que $n \leqslant p$. On a donc $p = n$. □

Puisque toutes les bases d'un espace ont le même nombre d'éléments, ce nombre décrit une propriété intrinsèque de cet espace :

Définition 4.47. Si un W possède une base contenant un nombre fini n de vecteurs, on dit que W est **de dimension finie**, et que sa **dimension** est égale à n, ce que l'on note comme suit : $\dim(W) = n$.

Dans le cas d'un espace vectoriel V, la **dimension de** V est donc le nombre d'éléments de n'importe quelle base de V.

Exemple 4.48. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons le sous-espace $W = \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, où

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ ne sont pas colinéaires, et qu'ils engendrent W, on en déduit que $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est une base de W. Ainsi, $\dim(W) = 2$, c'est un **plan**. ◇

Exemple 4.49. Considérons $V = \mathbb{R}^n$. Comme la base canonique $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ est formée de n vecteurs, n'importe quelle autre base doit aussi avoir n vecteurs, et donc

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n\,.$$

◇

Exemple 4.50. Considérons $V = \mathbb{P}^n$. Comme base la base canonique $(e_0, \ldots, e_n)$ est formée de $n + 1$ vecteurs, n'importe quelle autre base doit aussi avoir $n + 1$ vecteurs, et donc

$$\dim(\mathbb{P}^n) = n + 1\,.$$

◇

Remarque 4.51. Il existe des espaces vectoriels, comme par exemple l'espace de toutes les fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, qui ne sont *pas* de dimension finie : il n'existe aucune famille finie $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que toute fonction puisse s'écrire comme combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_n$. On dit que cet espace est **de dimension infinie**. ◇

Théorème 4.52. *Dans un sous-espace vectoriel W de dimension n, toute famille libre contenant n vecteurs est une base de W.*

Preuve: Supposons que $\mathcal{F} \subset W$, $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$, est libre. Prenons un $w \in W$, et définissons $\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cup \{w\}$. Par le résultat du dessus, $\mathcal{F}'$ contenant $n+1$ vecteur, elle est liée : il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$, pas tous nuls, tels que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = 0\,.$$

Si $\lambda_{n+1} = 0$, cela signifie qu'au moins un des $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est non-nul, et que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0\,,$$

et donc que $\mathcal{F}$ est liée, une contradiction. On en conclut que $\lambda_{n+1} \neq 0$, ce qui permet d'écrire w comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$:

$$w = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} v_n\,.$$

Donc $\mathcal{F}$ est bien une base de W. □

Construire une base par complétion

Théorème 4.53. *Soit W un sous-espace vectoriel de dimension finie n, et soit*

$$\mathcal{F} = (w_1, \dots, w_r) \subset W$$

*une famille libre, $r < n$. Alors $\mathcal{F}$ peut être **complétée** en une base de W. Plus précisément, il existe des vecteurs $w'_{r+1}, \dots, w'_n$ de W tels que*

$$\mathcal{F}' = (w_1, \dots, w_r, w'_{r+1}, \dots, w'_n)$$

soit une base de W.

Preuve: Puisque par hypothèse ($r < n$) $\mathcal{F}$ n'engendre pas W, il existe au moins un $w'_{r+1} \in W$ qui ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$. On conclut que

$$(w_1, \dots, w_r, w'_{r+1})$$

est libre. Si cette famille n'engendre toujours pas W, on recommence : il doit exister un $w'_{r+2} \in W$ qui ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de ses éléments, et donc

$$(w_1, \dots, w_r, w'_{r+1}, w'_{r+2})$$

est libre, etc. Puisque la dimension de W est finie et vaut n, ce procédé continue jusqu'à obtenir une famille libre qui contient exactement n éléments, et qui forme donc une base de W. □

Exemple 4.54. Considérons la famille libre $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \subset \mathbb{R}^3$, où

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Clairement, $\mathcal{F}$ est libre, mais elle n'engendre pas $\mathbb{R}^3$ (car $2 < 3$!). Par le théorème ci-dessus, on peut compléter $\mathcal{F}$ en une base de $\mathbb{R}^3$, en lui rajoutant un vecteur qui n'est pas une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Comment choisir ce vecteur ?

Remarquons que toute combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ est de la forme

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_1 \\ 3\alpha_2 \\ -3\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

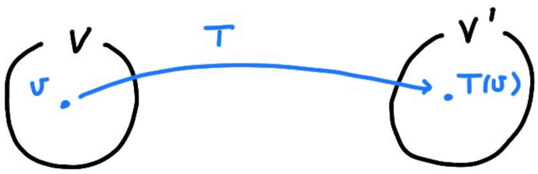
On peut donc prendre n'importe quel vecteur qui n'est pas de cette forme. Par exemple

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Maintenant, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. $\diamond$

4.8 Matrice d'une application

Considérons deux espaces vectoriels, V et V', ainsi qu'une application linéaire $T : V \to V'$.



Supposons maintenant que ces deux espaces vectoriels sont tous deux de dimension finie, chacun muni d'une base :

- $\star$ $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_p)$ est une base de V,
- $\star$ $\mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_m')$ est une base de V'.

Nous allons voir maintenant comment l'utilisation de ces bases va permettre de ramener l'étude de T à l'étude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$.

En effet, prenons un vecteur dans l'ensemble de départ, $v \in V$, et décomposons-le sur $\mathcal{B}$:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p \,,$$

ce qui permet de décrire v univoquement à l'aide du vecteur de $\mathbb{R}^p$ qui lui est associé :

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} .$$

Ensuite, regardons l'image de v par T. Puisque T est linéaire,

$$\begin{aligned} T(v) &= T(a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p) \\ &= a_1 T(v_1) + \cdots + a_p T(v_p) \,. \end{aligned}$$

En utilisant ensuite la linéarité de $[\cdot]_{\mathcal{B}'}$,

$$\begin{aligned} [T(v)]_{\mathcal{B}'} &= \big[a_1 T(v_1) + \cdots + a_p T(v_p)\big]_{\mathcal{B}'} \\ &= a_1 [T(v_1)]_{\mathcal{B}'} + \cdots + a_p [T(v_p)]_{\mathcal{B}'} \,. \end{aligned}$$

Cette dernière ligne est une combinaison linéaire des vecteurs $[T(v_1)]_{\mathcal{B}'}, \cdots, [T(v_p)]_{\mathcal{B}'}$ de $\mathbb{R}^m$, on peut donc l'interpréter comme un produit d'une matrice par le vecteur $[v]_{\mathcal{B}}$:

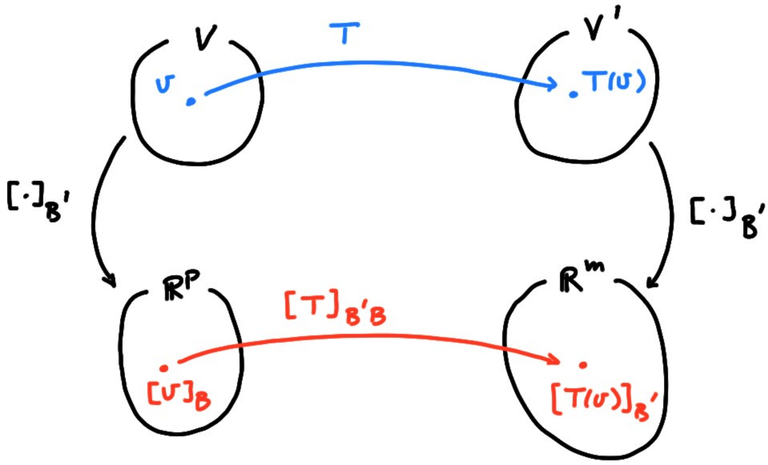
$$\begin{aligned} a_1 [T(v_1)]_{\mathcal{B}'} + \cdots + a_p [T(v_p)]_{\mathcal{B}'} &= \underbrace{\big[[T(v_1)]_{\mathcal{B}'} \cdots [T(v_p)]_{\mathcal{B}'}\big]}_{m \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}}_{=[v]_{\mathcal{B}}} \\ &= \big[[T(v_1)]_{\mathcal{B}'} \cdots [T(v_p)]_{\mathcal{B}'}\big] [v]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Définition 4.55. La matrice $m \times p$ définie par

$$[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} := \big[[T(v_1)]_{\mathcal{B}'} \cdots [T(v_p)]_{\mathcal{B}'}\big]$$

est la matrice qui **représente T relativement aux bases $\mathcal{B}$ (départ)** et **$\mathcal{B}'$ (arrivée)**.

Ce que nous avons fait ci-dessus peut se résumer dans le shéma suivant :



En utilisant les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, ainsi que les applications $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ et $[\cdot]_{\mathcal{B}'}$ qui leur sont associées, nous avons pu prendre l'application

$$v \mapsto T(v)$$

qui est abstraite, et nous l'avons rendue plus concrète, en la représentant à l'aide d'une matrice : on peut maintenant la voir comme une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$, dont la matrice est $[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$:

$$\underbrace{[v]_{\mathcal{B}}}_{\in\mathbb{R}^p} \mapsto \underbrace{[T(v)]_{\mathcal{B}'}}_{\in\mathbb{R}^m} = [T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$$

Maintenant, l'étude de T peut se réduire à celle de la matrice $[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

Exemple 4.56. Considérons l'application $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ définie ainsi : pour $p \in \mathbb{P}_3$,

$$T(p) = p'\,,$$

qui signifie que $T(p)(t) := p'(t)$ (dérivée de p par rapport à t).

Cette application est clairement linéaire puisque

$$T(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)' = \alpha p' + \beta q' = \alpha T(p) + \beta T(q)\,.$$

Calculons maintenant la matrice associée à cette application, relativement

- ⋆ à la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ dans $\mathbb{P}_3$, et
- ⋆ à la base canonique $\mathcal{B}'_{\text{can}} = (e_0, e_1, e_2)$ dans $\mathbb{P}_2$.

Par ce qu'on a dit plus haut, cette matrice sera

$$[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}\mathcal{B}_{\text{can}}} = \big[[T(e_0)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}}\, [T(e_1)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}}\, [T(e_2)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}}\, [T(e_3)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}}\big]\,.$$

Comme

$$e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2 \quad e_3(t) = t^3\,,$$

on a

$$e_0'(t) = 0 \quad e_1'(t) = 1 \quad e_2'(t) = 2t \quad e_3'(t) = 3t^2 \,,$$

et donc

$$T(e_0) = 0\,, \qquad T(e_1) = e_0\,, \qquad T(e_2) = 2e_1\,, \qquad T(e_3) = 3e_2\,,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} T(e_0) &= 0e_0 + 0e_1 + 0e_2 \\ T(e_1) &= 1e_0 + 0e_1 + 0e_2 \\ T(e_2) &= 0e_0 + 2e_1 + 0e_2 \\ T(e_3) &= 0e_0 + 0e_1 + 3e_2\,. \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$[T(e_0)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [T(e_1)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T(e_2)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [T(e_3)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matrice qui représente T est donc, relativement à ce choix de bases,

$$[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Prenons par exemple le polynôme $p \in \mathbb{P}_3$ défini par

$$p(t) = 2 + t^2 - 5t^3\,,$$

pour lequel

$$[p]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Son image par T est $T(p) \in \mathbb{P}_2$, qui relativement à $\mathcal{B}'_{\text{can}}$ est donnée par

$$[T(p)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = [T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}\mathcal{B}_{\text{can}}}[p]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -15 \end{pmatrix},$$

qui est bien la décomposition de

$$p'(t) = (2 + t^2 - 5t^3)' = 2t - 15t^2$$

relativement à $\mathcal{B}'_{\text{can}}$:

$$[p']_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

◇

Exemple 4.57. Considérons l'application

$$\begin{aligned} T : \mathbb{P}_2 &\to \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto T(p) := \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

($p'(t)$ est la dérivée de $p(t)$ par rapport à t.) Remarquons que T est linéaire, puisque pour tous $p, q \in \mathbb{P}_2$ et tout scalaires α, β,

$$\begin{aligned} T(\alpha p + \beta q) &= \begin{pmatrix} \alpha p(0) + \beta q(0) \\ \alpha p'(1) + \beta q'(1) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} q(0) \\ q'(1) \end{pmatrix} = \alpha T(p) + \beta T(q) . \end{aligned}$$

Puisqu'on connaît la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_0, e_1, e_2)$ dans $\mathbb{P}_2$ et la base canonique $\mathcal{B}'_{\text{can}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ dans $\mathbb{R}^2$ (on écrit $\mathcal{B}'_{\text{can}}$ juste pour la distinguer de l'autre, mais c'est bien la base canonique de $\mathbb{R}^2$), on peut calculer la matrice 2×3 qui représente T relativement à ces bases :

$$[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}\mathcal{B}_{\text{can}}} = \big[[T(e_0)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} \; [T(e_1)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} \; [T(e_2)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} \big] .$$

Comme $e_0(t) = 1$, $e_1(t) = t$, $e_2(t) = t^2$, on a

$$\begin{aligned} T(e_0) &= \begin{pmatrix} e_0(0) \\ e_0'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T(e_1) &= \begin{pmatrix} e_1(0) \\ e_1'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ T(e_2) &= \begin{pmatrix} e_2(0) \\ e_2'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

et donc

$$[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Par exemple, prenons le polynôme $p(t) = 9 - 2t + 7t^2$, et calculons son image. Alors

$$\begin{aligned} [T(p)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} &= [T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}\mathcal{B}_{\text{can}}} [p]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

qui est bien $\begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix}$. ◇

Nous reviendrons plus en profondeur sur la représentation d'une application linéaire à l'aide d'une matrice, en particulier dans le cas $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

4.9 Théorème du Rang

Théorème 4.58. *Soient V, V' deux espaces vectoriels de dimensions finies, et soit $T : V \to V'$ une application linéaire. Alors*

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(V) .$$

Preuve: Soit $n = \dim(V)$, et soit $p = \dim(\ker(T))$. Puisque $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de V, on a forcément que $p \leqslant n$. Ce que l'on doit donc montrer, c'est que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = n - p$.

Si $p = n$, on a $\mathrm{Im}(T) = \{0'\}$ (l'élément nul de V'), et donc $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 0$, et le théorème est démontré.

Si $p < n$, posons $r := n - p$, qui est par définition plus grand ou égal à 1. Nous allons montrer que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = r$.
Pour ce faire, commençons par considérer une base $\mathcal{B}_{\ker(T)}$ de $\ker(T)$:

$$\mathcal{B}_{\ker(T)} = \big(v_1, \dots, v_p\big) .$$

Puisque $p < n$, $\mathcal{B}_{\ker(T)}$ n'est pas une base de V. Mais on peut malgré tout la compléter en rajoutant $n - p = r$ vecteurs, afin d'obtenir une base de V :

$$\mathcal{B}_V = \big(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r\big) .$$

Montrons maintenant que la famille

$$\mathcal{B}' = \big(T(w_1), \dots, T(w_r)\big)$$

est une base de $\mathrm{Im}(T)$.

a) $\mathcal{B}'$ est libre. En effet, considérons une combinaison linéaire nulle,

$$\alpha_1 T(w_1) + \cdots + \alpha_r T(w_r) = 0 .$$

(On va montrer que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$.) Par la linéarité de T, on peut écrire cette dernière comme

$$T(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r) = 0 ,$$

qui indique que le vecteur $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r$ est dans $\ker(T)$. On peut donc le décomposer dans la base $\mathcal{B}_{\ker(T)}$:

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r = \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_p v_p .$$

Or on peut récrire cette dernière comme

$$\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_p v_p - \alpha_1 w_1 - \cdots - \alpha_r w_r = 0 .$$

Comme $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r)$ est une base de V, on a donc que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = -\alpha_1 = \cdots = -\alpha_r = 0 .$$

Ainsi, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$, ce qui démontre l'affirmation.

b) $\mathcal{B}'$ engendre $\mathrm{Im}(T)$. En effet, considérons un $v' \in \mathrm{Im}(T)$, c'est-à-dire un élément $v' \in V'$ pour lequel il existe un $v \in V$ tel que $v' = T(v)$. Puisque l'on peut décomposer v dans la base $\mathcal{B}_V$,

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} w_1 + \cdots + \lambda_n w_p ,$$

on a donc que

$$\begin{aligned} v' &= T(v) \\ &= T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} w_1 + \cdots + \lambda_n w_p) \\ &= \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_r T(v_r) + \lambda_{r+1} T(w_1) + \cdots + \lambda_n T(w_p) \\ &= \lambda_{r+1} T(w_1) + \cdots + \lambda_n T(w_p) . \end{aligned}$$

(Dans la dernière ligne, on a utilisé le fait que chaque $v_k \in \ker(T)$, et donc chaque $T(v_k) = 0$.) Mais cette dernière relation implique que $\mathcal{B}'$ engendre bien $\mathrm{Im}(T)$.

Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathrm{Im}(T)$, et comme elle contient r éléments, on a que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = r$. On a donc bien que

$$\begin{aligned} \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) &= p + r \\ &= p + (n - p) = n = \dim(V) . \end{aligned}$$

□