Chapitre 16

Espaces Euclidiens

16.1 Définition et exemples

L'introduction du *produit scalaire* sur $\mathbb{R}^n$ a permis d'utiliser un langage géométrique pour étudier des problèmes d'algèbre linéaire de grande dimensions, notamment grâce à la notion de *projection orthogonale*.

Dans ce chapitre, nous étendre la notion de produit scalaire à un espace vectoriel quelconque, nous permettant ainsi de considérer la notion de perpendicularité (et tout ce qu'on en a fait dans ces dernières sections) dans un cadre très général.

Définition 16.1. Soit V un espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** une application qui à toute paire de vecteurs $u, v \in V$ associe un réel noté $(u|v) \in \mathbb{R}$, satisfaisant aux propriétés suivantes :

a) $(u|v) = (v|u)$ pour tous $u, v \in V$.

b) Pour tout $v \in V$, l'application $u \mapsto (u|v)$ est linéaire.

c) Pour tout $u \in V$, l'application $v \mapsto (u|v)$ est linéaire.

d) $(u|u) \geqslant 0$ pour tout $u \in V$, et $(u|u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un **espace pré-Hilbertien**. Un espace pré-Hilbertien de dimension finie est un **espace Euclidien**.

Exemple 16.2. L'espace $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v}) := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\,,$$

est notre premier exemple d'espace Euclidien. ◇

Exemple 16.3. Considérons l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues sur un intervalle fermé et borné, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, noté $V = C([a, b])$.

Notons (voir le cours d'Analyse 1) que les fonctions continues sont intégrables. Donc si $f, g \in C([a, b])$, leur produit étant aussi une fonction continue, on peut définir le nombre

$$(f|g) := \int_a^b f(t)g(t)\,dt\,.$$

Vérifions que cela définit un produit scalaire sur $C([a, b])$.

a) Sans difficulté :

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt = \int_a^b g(t)f(t)\,dt = (g|f)\,.$$

b) Si on fixe g, alors pour tous $f_1, f_2 \in C([a,b])$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, par les propriétés de linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 | g) &= \int_a^b (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)) g(t)\, dt \\ &= \lambda_1 \int_a^b f_1(t) g(t)\, dt + \lambda_2 \int_a^b f_2(t) g(t)\, dt \\ &= \lambda_1 (f_1|g) + \lambda_2 (f_2|g)\,.\end{aligned}$$

c) En utilisant la symétrie (première propriété), et la propriété précédente,

$$\begin{aligned}(f \,|\, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) &= (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \,|\, f) \\ &= \lambda_1 (g_1 \,|\, f) + \lambda_2 (g_2 \,|\, f) \\ &= \lambda_1 (f \,|\, g_1) + \lambda_2 (f \,|\, g_2)\,.\end{aligned}$$

d) Puisque l'intégrale d'une fonction non-négative est non-négative,

$$(f|f) = \int_a^b \underbrace{f(t)^2}_{\geqslant 0}\, dt \geqslant 0\,.$$

De plus, l'intégrale de $f(t)^2$ est nulle si et seulement si $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$ (voir cours d'analyse), ce qui implique que f est la fonction identiquement nulle : $f = 0$.

Ainsi, muni de ce produit scalaire, $C([a,b])$ est un espace pré-Hilbertien (mais pas Euclidien puisque $C([a,b])$ est de dimension infinie). ◇

Norme et orthogonalité

Sur un espace Euclidien V muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, on peut définir

- ⋆ une **norme**,

$$\|v\| := \sqrt{(v|v)}\,,$$

  ce qui permet ensuite de parler de la **distance** entre deux vecteurs $u, v \in V$, définie par $\|u - v\|$.
- ⋆ la notion d'orthogonalité : deux vecteurs $u, v \in V$ sont **orthogonaux**, noté $u \perp v$, si

$$(u|v) = 0\,.$$

Exemple 16.4. Sur $C([0,\pi])$, considérons les fonctions $f(t) := t$ et $g(t) := \sin(t)$, et calculons leur produit scalaire en utilisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}(f|g) &= \int_0^\pi t \sin(t)\, dt \\ &= t(-\cos(t))\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(t)\, dt = \pi\,.\end{aligned}$$

Ensuite, si $h(t) = \cos(t)$, alors

$$\begin{aligned}(g|h) &= \int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2t)\, dt \\ &= \frac{1}{4}(-\cos(2t))\Big|_0^\pi = 0\,,\end{aligned}$$

donc $g \perp h$. ◇

16.2 Projections et applications

Mais le plus grand intérêt d'un produit scalaire est de pouvoir faire des projections. Donc en toute généralité, la **projection orthogonale** d'un $\mathbf{v} \in V$ sur un $w \in V$ est définie par

$$\mathrm{proj}_w(v) := \frac{(v|w)}{(w|w)} w \, .$$

Exemple 16.5. Si $f, g \in C([0, \pi])$ sont définies comme dans l'exemple précédent, $f(t) = t$, $g(t) = \sin(t)$, on peut calculer

$$\mathrm{proj}_g(f) = \frac{(f|g)}{(g|g)} g = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} g = 2g \, ,$$

donc $\mathrm{proj}_g(f)$ est la fonction $\mathrm{proj}_g(f)(t) = 2\sin(t)$.

Ou encore,

$$\mathrm{proj}_f(g) = \frac{(g|f)}{(f|f)} f = \frac{\pi}{\frac{\pi^3}{3}} g = \frac{3}{\pi^2} f \, ,$$

donc $\mathrm{proj}_g(f)(t) = \frac{3}{\pi^2} t$. ◇

Mais nous pouvons réutiliser tout ce que nous avons fait avec les projections. Par exemple, on peut (ci-dessous, on suppose partout que W est de dimension finie)

- ⋆ Projeter un vecteur $v \in V$ sur un sous-espace W, en garantissant que la projection est l'unique élément de W qui satisfait

  $$\|v - \mathrm{proj}_W(v)\| = \min_{w \in W} \|v - w\| \, .$$

  Si $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_k)$ est une base orthogonale de W, alors

  $$\mathrm{proj}_W(v) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(v|w_j)}{(w_j|w_j)} w_j \, .$$

- ⋆ Utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour orthogonaliser une base fixée dans un sous-espace $W \subset V$ de dimension finie.
- ⋆ Utiliser la projection sur un sous-espace $W \subset V$ de dimension finie pour approximer un vecteur $v \notin W$ à l'aide d'une combinaison linéaire d'éléments de W.