Chapitre 9

Déterminant

9.1 Motivation : le cas 2×2 revisited

La théorie du déterminant, que nous allons aborder dans ce chapitre, est un sujet central en algèbre linéaire. Nous ne le présenterons pas dans sa forme la plus générale, et ne démontrerons pas tous les résultats. Notre but sera de présenter les propriétés de base du déterminant, et de voir leurs conséquences.

Nous avons déjà rencontré le déterminant lorsque nous avons étudié l'inversibilité pour les matrices 2×2. En effet, nous avons vu qu'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est inversible si et seulement si son **déterminant**, qui est le nombre défini par

$$\det(A) := ad - bc\,,$$

est non-nul.

Pouvoir savoir si une matrice 2×2 est inversible ou pas, simplement en calculant un nombre et en vérifiant s'il est nul ou pas, représente certainement un résultat intéressant du point de vue théorique, mais l'étendre au cas $n \times n$ ne sera pas sans difficulté.

En effet, dans le cas $n \times n$, nous avons vu quelques caractérisations équivalentes de l'inversibilité, mais toutes étaient de nature plus calculatoire, et toutes impliquaient plus ou moins l'étude d'un système linéaire.

Pour motiver ce que nous allons faire dans le cas $n \times n$, nous allons revenir sur le cas 2×2, et regarder de plus près cette fonction $A \mapsto \det(A)$, pour nous rendre compte de certaines caractéristiques, et sans du tout nous préoccuper de l'inversibilité.

Plutôt que de voir une matrice 2×2 comme un tableau de 4 nombres rangés dans une grille, voyons la comme la donnée de deux colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2]\,,$$

où

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le déterminant peut être vu comme une fonction sur les paires de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, définie ainsi :

$$\det\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) := ad - bc\,.$$

Pendant un instant, nous n'utiliserons plus la notation "$\det$", et considérerons seulement la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\mapsto \varphi(\mathbf{a}\,\mathbf{b}) := a_1 b_2 - a_2 b_1\,. \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes découlent entièrement de sa définition :

Proposition 8. *φ définie ci-dessus jouit des propriétés suivantes :*

a) $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ ***(antisymétrie)***

b) $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ ***(alternance)***

c) Pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ fixé, l'application $\mathbf{a} \mapsto \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est linéaire :

- $\star$ $\varphi(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$
- $\star$ $\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \varphi(\mathbf{a}', \mathbf{b})$

d) Pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ fixé, l'application $\mathbf{b} \mapsto \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est linéaire :

- $\star$ $\varphi(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = \lambda\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$
- $\star$ $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{b}') = \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$

e) $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$*=1* ***(normalisation)***

Preuve: Toutes les propriétés sont vérifiées directement par le calcul :

a) $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1 = -(a_2 b_1 - a_1 b_2) = -\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$

b) $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0$

c) $\varphi(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\lambda a_1) b_2 - (\lambda a_2) b_1 = \lambda(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \lambda\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, et

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b}) &= (a_1 + a_1') b_2 - (a_2 + a_2') b_1 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_1' b_2 - a_2' b_1) \\ &= \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \varphi(\mathbf{a}', \mathbf{b})\,. \end{aligned}$$

d) (pareil)

e) $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$.

$\square$

Remarque 9.1. $\star$ Du moment que la linéarité est vérifiée, les propriétés 1 et 2 sont équivalentes : elles peuvent être déduites l'une à partir de l'autre. En effet, si 1 est vraie, alors $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a})$, et donc $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$. Inversément, si 2 est vraie, alors $\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$, mais la linéarité permet implique

$$\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = \underbrace{\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a})}_{=0} + \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) + \underbrace{\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{b})}_{=0}\,,$$

ce qui implique $\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = -\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

$\star$ Les propriétés 3 et 4 impliquent que φ est linéaire en chacune de ses variables ; on dit que c'est une application **bilinéaire**.

$\diamond$

Il se trouve que les propriétés 1 à 5 énoncées dans la proposition *caractérisent entièrement* la fonction φ ! En d'autres termes, nous allons bientôt voir que si une autre fonction $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfait aux cinq propriétés ci-dessus, alors ceci entraîne que $\psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Nous utiliserons cette caractéristique pour définir le déterminant en dimensions supérieures : nous introduirons une fonction sur les familles de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, en imposant quelques propriétés semblables à celles énoncées ci-dessus, et énoncerons un résultat qui garantit qu'il existe une seule fonction ayant ces propriétés ; c'est ce que nous appellerons le *déterminant*.

9.2 Cas général $n \times n$

Pour définir une notion générale de déterminant, nous allons devoir considérer une *famille* de fonctions.

Nous commencerons avec les fonctions définies sur les paires de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (qui peuvent être vues comme des matrices 2×2), comme dans la sections précédente :

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,.$$

Puis, nous considérerons des fonctions sur des triplets de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (qui peuvent être vus comme des matrices 3×3),

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,,$$

puis sur des quadruplets de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ (qui peuvent être vus comme des matrices 4×4),

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\,,$$

etc.

Nous allons imposer que toutes ces fonctions satisfassent à des propriétés semblables à celles du cas $n = 2$. Nous utiliserons alors un résultat général qui dit qu'il n'y a qu'une seule famille de fonctions vérifiant toutes ces propriétés ; pour un n particulier, φ sera alors la fonction utilisée pour calculer le déterminant des matrices $n \times n$.

Commençons par définir les propriétés, qui généralisent celles du cas 2×2.

Définition 9.2. Une fonction définie sur les familles ordonnées de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) &\mapsto \varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

est dite

- ⋆ **multilinéaire** si elle est linéaire en chacun de ses vecteurs. (Plus précisément, si pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, et pour tous vecteurs $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ fixés, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto \varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

  est linéaire.)
- ⋆ **alternée** si $\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$ dès que deux des vecteurs $\mathbf{a}_i$ sont égaux.
- ⋆ **normalisée** si $\varphi(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$.

Remarque 9.3. On peut montrer, exactement comme on l'a fait dans le cas $n = 2$ (section précédente), que la première propriété d'alternance, conjuguée à celle de multilinéarité, est en fait équivalente à celle d'**antisymétrie** : si on échange deux vecteurs, on change le signe de la fonction :

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = -\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)\,.$$

◇

Puisqu'une famille $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ permet de définir une matrice $n \times n$

$$A := [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]\,,$$

on peut voir $\varphi : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ comme une fonction $\varphi : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, en posant

$$\varphi(A) := \varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)\,.$$

Définition 9.4. Si A est une matrice $m \times n$ et si (i, j) est une paire d'indice ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$), alors A_{ij} représente la matrice $(m-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de A en traçant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Exemple 9.5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, alors

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}\,, \quad A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\,, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}\,.$$

◇

Théorème 9.6. *Pour chaque $n \geqslant 2$, il existe une unique fonction*

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_n : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) &\mapsto \widetilde{\varphi}_n(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

qui soit en même temps multilinéaire, alternée, et normalisée.

De plus, ces fonctions obéissent au shéma récursif suivant :

- ⋆ *pour $n = 2$,*
$$\widetilde{\varphi}_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1\,,$$
- ⋆ *pour $n > 2$, $\widetilde{\varphi}_n$ peut se calculer à l'aide de $\widetilde{\varphi}_{n-1}$ par l'une quelconque des relations suivantes : si A est $n \times n$,*
  - — ***développement selon la i-ème ligne de A :***
$$\widetilde{\varphi}_n(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \widetilde{\varphi}_{n-1}(A_{ik})\,,$$
  - — ***développement selon la j-ème colonne de A***
$$\widetilde{\varphi}_n(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \widetilde{\varphi}_{n-1}(A_{kj})\,.$$

Preuve: (omise) □

Le théorème dit en particulier, comme nous avions annoncé précédemment, que la fonction $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ introduite dans le cas 2×2 est la seule qui possède les trois propriétés simultanément.

Mais le théorème dit aussi comment calculer explicitement ces fonctions *de manière récursive*, en calculant $\widetilde{\varphi}_n$ à l'aide de $\widetilde{\varphi}_{n-1}$.

Exemple 9.7. Considérons la matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Pour calculer $\widetilde{\varphi}_3(A)$, le théorème dit que nous avons pas moins de 6 façons équivalentes de procéder. Par exemple, en développant selon la première ligne,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_3(A) &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} a_{1k} \widetilde{\varphi}_2(A_{1k}) \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} \widetilde{\varphi}_2(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{12} \widetilde{\varphi}_2(A_{12}) + (-1)^{3+1} a_{13} \widetilde{\varphi}_2(A_{13}) \\
&= \widetilde{\varphi}_2(\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}) - 2\widetilde{\varphi}_2(\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}) - 3\widetilde{\varphi}_2(\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}) \\
&= (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 2(4 \cdot 9 - (-7) \cdot 6) - 3(4 \cdot 8 - (-7) \cdot 5) \\
&= -360\,.
\end{aligned}$$

Ou alors, en développant selon la 3-ème colonne,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_3(A) &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+3} a_{k3} \widetilde{\varphi}_2(A_{k3}) \\
&= (-1)^{1+3} a_{13} \widetilde{\varphi}_2(A_{13}) + (-1)^{2+3} a_{23} \widetilde{\varphi}_2(A_{23}) + (-1)^{3+3} a_{33} \widetilde{\varphi}_2(A_{33}) \\
&= (-3)\widetilde{\varphi}_2(\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}) - 6\widetilde{\varphi}_2(\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}) + 9\widetilde{\varphi}_2(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}) \\
&= -3(4 \cdot 8 - (-7) \cdot 5) - 6(1 \cdot 8 - (-7) \cdot 2) + 9(1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) \\
&= -360\,.
\end{aligned}$$

◇

9.3 Propriétés

Le *déterminant* d'une matrice $n \times n$ est donc un nombre réel, défini à partir de la fonction $\widetilde{\varphi}_n$ dont l'existence a été démontrée dans la section précédente :

Définition 9.8. Pour une matrice $n \times n$, définie par ses colonnes,

$$A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]\,,$$

le **déterminant** est défini par

$$\det(A) := \widetilde{\varphi}_n(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)\,.$$

Parfois, pour indiquer la dépendence du déterminant en ses colonnes, on écrira

$$\det(A) := \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)\,.$$

Informel 9.9. Dans la littérature, le déterminant de A est parfois noté $|A|$. Nous utiliserons rarement cette notation, car elle rappelle la *valeur absolue*, et donne donc l'impression qu'un déterminant doit toujours être une quantité positive, ce qui n'est pas du tout le cas bien-sûr.

Propriétés

Les propriétés énoncées dans le théorème de la section précédente se résument comme suit :

- ⋆ $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$,
- ⋆ Développement selon la i-ème ligne d'une matrice $n \times n$:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det(A_{ik})$$

- ⋆ Développement selon la j-ème colonne d'une matrice $n \times n$:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$$

Par ces relations de récurrence, le déterminant d'une matrice $n \times n$ peut toujours se calculer en passant par le calcul de n déterminants de sous-matrices $(n-1) \times (n-1)$. Mais à leur tour, le déterminant de chacune de ces matrices $(n-1) \times (n-1)$ passe par le calcul de $n-1$ matrices $(n-2) \times (n-2)$, etc. Ainsi, si N_n représente le nombre d'opérations nécessaires pour calculer le déterminant d'une matrice $n \times n$, on a

$$\begin{aligned} N_n &= nN_{n-1} \\ &= n(n-1)N_{n-2} \\ &= n(n-1)(n-2)N_{n-3} \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-3)\cdots 4 \cdot 3 \cdot N_2 = \frac{n!}{2} N_2\,. \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre d'opérations augmente **factoriellement** avec n, ce qui rend un calcul de déterminant, a priori, très couteux pour des grandes matrices.

Exemple 9.10. Prenons une matrice 10×10, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 1 & 0 & 6 & 1 & 9 & 7 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 9 & 7 & 4 & 7 & 1 & 5 & 5 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 8 & 3 & 0 & 8 & 9 & 7 \\ 5 & 5 & 4 & 7 & 3 & 8 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 9 & 6 & 8 & 5 & 5 & 3 & 6 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 9 & 5 & 3 & 7 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 9 & 6 & 8 & 9 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 9 & 9 & 5 & 6 & 0 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & 8 & 6 & 0 & 6 & 7 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 2 & 6 & 6 & 3 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Par ce que nous avons dit plus haut, le calcul de $\det(A)$ requiert environ $10!$ (factorielle) opérations, ce qui est de l'ordre de $3'628'800$. Avec une matrice 100×100, le nombre d'opérations est de l'ordre de 10^{158} ; il faudrait à n'importe quel ordinateur, même très puissant, un temps bien supérieur à l'âge de l'univers pour effectuer ce calcul (source : Rappaz-Picasso.)

Remarque : La matrice ci-dessus a été **générée aléatoirement** (lien web). ◇

Donc en général, on ne calcule pas un déterminant en utilisant les relations de récursion....

En revanche, ce qu'on peut faire est d'utiliser les relations de récurrence, ainsi que les propriétés de base des fonctions $\widetilde{\varphi}_n$, pour dériver d'autres propriétés générales du déterminant. Celles-ci fourniront des méthodes permettant d'économiser autant que possible sur le nombre d'opérations à effectuer pour calculer un déterminant, en *simplifiant* la matrice.

Propriétés du déterminant

D'abord, un résultat préliminaire :

Lemme 13. $\det(A^T) = \det(A)$

Preuve: Par récurrence sur n. Lorsque $n = 2$, on a simplement

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$
$$= ad - cb = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \det(A^T)\,.$$

Supposons maintenant que la formule soit correcte pour toute matrice $n \times n$, et considérons une matrice $(n+1) \times (n+1)$, notée A. En développant selon la première colonne, puisque le coefficient $j1$ de A^T est le coefficient $1j$ de A, à savoir a_{1j}, on a que

$$\det(A^T) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} a_{1j} \det((A^T)_{j1})\,.$$

Mais par la définition de la transposition, $(A^T)_{j1} = (A_{1j})^T$. De plus, par l'hypothèse d'induction, A_{1j} étant une matrice $(n-1) \times (n-1)$,

$$\det((A_{1j})^T) = \det(A_{1j})\,,$$

ce qui donne

$$\det(A^T) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j}) = \det(A)\,.$$

En effet, cette dernière somme est le déterminant de A, développé selon la première ligne. □

Ensuite, les propriétés qui permettront de simplifier le calcul du déterminant :

Proposition 9. *(Propriétés du déterminant)*

a) *Si A possède deux colonnes (ou deux lignes) égales, alors* $\det(A) = 0$.

b) *Le signe du déterminant change lorsqu'on échange deux colonnes :*

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n) \\ = -\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

(Pareil si on échange deux lignes.)

c) *Lorsqu'on multiplie une colonne par λ, le déterminant est multiplié par λ :*

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \lambda\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n) = \lambda \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

(Pareil si on multiplie une ligne par λ.)

d) *Lorsqu'on rajoute un multiple d'une colonne à une autre colonne, on ne change pas le déterminant :*

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + \lambda\mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

(Pareil si on rajoute un multiple d'une ligne à une autre ligne.)

Preuve: Ces propriétés suivent directement du fait que le déterminant est une fonction des colonnes ($\widetilde{\varphi}_n$), qui est alternée et multilinéaire.

Par exemple, si deux colonnes de A sont égales, $\det(A) = 0$ suit immédiatement du fait que $\det(A) = \widetilde{\varphi}_n(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, et que $\widetilde{\varphi}_n$ est alternée. Puis, si deux lignes de A sont égales, alors deux colonnes de A^T sont égales, et donc $\det(A^T) = 0$. Par le lemme précédent, $\det(A) = 0$. □

Exemple 9.11. a) Deux colonnes égales :

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & -8 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -3 \\ 4 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix} = 0$$

b) Échange de deux colonnes :

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ -7 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 5 \\ -3 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Extraction d'une constante sur une colonne :

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -7 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Rajouter un multiple d'une ligne à une autre :

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 9 & -2 & 4 & 14 \\ 3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(On a rajouté 2 fois la troisième ligne à la première.)

◇

NumChap: chap-determinant, Dernière compilation: 2022-12-09 06:44:16+01:00. (Version Web: botafogo.saitis.net)

Ensuite, il existe des matrices dont le calcul du déterminant ne requiert aucune opération particulière :

Définition 9.12. Une matrice carrée A est **triangulaire supérieure** (resp. **inférieure**) si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$ (resp. $i < j$).

Exemple 9.13. Une matrice 4×4 triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

◇

Lemme 14. *Si A est une matrice triangulaire supérieure ou inférieure, alors son déterminant est le produit de ses termes diagonaux :*

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn} =: \prod_{j=1}^{n} a_{jj} \, .$$

Preuve: Montrons la première affirmation pour les matrices triangulaires supérieures, par récurrence sur n. Pour $n = 2$, on a

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - 0 \cdot a_{12} = \prod_{j=1}^{2} a_{jj} \, .$$

Supposons que le résultat est prouvé pour un certain entier n, et considérons une matrice A, $(n+1) \times (n+1)$, triangulaire supérieure. En développant selon la première colonne, et en utilisant le fait que tous les $a_{j1} = 0$ lorsque $j = 2, \dots, n+1$, il ne reste que le terme $j = 1$. De plus, puisque A_{11} est une matrice $n \times n$ triangulaire supérieure, on peut utiliser l'hypothèse d'induction :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} a_{j1} \det(A_{j1}) \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) \\ &= a_{11} \prod_{j=2}^{n+1} a_{jj} \\ &= \prod_{j=1}^{n+1} a_{jj} \, . \end{aligned}$$

Si A est triangulaire inférieure, alors A^T est triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux sont les mêmes, donc le résultat est aussi vrai. □

En particulier, si A est **diagonale**,

$$A = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) := \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(A) = d_1 \cdots d_n = \prod_{j=1}^{n} d_j \, .$$

Exemple 9.14.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 76 & -21 & 98 & -5 & 99\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -6 & 98 & \\ 0 & 0 & 32 & 53 & 75 & 97\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 42 & 14\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 32\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 95\end{pmatrix} = 1\cdot\sqrt{2}\cdot 32\cdot 0\cdot 21\cdot 95 = 0\,.$$

◇

Exemple 9.15. Matrice identité :

$$\det(I_n) = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} = 1^n = 1\,.$$

◇

Les propriétés énoncées jusqu'ici fournissent déjà de quoi calculer un déterminant en évitant de le développer systématiquement à l'aide des relations de récurrence. En effet, on a vu que les déterminants les plus simples à calculer sont ceux des matrices triangulaires, et aussi que des opérations sur les colonnes et les lignes correspondent à certaines modifications simples du déterminant. On pourra donc appliquer des opérations sur les lignes et les colonnes, dans le but de rendre la matrice triangulaire supérieure, ou au moins avec autant de zéros que possible, ce qui ensuite d'utiliser les relations de récurrence pour une matrice simplifiée.

Exemple 9.16. Utilisons les propriétés pour calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 2 & 6 & 4 & 8\\ 3 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

On fait déjà apparaître quelques zéros en soustrayant la troisième ligne de la deuxième, ce qui ne change pas le déterminant :

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 2 & 6 & 4 & 8\\ 3 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 0 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 4 & 8\\ 3 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Ensuite, en soustrayant la première colonne à la troisième,

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 0 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 4 & 8\\ 3 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 6 & 2 & 8\\ 3 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

Maintenant, on peut développer selon la deuxième ligne, puisqu'elle contient beaucoup de zéros :

$$= \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 6 & 2 & 8\\ 3 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix} = -3\det\begin{pmatrix}2 & 2 & 4\\ 6 & 2 & 8\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

En mettant en évidence un 2 dans les deux premières lignes, puis dans la dernière colonne,

$$\det\begin{pmatrix}2 & 2 & 4\\ 6 & 2 & 8\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix} = 2^2\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix} = 2^3\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

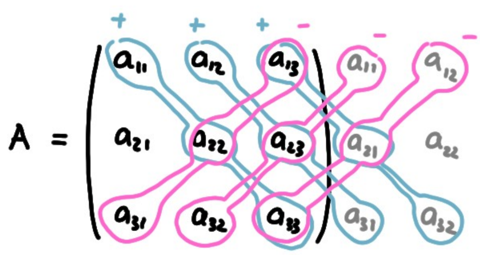
En soustrayant la dernière ligne à la première, et en développant selon la première ligne,

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\\ &= -3\det\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} = -3\cdot 1 = -3\,.\end{aligned}$$

donc $\det(A) = (-3)\cdot 2^3\cdot(-3) = 72$ ◇

Une curiosité dans le cas $n = 3$

Dans le cas d'une matrice 3×3, le développement du déterminant peut se faire à l'aide de la **règle de Sarrus** (lien web). Celle-ci ne contient rien de profond, mais permet de calculer un déterminant 3×3 de façon systèmatique, facile à mémoriser. On écrit la matrice A, à la suite de laquelle on rajoute la première et la deuxième colonne. On parcours ensuite ce tableau 3×5 selon certaines diagonales :



$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Remarque 9.17. Il n'existe pas d'équivalent de la règle de Sarrus pour des déterminants de matrices de tailles supérieures. ◇

9.4 La formule $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Dans cette section, nous allons démontrer la propriété qui rend le déterminant réellement utile en algèbre linéaire :

Théorème 9.18. *Pour toute paire de matrices $n\times n$,*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,.$$

Cas simple : A est élémentaire

Nous commencerons par démontrer le résultat dans un cas particulier :

Proposition 10. *Si E est élémentaire, alors $\det(E) \neq 0$, et pour toute matrice B,*

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)\,.$$

Preuve:

a) Lorsque E est de Type I, $E = T_{i\leftrightarrow j}$, la matrice $T_{i\leftrightarrow j}B$ étant B avec les lignes i et j échangées, on a

$$\det(T_{i\leftrightarrow j}B) = -\det(B)$$

En utilisant cette relation avec $B = I_n$, on obtient en particulier

$$\det(T_{i\leftrightarrow j}) = -1 \neq 0\,.$$

On peut donc écrire

$$\det(T_{i\leftrightarrow j}B) = -\det(B) = \det(T_{i\leftrightarrow j})\det(B)\,.$$

b) Lorsque E est de Type II, $E = D_i(\lambda)$ (avec $\lambda \neq 0$), $D_i(\lambda)B$ est la matrice B, dans laquelle la i-ème ligne a été multipliée par λ, et donc

$$\det(D_i(\lambda)B) = \lambda\det(B)\,.$$

En utilisant cette relation avec $B = I_n$, on obtient en particulier

$$\det(D_i(\lambda)) = \lambda \neq 0$$

On peut donc écrire

$$\det(D_i(\lambda)B) = \lambda\det(B) = \det(D_i(\lambda))\det(B)\,.$$

c) Finalement, lorsque E est de Type III, $E = L_{ij}(\lambda)$, $L_{ij}(\lambda)B$ est la matrice B, dans laquelle on a rajouté λ fois la j-ème ligne à la i-ème. On sait que cette opération ne modifie pas le déterminant, et donc

$$\det(L_{ij}(\lambda)B) = \det(B)\,.$$

En prenant $B = I_n$, ceci donne en particulier

$$\det(L_{ij}(\lambda)) = 1 \neq 0\,,$$

et donc aussi

$$\det(L_{ij}(\lambda)B) = \det(L_{ij}(\lambda))\det(B)\,.$$

La proposition est démontrée. □

Preuve du théorème

Pour montrer que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ est vraie généralement, on va distinguer deux cas :

⋆ *Si A est inversible :* Dans cas, A peut s'écrire comme un produit de matrices élémentaires : $A = E^{(k)}\cdots E^{(1)}$. Ceci permet d'écrire, en utilisant $k-1$ fois la proposition,

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(E^{(k)}\cdots E^{(1)})\\ &= \det(E^{(k)})\det(E^{(k-1)}\cdots E^{(1)})\\ &= \det(E^{(k)})\det(E^{(k-1)})\det(E^{(k-2)}\cdots E^{(1)})\\ &\;\vdots\\ &= \det(E^{(k)})\cdots\det(E^{(1)})\,.\end{aligned}$$

En particulier, puisque les déterminants des matrices élémentaires de ce produit sont tous non-nuls, on a montré que **si** A **est inversible, alors** $\det(A) \neq 0$.

Mais en reproduisant essentiellement le même calcul,

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E^{(k)} \cdots E^{(1)} B)\\ &= \underbrace{\det(E^{(k)})\det(E^{(k-1)}) \cdots \det(E^{(1)})}_{=\det(A)} \det(B)\\ &= \det(A)\det(B)\,.\end{aligned}$$

⋆ *Si* A *est singulière* : Dans ce cas, A ne peut pas être réduite à l'identité. Notons $\widetilde{E}^{(1)}, \dots, \widetilde{E}^{(l)}$ les transformations qui réduisent A. Puisque

$$\widetilde{A} = \widetilde{E}^{(l)} \cdots \widetilde{E}^{(1)} A$$

n'est pas la matrice identité, c'est une matrice triangulaire supérieure possédant au moins un zéro sur sa diagonale. Ceci implique que son déterminant est nul, $\det(\widetilde{A}) = 0$. On peut donc écrire que

$$0 = \det(\widetilde{A}) = \det(\widetilde{E}^{(l)}) \cdots \det(\widetilde{E}^{(1)})\det(A)\,.$$

Puisque $\det(\widetilde{E}^{(i)}) \neq 0$ pour tout i, on en déduit que $\det(A) = 0$. On a donc démontré que **si** A **est singulière, alors** $\det(A) = 0$.

Mais si A n'est pas inversible, alors AB n'est pas inversible non plus (exercice), et donc $\det(AB) = 0$. La relation suivante est donc vérifiée :

$$\underbrace{\det(AB)}_{=0} = \underbrace{\det(A)}_{=0}\det(B)\,,$$

ce qui complète la preuve du théorème.

Déterminant et inversibilité

La preuve ci-dessus (voir les passages en gras) a comme conséquence la généralisation que nous espérions, à savoir celle du critère que nous avions établi pour les matrices 2×2 :

Théorème 9.19. *A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

Exemple 9.20. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible, puisqu'en soustrayant à la première colonne la somme de toutes les autres,

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-5)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -5 \neq 0\end{aligned}$$

◇

L'utilisation du déterminant permet maintenant d'étudier l'inversibilité de matrices contenant un *paramètre*, en évitant de devoir étudier un système.

Exemple 9.21. Pour quelles valeurs du paramètre t la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t & -1 \\ t & 10 & 0 \\ t-1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?

En développant selon la première colonne,

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)t\det\begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} + (t-1)\det\begin{pmatrix} t & -1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-t)(t^2+1) + 10(t-1) \\ &= -t^3 + 9t - 10\,.\end{aligned}$$

On sait sait donc que A est inversible si et seulement si t n'est pas racine du polynôme $P(t) = -t^3 + 9t - 10$. On remarque que $t = 2$ est racine de P, ce qui permet de factoriser (par division Euclidienne par exemple) :

$$P(t) = (t-2)(-t^2 - 2t + 5)\,.$$

Comme les racines de $-t^2 - 2t + 5$ sont $-1 \pm \sqrt{6}$, on en déduit que A est inversible si et seulement si $t \notin \{2, -1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}\}$. ◇

Le déterminant de l'inverse

Lorsque A est inversible, $AA^{-1} = I_n$, et la formule démontrée plus haut permet d'écrire

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})\,,$$

qui donne :

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\,.}$$

Le déterminant comme invariant de similitude

Définition 9.22. Deux matrices $n \times n$, A et B sont **semblables** si il existe une matrice $n \times n$ inversible M telle que

$$A = M^{-1}BM\,.$$

Lorsque A et B sont semblables, on note $A \sim B$.

Exemple 9.23. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables. En effet, en prenant $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est inversible, on obtient

$$M^{-1}BM = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

◇

Proposition 11. *Si* $A \sim B$*, alors* $\det(A) = \det(B)$.

(On dit que le déterminant est un **invariant de similitude**.)
Preuve:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(M^{-1}BM) \\
&= \det(M^{-1})\det(B)\det(M) \\
&= \det(B)\det(M^{-1})\det(M) \\
&= \det(B)\det(M^{-1}M) \\
&= \det(B)\det(I_n) \\
&= \det(B)\,.
\end{aligned}$$

□

Le déterminant peut donc être utilisé pour démontrer à moindre frais que deux matrices ne sont *pas* semblables :

Exemple 9.24. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas semblables, car $\det(A) = 6$ (en développant selon la première ligne), alors que $\det(B) = -2$. ◇

Exemple 9.25. Un exemple important de matrices semblables sont les matrices associées à une application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, relativement à des bases différentes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. En effet, on sait que par la formule du changement de base,

$$[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}{}^{-1}[T]_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,,$$

et donc $[T]_{\mathcal{B}} \sim [T]_{\mathcal{C}}$. Par le lemme,

$$\det([T]_{\mathcal{B}}) = \det([T]_{\mathcal{C}})\,.$$

◇

9.5 Formule de Cramer et conséquences

Dans cette section, on présente une application intéressante de la théorie du déterminant à la résolution des systèmes linéaires.

Si A est une matrice *inversible* $n \times n$, on sait que pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, le système

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

possède exactement une solution $\mathbf{x}$, donnée par

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}\,.$$

Nous allons voir comment il est possible de calculer chacune des composantes x_j de cette solution, sans passer par la connaissance de A^{-1}.

Définition 9.26. Si M est une matrice $n \times n$, et $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $M_j(\mathbf{z})$ est la matrice $n \times n$ obtenue à partir de M en remplaçant la j-ème colonne par $\mathbf{z}$ (sans toucher aux autres colonnes).

Exemple 9.27. Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ e \end{pmatrix}$, alors

$$M_2(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ 4 & \pi & 6 \\ 7 & e & 9 \end{pmatrix}\,.$$

◇

Proposition 12. *(Formule de Cramer) Soit A une matrice $n \times n$ inversible, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, et soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ l'unique solution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Alors pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, la j-ème composante de $\mathbf{x}$ est égale à*

$$x_j = \frac{\det(A_j(\mathbf{b}))}{\det(A)}\,.$$

Preuve: Notons $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$. Calculons le produit de A par $(I_n)_j(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} A((I_n)_j(\mathbf{x})) &= A\big[\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_{j-1}\,\mathbf{x}\,\mathbf{e}_{j+1} \cdots \mathbf{e}_n\big] \\ &= \big[A\mathbf{e}_1 \cdots A\mathbf{e}_{j-1}\,A\mathbf{x}\,A\mathbf{e}_{j+1} \cdots A\mathbf{e}_n\big] \\ &= \big[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{j-1}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}_{j+1} \cdots \mathbf{a}_n\big] \\ &= A_j(\mathbf{b})\,. \end{aligned}$$

On a donc

$$\det(A)\det\big((I_n)_j(\mathbf{x})\big) = \det\big(A((I_n)_j(\mathbf{x}))\big) = \det(A_j(\mathbf{b}))\,.$$

Or en développant selon la j-ème colonne,

$$\begin{aligned} \det\big((I_n)_j(\mathbf{x})\big) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}x_k \det\big(((I_n)_j(\mathbf{x}))_{kj}\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}x_k \det\big((I_n)_{kj}\big)\,. \end{aligned}$$

Dans la deuxième ligne, on a utilisé le fait que l'on trace la colonne contenant $\mathbf{x}$, et donc cela revient au même de travailler avec I_n qu'avec $(I_n)_j(\mathbf{x})$. Ensuite, remarquons que si $k \neq j$, alors

$(I_n)_{kj}$ contient une colonne et une ligne de zéros, et donc en développant celon cette ligne, on voit que $\det((I_n)_{kj}) = 0$.

Il ne subsiste donc, dans la somme ci-dessus, que le terme $k = j$:

$$\begin{aligned}\det\big((I_n)_j(\mathbf{x})\big) &= (-1)^{j+j} x_j \det\big((I_n)_{jj}\big)\\ &= x_j \det(I_{n-1})\\ &= x_j\end{aligned}$$

Ceci démontre la formule. □

Exemple 9.28. Considérons le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donné par

$$(*) \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 6\\ 7\\ 8\end{pmatrix}$$

Comme $\det(A) = 4! = 24 \neq 0$, la matrice est inversible et la solution du système est unique. Si on s'intéresse par exemple à la quatrième composante x_4,

$$\begin{aligned}x_4 = \frac{\det(A_4(\mathbf{b}))}{\det(A)} &= \frac{1}{24}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 0 & 7\\ 1 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 6\\ 1 & 1 & 0 & 7\\ 1 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 1 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On a d'abord extrait un 2 de la deuxième colonne et un 3 de la troisième, puis on a soustrait la deuxième colonne de la première, et la troisième de la deuxième. Maintenant, en développant selon la première colonne,

$$\begin{aligned}x_4 &= \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 1 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{4}(-1)\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 6\\ 1 & 0 & 7\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{4}(-1)(1)\det\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{4}(-1)(1)(6-5)\\ &= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Bien-sûr, on trouve la même chose qu'en résolvant complètement le système $(*)$, qui serait par exemple de faire $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$, qui donne

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\diamond$

Une application intéressante : formule pour A^{-1}

Si le système considéré est grand, la formule de Cramer pour x_j représente un intérêt limité du point de vue calculatoire. En effet elle implique le calcul de deux déterminants, qui comme on sait représente un nombre d'opérations croissant factoriellement avec la taille du système.

Par contre, d'un point de vue théorique elle permet de dériver une formule explicite pour l'inverse d'une matrice :

Théorème 9.29. *Soit A une matrice $n \times n$ inversible, et soit C la* ***matrice*** *$n \times n$* ***des cofacteurs****, dont les coefficients sont définis par*

$$c_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \,.$$

Alors l'inverse de A est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T \,.$$

Preuve: Considérons A inversible, et notons son inverse plutôt $G = (g_{ij})$, en nommant ses colonnes :

$$G = [\mathbf{g}_1 \cdots \mathbf{g}_n] \,,$$

où

$$\mathbf{g}_k := \begin{pmatrix} g_{1k} \\ g_{2k} \\ \vdots \\ g_{nk} \end{pmatrix} .$$

Comme on sait, la condition $AG = I_n$ devient

$$\big[A\mathbf{g}_1 \cdots A\mathbf{g}_n\big] = \big[\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n\big] \,,$$

ce qui revient à résoudre les n systèmes

$$A\mathbf{g}_k = \mathbf{e}_k \,, \quad k = 1, \dots, n \,.$$

Par la formule de Cramer, la j-ème composante de $\mathbf{g}_k$ est donnée par

$$g_{jk} = \frac{\det(A_j(\mathbf{e}_k))}{\det(A)} \,.$$

Or, en développant selon la j-ème colonne,

$$\det(A_j(\mathbf{e}_k)) = (-1)^{j+k} \cdot 1 \cdot \det(A_{kj}) \,,$$

ce qui implique que

$$g_{jk} = \frac{(-1)^{j+k} \det(A_{kj})}{\det(A)} = \frac{c_{kj}}{\det(A)} = \Big(\frac{1}{\det(A)} C^T\Big)_{jk} \,,$$

et démontre la formule. $\square$

Exemple 9.30. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

est inversible puisque $\det(A) = -14 \neq 0$. Utilisons la formule pour calculer son inverse. Indiquons en rouge le signe de chaque coefficient, venant du $(-1)^{i+j} = \pm 1$ dans la matrice des cofacteurs.

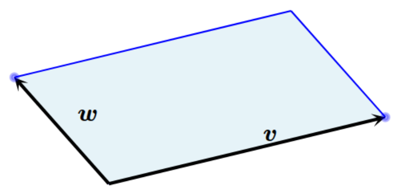
$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} C^T \\ &= \frac{1}{-14} \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{-14} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 14 & -7 & -7 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{-14} \begin{pmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

◇

9.6 Interprétation géométrique du déterminant

Le cas 2×2

Dans le plan, considérons deux vecteurs $\mathbf{v}, \mathbf{w}$, et considérons le parallélogramme qu'ils définissent : (animation en construction)



L'aire de ce parallélogramme, notée $\text{Aire}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, est reliée au déterminant de la matrice 2×2 dont les colonnes sont $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$:

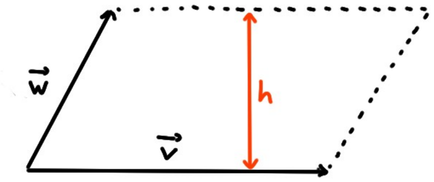
Théorème 9.31. *L'aire du parallélogramme est donnée par*

$$\mathit{Aire}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\det([\mathbf{v}\,\mathbf{w}])| = |v_1 w_2 - v_2 w_1|,$$

où les coordonnées sont relativement à la base canonique.

Preuve: Considérons d'abord le cas simple, où un des vecteurs, disons $\mathbf{v}$, est parallèle $\mathbf{e}_1$. Dans ce cas,

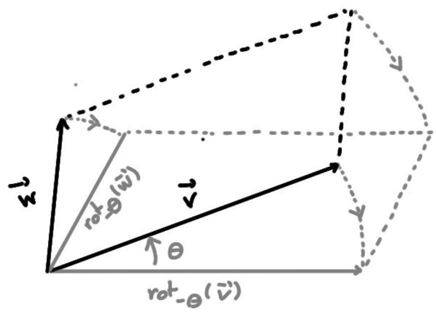
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$



L'aire géométrique vaut donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Aire}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|\cdot h = |v_1|\cdot|w_2| &= |v_1 w_2| \\ &= |v_1 w_2 - 0 w_1| \\ &= |\det[\mathbf{v}\,\mathbf{w}]| \ .\end{aligned}$$

Dans le cas général, considérons la rotation $\mathrm{rot}_{-\theta}$, où θ est l'angle orienté entre $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{v}$. On a alors que $\mathrm{rot}_{-\theta}(\mathbf{v})$ est parallèle à $\mathbf{e}_1$:



De plus, puisque l'aire du parallélogramme ne change pas si ses deux côtés subissent la même rotation :

$$\operatorname{Aire}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \operatorname{Aire}(\mathrm{rot}_{-\theta}(\mathbf{v}), \mathrm{rot}_{-\theta}(\mathbf{w}))\,.$$

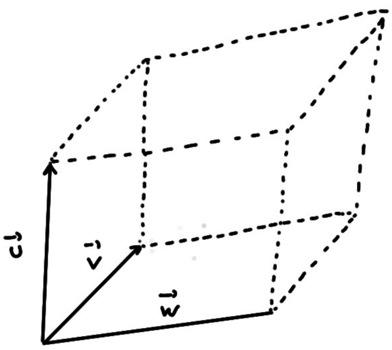
Maintenant, le parallélogramme tourné de $-\theta$ a un de ses côtés parallèle à $\mathbf{e}_1$, et donc on peut calculer son aire avec la formule vue ci-dessus :

$$\begin{aligned}\operatorname{Aire}(\mathrm{rot}_{-\theta}(\mathbf{v}), \mathrm{rot}_{\theta}(\mathbf{w})) &= |\det[\mathrm{rot}_{-\theta}(\mathbf{v})\ \mathrm{rot}_{\theta}(\mathbf{w})]| \\ &= |\det([\mathrm{rot}_{-\theta}]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}[\mathbf{v}\,\mathbf{w}])| \\ &= \big|\underbrace{\det([\mathrm{rot}_{-\theta}]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}})}_{1}\det([\mathbf{v}\,\mathbf{w}])\big| \\ &= |\det([\mathbf{v}\,\mathbf{w}])| \ .\end{aligned}$$

□

Le cas 3×3

Dans l'espace, considérons trois vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, et le parallélépipède qu'ils définissent :



Le volume de ce parallélogramme, noté Vol($\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$), est reliée au déterminant de la matrice 3×3 dont les colonnes sont $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$:

Théorème 9.32. *Le volume du parallépipède est donnée par*

$$Vol(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\det[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}]|$$

où les coordonnées sont relativement à la base canonique.