Chapitre 11

Diagonalisation

11.1 Motivation, définition

Nous l'avions dit au début du chapitre sur les vecteurs et valeurs propres, notre but était de un outil permettant d'étudier une application linéaire de façon plus géométrique.

Un idéal : les matrices diagonales

Commençons par décrire les applications qui, même en grande dimensions, sont très simples à comprendre : les applications dont la matrice (relativement à la base canonique) est diagonale. En effet, considérons une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto T(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ d_2 x_2 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix}$$

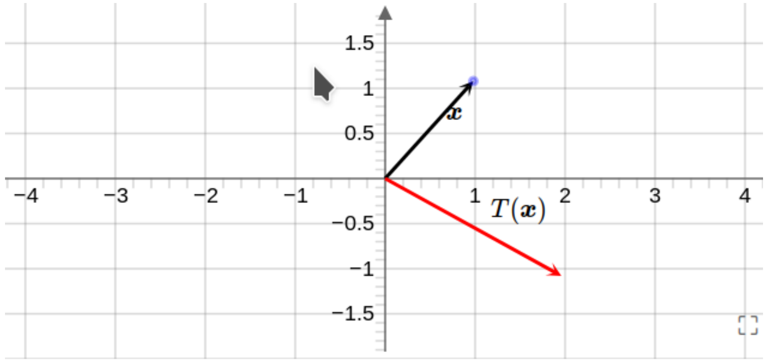
Une telle application se comprend simplement dans le sens suivant : chaque variable x_k n'est que multipliée par d_k, et n'interfère pas avec les autres variables.

Informel 11.1. Donc une application linéaire dont la matrice dans une base est diagonale correspond dans cette base à faire, indépendamment pour chaque k, une simple "dilatation" ("stretching") par un facteur d_k selon la composante k.

Exemple 11.2. Dans le plan, considérons

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} .$$

Dans ce cas, l'effet de T simple à décrire : elle multiplie x_1 par 2, et change le signe de x_2. Ceci permet de construire l'image d'un $\mathbf{x}$ quelconque à la règle et au compas :



◇

Objectif

On sait que la représentation d'une application linéaire relativement à la base canonique n'est qu'une représentation parmi d'autres. Au vu de la discussion ci-dessus, on peut donc se poser la question de savoir si, *pour une application linéaire donnée, il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale*. Si c'est le cas (parce que ça ne sera pas toujours possible), alors on a tout avantage à choisir cette base pour travailler, puisque dans cette base l'application ne devient qu'une modification multiplicative de chacune des composantes, indépendamment des autres. Le but de la **diagonalisation**, que nous présentons dans ce chapitre, est de déterminer si une application donnée peut (ou ne peut pas) être rendue diagonale dans une base bien choisie.

Puisque la diagonalisation a pour but de réduire une application à une base dans laquelle elle "multiplie simplement les composantes par des nombres", c'est sans surprise que les notions de vecteur propre et valeur propre joueront un rôle central dans son développement.

Avant de passer à l'étude générale de la diagonalisation, voyons comment elle s'implémente dans un cas simple.

Diagonaliser une application dans le plan

Exemple 11.3. Reprenons l'application utilisée comme motivation de la notion de vecteur propre, dans le chapitre précédent :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto T(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Relativement à la base canonique, on a donc

$$[T]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

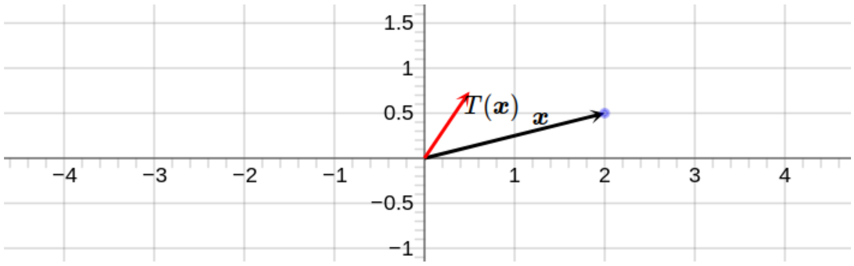
Nous avions remarqué que certains vecteurs subissaient, sous l'action de T, une simple multiplication par un scalaire. Maintenant que l'on sait que ces vecteurs sont les vecteurs propres, on peut les calculer explicitement. Puisque

$$P_{[T]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}}(\lambda) = 2\lambda^2 + \lambda - 1 ,$$

on a deux valeurs propres :

- ⋆ $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, avec espace propre associé $E_{\frac{1}{2}} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$
- ⋆ $\lambda_2 = -1$, avec espace propre associé $E_{-1} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

On peut représenter ces espaces propres, et vérifier comment ils sont modifiés sous l'action de T :



Ensuite, choisissons deux vecteurs propres,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \in E_{\frac{1}{2}}\,, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \in E_{-1}\,.$$

Ces vecteurs étant indépendants (évident, mais surtout vrai parce qu'ils sont associés à des valeurs propres distinctes !), ils forment une base de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Exprimons T dans cette base $\mathcal{B}$ formée de vecteurs propres :

$$[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}}{}^{-1}[T]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}}$$

Puisque

$$P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\,, \qquad P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}}{}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}\,,$$

on a

$$\begin{aligned}[T]_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\0 & -3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a ainsi *diagonalisé* T ; sur la diagonale de $[T]_{\mathcal{B}}$ apparaissent précisément les valeurs propres.

Maintenant, lorsqu'on est dans la base $\mathcal{B}$, l'effet de T sur un vecteur devient transparent puisque sa matrice est diagonale. En effet, si

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\,,$$

alors

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1\\-x_2\end{pmatrix}$$

Avec cette information, on peut maintenant retourner sur l'animation du dessus, et observer comment effectivement, sous l'action de T, relativement à $\mathcal{B}$, la première composante de $\mathbf{x}$, est multipliée par $\frac{1}{2}$, et la deuxième est multipliée par -1. ⋄

Définition générale de la diagonalisabilité

Définition 11.4. Une matrice A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire si il existe une matrice diagonale D, et une matrice inversible M telles que

$$A = MDM^{-1}\,.$$

Remarque 11.5.
- ⋆ La condition peut aussi s'exprimer par "$A = M^{-1}DM$", mais on verra que celle-ci est plus naturelle.
- ⋆ Toute matrice diagonale est diagonalisable.

◇

Maintenant se pose la question : *comment savoir si une matrice est diagonalisable ?*

On s'en doute, cette question est reliée à l'existence de valeurs et de vecteurs propres. Mais ça n'est pas suffisant, comme on verra dans la section suivante.

11.2 Critère de base

Le résultat suivant est une caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice, qui utilise les vecteurs propres de cette matrice :

Théorème 11.6. *Soit A une matrice $n \times n$. Alors A est diagonalisable si et seulement si A possède n vecteurs propres linéairement indépendants.*

De plus, dans le cas où A est diagonalisable, $A = MDM^{-1}$, alors
- ⋆ *D a sur sa diagonale des valeurs propres de A,*
- ⋆ *les colonnes de M sont les n vecteurs propres indépendants de A.*

Preuve: Supposons que A est diagonalisable : il existe donc $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ et $M = [\mathbf{m}_1 \cdots \mathbf{m}_n]$, inversible, telle que $A = MDM^{-1}$. Remarquons alors que puisque M est inversible, ses colonnes sont indépendantes. Ensuite, si on multiplie à droite par M, on obtient

$$AM = MD\,.$$

Si on exprime D comme

$$D = [d_1\mathbf{e}_1 \cdots d_n\mathbf{e}_n]\,,$$

alors

$$\begin{aligned} MD &= M\big[d_1\mathbf{e}_1 \cdots d_n\mathbf{e}_n\big] \\ &= \big[d_1M\mathbf{e}_1 \cdots d_nM\mathbf{e}_n\big] \\ &= \big[d_1\mathbf{m}_1 \cdots d_n\mathbf{m}_n\big]\,. \end{aligned}$$

On peut donc exprimer $AM = MD$ comme suit :

$$\big[A\mathbf{m}_1 \cdots A\mathbf{m}_n\big] = \big[d_1\mathbf{m}_1 \cdots d_n\mathbf{m}_n\big]\,,$$

qui implique bien que $A\mathbf{m}_j = d_j\mathbf{m}_j$ pour tout $j = 1, \dots, n$, et donc que A possède n vecteurs propres linéairement indépendants.

Inversément, supposons que A possède n vecteurs propres linéairement indépendants, que l'on peut noter $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Nommons leurs valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$A\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j\,, \qquad j = 1, \dots, n\,.$$

Posons

$$M := [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n]\,, \qquad D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,.$$

Puisque les $\mathbf{v}_j$ sont indépendants, M est inversible. Calculons :

$$\begin{aligned} AM &= A[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n] \\ &= [A\mathbf{v}_1 \cdots A\mathbf{v}_n] \\ &= [\lambda_1\mathbf{v}_1 \cdots \lambda_n\mathbf{v}_n] \\ &= MD\,. \end{aligned}$$

En multipliant à droite par M^{-1}, on obtient $A = MDM^{-1}$, qui signifie bien que A est diagonalisable. □

Informel 11.7. Donc une matrice est diagonalisable si et seulement si il est possible de construire une base de $\mathbb{R}^n$ composée uniquement de vecteurs propres de cette matrice.

Remarque 11.8. Ce qui n'est pas précisé, dans l'énoncé du théorème ci-dessus, mais que nous avons observé dans la preuve, c'est que l'*ordre* dans lequel les valeurs propres sont rangées sur la diagonale de D doit respecter l'ordre dans lequel les vecteurs propres sont rangés pour former M. On le fera explicitement dans des cas particuliers, plus bas. ◇

Avant de voir quelques exemples, donnons une conséquence directe du théorème :

Corollaire 6. *Si A est $n \times n$ et possède n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.*

Preuve: Si A possède n valeurs propres distinctes, alors elle possède aussi n vecteurs propres. Puisque ces vecteurs propres sont associés à des valeurs propres distinctes, ils sont linéairement indépendants. Par le théorème ci-dessus, ceci implique que A est diagonalisable. □

Exemple 11.9. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Comme $P_A(\lambda) = (5-\lambda)^2 + 3 \geqslant 3$, A n'a aucune valeur propre, donc aucun vecteur propre. Par conséquent, A n'est pas diagonalisable. ◇

Exemple 11.10. Nous avons aussi vu que $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ possède une seule valeur propre, $\lambda_1 = 3$, mais que

$$E_3 = \ker(A - 3I_2) = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\,.$$

Ceci implique que B ne possède pas deux vecteurs propres linéairement indépendants, donc B n'est pas diagonalisable. ◇

Informel 11.11. Dans ce dernier exemple, on a une matrice qui possède une infinité de vecteurs propres, mais qui n'est pas diagonalisable parce que ses vecteurs propres ne "remplissent" pas assez $\mathbb{R}^2$ (ils ne permettent pas de former une base).

Exemple 11.12. Étudions la diagonalisabilité de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)\,. \end{aligned}$$

Puisque B est 3×3 et possède 3 valeurs propres distinctes, le corollaire ci-dessus implique que B est diagonalisable. Écrivons la diagonalisation explicitement.

D'abord, calculons les espaces propres :

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}, \\ E_2 &= \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \\ E_3 &= \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Pour ce faire, il nous faut un vecteur propre pour chaque valeur propre. Choisissons, pour chaque valeur propre, un vecteur propre associé :

- ⋆ Pour $\lambda_1 = 1$, on peut prendre $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- ⋆ Pour $\lambda_2 = 2$, on peut prendre $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- ⋆ Pour $\lambda_3 = 3$, on peut prendre $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(Les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sont automatiquement indépendants, puisqu'ils sont associés à des valeurs propres distinctes.)

Maintenant, pour réaliser la diagonalisation, on place ces valeurs propres sur une diagonale, et les vecteurs propres associés, *dans le même ordre*, dans une matrice de changement de base :

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M := [\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

qui donne la diagonalisation $B = MDM^{-1}$.

Mais on pourrait aussi organiser les valeurs propres dans un ordre différent ; la seule condition à respecter est que *le placement des vecteurs propres dans la matrice de changement de base respecte l'ordre choisi pour les valeur propres*. Par exemple,

$$\widetilde{D} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{M} := [\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_3\,\mathbf{v}_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

qui donne la diagonalisation $B = \widetilde{M}\widetilde{D}\widetilde{M}^{-1}$. ⋄

Exemple 11.13. Études la diagonalisabilité de

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette fois,

$$P_C(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+2)^2.$$

On n'a que deux valeurs propres (et pas 3), donc les hypothèses du corollaire ne sont pas satisfaites. Pour voir si l'hypothèse du théorème est satisfaites, on doit voir s'il est possible de former une base de $\mathbb{R}^3$ avec des vecteurs propres.

Or l'étude des espaces propres révèle que

- ⋆ Pour $\lambda_1 = 1$, E_1 est engendré par $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- ⋆ Pour $\lambda_2 = -2$, E_{-2} est engendré par $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puisque $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ est libre, donc forme une base de $\mathbb{R}^3$; ainsi, le théorème implique que C est diagonalisable. La diagonalisation peut se faire par exemple avec

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad M := [\mathbf{v}_1\, \mathbf{w}_1\, \mathbf{w}_2] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui donne $C = MDM^{-1}$. Bien-sûr, d'autres choix sont possibles. ⋄

11.3 Deuxième critère

Le deuxième critère est essentiellement une conséquence du premier, mais prend une forme dans laquelle on peut déterminer la diagonalisabilité uniquement à partir de la connaissance des multiplicités géométriques des valeurs propres :

Théorème 11.14. *Soit A une matrice $n \times n$. Alors A est diagonalisable si et seulement si son spectre est non-vide, et si*

$$\sum_{\lambda \in \text{spectre}(A)} \text{mult}_g(\lambda) = n.$$

De plus, cette dernière égalité est vérifiée si et seulement si

$$\text{mult}_g(\lambda) = \text{mult}_a(\lambda) \qquad \forall \lambda \in \text{spectre}(A).$$

Preuve: Supposons que $\text{spectre}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. $\Rightarrow$: Supposons que A est diagonalisable. Par le théorème de la section précédente, il existe donc une base de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de A :

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Puisque chaque $\mathbf{v}_j$ est vecteur propre, il doit être associé à une des valeurs propres de $\mathrm{spectre}(A)$. Pour $i = 1, \dots, k$, définissons m_i comme étant le nombre de vecteurs de la famille $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ qui sont associés à la valeur propre λ_i. On a donc

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n\,.$$

Puisque $\mathcal{B}$ est une base, les vecteurs de $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ qui sont associés à une même valeur propre forment une famille libre, donc

$$m_i \leqslant \mathrm{mult}_g(\lambda_i)\,.$$

Mais comme on sait aussi que $\mathrm{mult}_g(\lambda_i) \leqslant \mathrm{mult}_a(\lambda_i)$, on peut écrire

$$n = \sum_{i=1}^{k} m_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mult}_g(\lambda_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mult}_a(\lambda_i) \leqslant n\,,$$

qui implique

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{mult}_g(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mult}_a(\lambda_i) = n\,.$$

Remarquons aussi que cette dernière implique que

$$\mathrm{mult}_g(\lambda_i) = \mathrm{mult}_a(\lambda_i) \qquad \forall i = 1, \dots, k\,.$$

En effet, si il existe un i tel que

$$\mathrm{mult}_g(\lambda_i) < \mathrm{mult}_a(\lambda_i)\,,$$

alors

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{mult}_g(\lambda_i) < \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mult}_a(\lambda_i)\,.$$

$\Leftarrow$: (Le paragraphe qui suit est un peu lourd en notations, même si l'idée est simple.) Supposons maintenant que cette dernière égalité est vraie. Pour chaque $i = 1, \dots, k$, définissons $g_i := \mathrm{mult}_g(\lambda_i) = \dim(E_{\lambda_i})$, et considérons une base de E_{λ_i}, notée

$$\mathcal{B}_i = (\mathbf{v}_1^{(i)}, \mathbf{v}_2^{(i)}, \dots, \mathbf{v}_{g_i}^{(i)})\,.$$

Montrons que l'union de toutes ces bases,

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$$

qui contient par définition n vecteurs, est libre.
On considère donc la relation linéaire

$$(*) \qquad \lambda_1^{(1)}\mathbf{v}_1^{(1)} + \cdots + \lambda_{g_k}^{(k)}\mathbf{v}_{g_k}^{(k)} = \mathbf{0}\,.$$

Plus précisément,

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{g_i} \lambda_j^{(i)}\mathbf{v}_j^{(i)} = \mathbf{0}\,.$$

Si on introduit les vecteurs

$$\mathbf{w}_i := \sum_{j=1}^{g_i} \lambda_j^{(i)}\mathbf{v}_j^{(i)}\,,$$

alors $(*)$ devient

$$(*) \qquad \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$$

Mais chaque $\mathbf{w}_i \in E_{\lambda_i}$, et donc les $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, ils forment donc une famille libre. Ceci signifie que si leur somme est nulle, alors ils sont tous nuls :

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{0} \qquad \forall i = 1, \dots, k.$$

Mais comme $\mathcal{B}_i = (\mathbf{v}_1^{(i)}, \mathbf{v}_2^{(i)}, \dots, \mathbf{v}_{g_i}^{(i)})$ est une base, ses vecteurs sont indépendants, et donc

$$\mathbf{w}_i = \lambda_1^{(i)} \mathbf{v}_1^{(i)} + \cdots + \lambda_{g_i}^{(i)} \mathbf{v}_{g_i}^{(i)} = \mathbf{0}$$

implique que $\lambda_1^{(i)} = \cdots = \lambda_{g_i}^{(i)} = 0$. Ceci montre que $\mathcal{B}$ est libre ; puisqu'elle contient n vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, A est diagonalisable. □

Exemple 11.15. Dans la section précédente, on avait considéré

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} .$$

On a vu que cette matrice possède trois valeurs propres, chacune de multiplicité géométrique égale à 1, ce qui implique

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{spectre}(A)} \mathrm{mult}_g(\lambda) = 1 + 1 + 1 = 3 .$$

Par le théorème ci-dessus, on en déduit que B est diagonalisable. ◇

Exemple 11.16. Étudions la diagonalisabilité de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Puisque

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\underbrace{\lambda^2 - 2\lambda + 2}_{\Delta < 0!}) ,$$

A ne possède qu'une valeur propre : $\lambda_1 = 1$, avec $\mathrm{mult}_a(1) = 1$. Or comme

$$E_1 = \ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ,$$

on a $\mathrm{mult}_g(1) = 1$. Puisqu'ici $n = 3$, on a

$$\underbrace{\sum_{\lambda \in \mathrm{spectre}(A)} \mathrm{mult}_g(\lambda)}_{=1} < 3 ,$$

le théorème implique que A n'est pas diagonalisable. ◇