Chapitre 8

Le changement de base

8.1 Introduction

Dans la pratique, l'étude d'un problème impliquant un espace vectoriel se fait en choisissant une base, et en travaillant sur les composantes des vecteurs relatives à cette base.

Bien-sûr, un problème peut s'énoncer naturellement dans une base $\mathcal{B}$, mais être plus facilement soluble dans une autre base $\mathcal{B}'$, mieux adaptée à la résolution du problème. On aura donc souvent recours à un *changement de base*.

Nous aborderons le changement de base en deux étapes.

a) D'abord, nous considérerons le problème de savoir comment les *composantes* d'un vecteur se transforment quand on change de base dans un espace vectoriel.
b) Ensuite, nous verrons comment la *matrice d'une application linéaire* se transforme lorsqu'on change de base dans les espaces vectoriels de départ et d'arrivée.

Nous présenterons chaque méthode dans un espace vectoriel quelconque, puis l'utiliserons dans diverses situations, en particulier pour les applications $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

8.2 Effet sur les composantes des vecteurs

Pour commencer, étudions les relations existant entre les composantes d'un même vecteur, exprimé relativement à une base ou à une autre.

Avant de voir l'approche dans le cas général, commençons par un exemple simple.

Exemple 8.1. Dans le plan, considérons le vecteur

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Considérons maintenant la base $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, dont les vecteurs sont disons

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Quelles sont les composantes de $\mathbf{x}$ relativement à $\mathcal{B}$? Ce qu'on cherche ici est

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} ,$$

qui ne signifie rien d'autre que

$$\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 \,.$$

Or cette dernière s'exprime comme

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

qui est équivalent au système

$$\begin{cases} \beta_1 & + & 2\beta_2 & = & 5 \\ -\beta_1 & + & \beta_2 & = & 1 \end{cases} ,$$

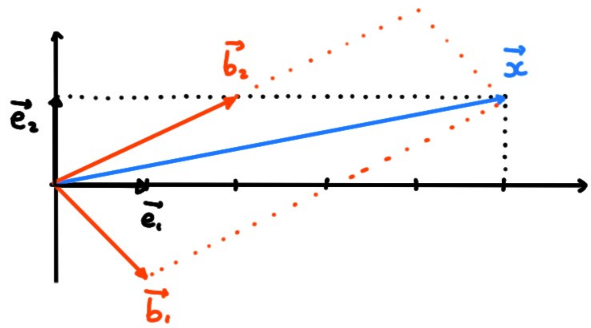
dont la solution est $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$. Ainsi,

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

qui signifie $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$.

Remarque : Il est plus utile de penser que $\mathbf{x}$ est un vecteur dans le plan, et que ce vecteur peut être représenté en composantes, relativement à la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ ou à la base $\mathcal{B}$:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$



Bien-sûr, il serait intéressant d'avoir un procédé permettant d'obtenir directement les composantes d'un vecteur quelconque dans une base, en fonction des composantes dans l'autre base :

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \overset{?}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

◇

La matrice de changement de base

Abordons le problème d'un point de vue général.

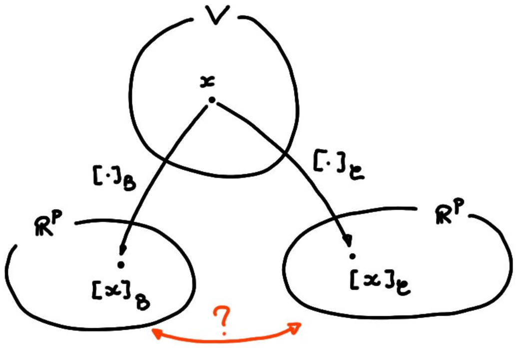
Soit V un espace vectoriel de dimension p. Supposons que l'on ait deux bases dans V :

$$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p) \,, \qquad \mathcal{C} = (c_1, \dots, c_p) \,.$$

Si $x \in V$ est un vecteur quelconque, il peut être décomposé dans une base ou dans l'autre, et les composantes relativement à ces bases seront a priori différentes :

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} , \qquad [x]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} .$$

Nous aimerions savoir comment les composantes relativement à une base, par exemple les $\beta_1, \dots, \beta_p$, peuvent se calculer à partir des composantes dans l'autre base, c'est-à-dire les $\gamma_1, \dots, \gamma_p$.



Nous allons voir que cette relation est linéaire, et peut donc s'exprimer à l'aide d'une matrice :

Théorème 8.2. *Il existe une matrice $p \times p$, notée $P_{\mathcal{CB}}$ (ou parfois : $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$), telle que*

$$[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{CB}} [x]_{\mathcal{B}} \,.$$

De plus,

- ⋆ $P_{\mathcal{CB}} = \big[[b_1]_{\mathcal{C}} \cdots [b_p]_{\mathcal{C}} \big]$,
- ⋆ $P_{\mathcal{CB}}$ *est inversible, et* ${P_{\mathcal{CB}}}^{-1} = P_{\mathcal{BC}}$.

On appelle $P_{\mathcal{CB}}$ la ***matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$***.

Preuve:

$$\begin{aligned}
[x]_{\mathcal{C}} &= \big[\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_p b_p\big]_{\mathcal{C}} \\
&= \beta_1 [b_1]_{\mathcal{C}} + \cdots + \beta_p [b_p]_{\mathcal{C}} \\
&= \big[[b_1]_{\mathcal{C}} \cdots [b_p]_{\mathcal{C}} \big] \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \\
&= P_{\mathcal{CB}} [x]_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

En procédant dans l'autre sens, on obtient

$$\begin{aligned}
[x]_{\mathcal{B}} &= \big[\gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_p c_p\big]_{\mathcal{B}} \\
&= \gamma_1 [c_1]_{\mathcal{C}} + \cdots + \gamma_p [c_p]_{\mathcal{B}} \\
&= \big[[c_1]_{\mathcal{B}} \cdots [c_p]_{\mathcal{B}} \big] \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} \\
&= P_{\mathcal{BC}} [x]_{\mathcal{C}}
\end{aligned}$$

Si on réinjecte cette dernière dans celle du dessus,

$$\begin{aligned}
[x]_{\mathcal{C}} &= P_{\mathcal{CB}} [x]_{\mathcal{B}} \\
&= P_{\mathcal{CB}} P_{\mathcal{BC}} [x]_{\mathcal{C}} \,.
\end{aligned}$$

Comme cette dernière est vraie pour tout $x \in V$, on a

$$P_{\mathcal{CB}} P_{\mathcal{BC}} = I_p \,.$$

Donc $P_{\mathcal{CB}}$ est inversible, et son inverse est ${P_{\mathcal{CB}}}^{-1} = P_{\mathcal{BC}}$. □

Remarque 8.3. En bas de page, on explique pourquoi la matrice de changement de base n'est que la représentation de l'application *linéaire identité*, de V dans lui-même. ◇

Exemple 8.4. Dans le plan, considérons comme tout à l'heure le vecteur

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Pour être plus précis, notons $\mathcal{B}_{\text{can}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ la base canonique, et récrivons

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Considérons maintenant la base $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ définie par :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Calculons $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, en fonction de $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$, en utilisant le théorème :

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_{\text{can}}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} ,$$

où

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_{\text{can}}} = \big[[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}}\, [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{B}}\big] .$$

On doit donc trouver les composantes de $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ relativement à $\mathcal{B}$. Mais comme

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

signifie en fait

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b}_2 &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 , \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{3}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{e}_2 &= -\frac{2}{3}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2 , \end{cases}$$

Ainsi,

$$[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} , \qquad [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} ,$$

et donc

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_{\text{can}}} = \big[[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}}\, [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{B}}\big] = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Donc les coordonnées de $\mathbf{x}$ relativement à $\mathcal{B}$ sont

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_{\text{can}}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

comme nous avions trouvé plus haut. Si maintenant on souhaite plutôt transformer des composantes relativement à $\mathcal{B}$ en des composantes relativement à $\mathcal{B}_{\text{can}}$, on calcule

$$P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}} = {P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_{\text{can}}}}^{-1} = \frac{1}{1/3} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Donc si par exemple on prend $\mathbf{x}$ tel que

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

alors ses composantes relativement à $\mathcal{B}_{\text{can}}$ sont, comme on sait déjà,

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

◇

Exemple 8.5. Supposons que l'on considère, dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Considérons la base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, dont les vecteurs sont (on laisse au lecteur le soin de vérifier que $\mathcal{B}$ est effectivement une base) :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ensuite, cherchons les composantes de $\mathbf{x}$ relativement à $\mathcal{B}$, en utilisant le formalisme présenté plus haut.

Pour bien faire, récrivons explicitement ce que nous savons :

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ,$$

ainsi que

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad [\mathbf{b}_3]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Pour exprimer les composantes de $\mathbf{x}$ relativement à $\mathcal{B}$, nous allons utiliser la formule

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_{\text{can}}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} ,$$

où la matrice de changement de base est donnée par

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_{\text{can}}} = \left[[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}} \, [\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}} \, [\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}} \right] .$$

Or si on écrit explicitement les définitions des vecteurs de la base $\mathcal{B}$,

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 & = & & & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b}_2 & = & \mathbf{e}_1 & & -\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b}_3 & = & & 2\mathbf{e}_2 & \end{cases}$$

Comme on doit exprimer les composantes des vecteurs de la base canonique par rapport à $\mathcal{B}$, il faut inverser ces relations. On trouve facilement

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 & = & \mathbf{b}_1 & +\mathbf{b_2} & \\ \mathbf{e}_2 & = & & & \frac{1}{2}\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{e}_3 & = & \mathbf{b}_1 & & \end{cases} ,$$

c'est-à-dire

$$[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad [\mathbf{e}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui donne

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} &= P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_{\text{can}}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque : Pour le calcul de $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_{\text{can}}}$, une façon tout à fait équivalente de faire mais écrite différemment aurait été de commencer par calculer

$$P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}} = \left[[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \, [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \, [\mathbf{b}_3]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

puis de calculer son inverse (par exemple avec l'algorithme de Gauss-Jordan) :

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_{\text{can}}} = {P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

◇

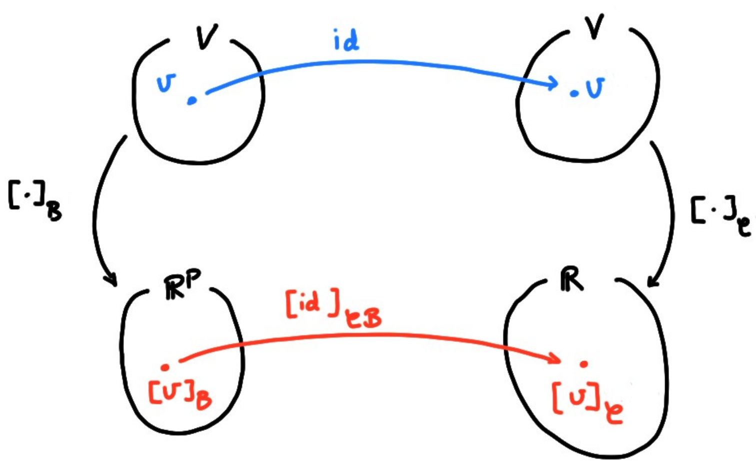
La matrice $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ comme matrice d'une application

La matrice de changement de base peut être vue comme un cas particulier de matrice associée à une application linéaire, introduite dans le chapitre sur les espaces vectoriels.

En effet, considérons l'**application identité** $\text{id} : V \to V$, définie par

$$\text{id}(v) := v \qquad \forall v \in V.$$

Cette application ne porte en elle rien de vraiment intéressant. Mais considérons comme avant deux bases pour décrire V, notées $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$.



Par définition, la matrice qui représente id relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, est celle qui permet d'obtenir $[v]_\mathcal{C}$ à partir de $[v]_\mathcal{B}$:

$$[v]_\mathcal{C} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[v]_\mathcal{B}.$$

Cette matrice est donc précisément notre matrice de changement de base :

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,.$$

8.3 Effet sur la matrice d'une application

On a vu dans le chapitre sur les espaces vectoriels comment exprimer une application linéaire

$$T : V \to V'\,,$$

lorsqu'on possède une base $\mathcal{B}$ dans V, et une base $\mathcal{B}'$ dans V' :

- ⋆ $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$ est une base de V,
- ⋆ $\mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_m')$ est une base de V'.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "T"] \arrow[d, bend right, "{[\cdot]_\mathcal{B}}"'] & & V' \arrow[d, bend left, "{[\cdot]_{\mathcal{B}'}}"] \\
\mathbb{R}^p \arrow[rr, "{[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}}"] & & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Rappelons que si $v \in V$, et si $v' = T(v) \in V'$ est son image, alors la représentation matricielle de cette correspondance s'exprime par

$$\underbrace{[T(v)]_{\mathcal{B}'}}_{\in\mathbb{R}^m} = \underbrace{[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}}_{m\times p}\underbrace{[v]_\mathcal{B}}_{\in\mathbb{R}^p}\,,$$

où les colonnes de la matrice $[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ s'obtiennent en décomposant les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$:

$$[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \big[[T(v_1)]_{\mathcal{B}'} \cdots [T(v_p)]_{\mathcal{B}'}\big]$$

Changement de base dans le cas général $T : V \to V'$

Supposons maintenant que l'on ait d'autres bases qui décrivent les espaces de départ et d'arrivée, disons $\mathcal{C}$ dans V et $\mathcal{C}'$ dans V' :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "T"] \arrow[d, bend right, "{[\cdot]_\mathcal{B}}"'] \arrow[dd, bend right=60, "{[\cdot]_\mathcal{C}}"'] & & V' \arrow[d, bend left, "{[\cdot]_{\mathcal{B}'}}"] \arrow[dd, bend left=60, "{[\cdot]_{\mathcal{C}'}}"] \\
\mathbb{R}^p \arrow[rr, "{[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}}"] & & \mathbb{R}^m \\
\mathbb{R}^p \arrow[rr, "{[T]_{\mathcal{C}'\mathcal{C}}}"] & & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

On a donc deux façons de représenter la même application linéaire T :

- ⋆ En utilisant les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$:

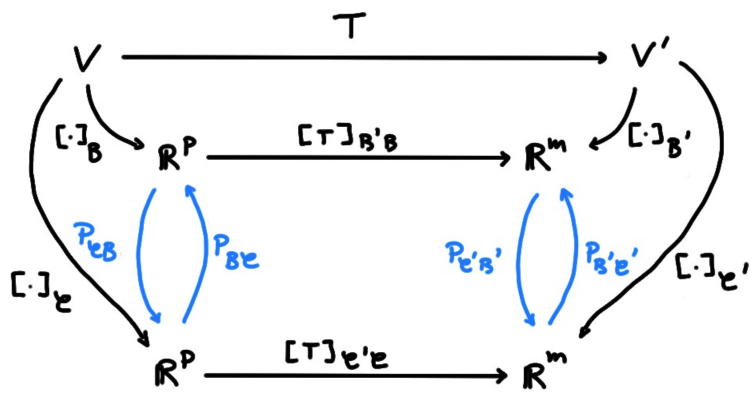
$$[v]_{\mathcal{B}} \mapsto [T(v)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} .$$

- ⋆ En utilisant les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$:

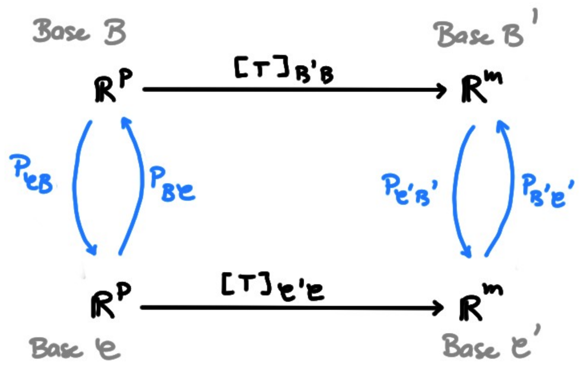
$$[v]_{\mathcal{C}} \mapsto [T(v)]_{\mathcal{C}'} = [T]_{\mathcal{C}'\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{C}} .$$

Notre but ici est de comprendre la relation entre les matrices $[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ et $[T]_{\mathcal{C}'\mathcal{C}}$.

Considérons les matrices de changement de base construites dans la section précédente, $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{C}'\mathcal{B}'}$, et leurs inverses :



Pour simplifier un peu le schéma, gardons uniquement les espaces de départ et d'arrivée, les bases relativement auxquelles ils sont associés, ainsi que les matrices associées à T relativement à ces bases :



Dans ce diagramme, on peut monter ou descendre librement à l'aide des matrices de changement de base, puisqu'elles sont inversibles . On a donc les **formules de changement de base** :

$$\boxed{[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{C}'\mathcal{C}}P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}},$$

et

$$\boxed{[T]_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}'\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}}.$$

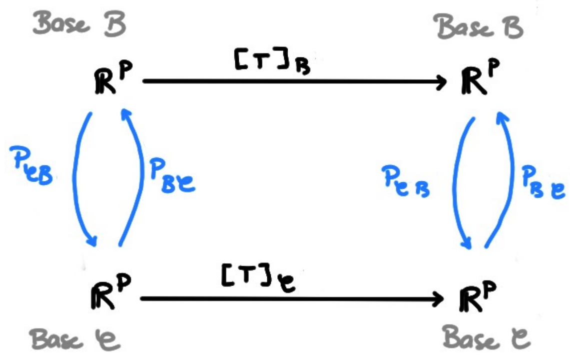
Ces deux formules sont équivalentes : on obtient la deuxième en multipliant la première à droite par $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, puis à gauche par $P_{\mathcal{C}'\mathcal{B}'}$.

Changement de base dans le cas $T : V \to V$

Le cas que nous utiliserons le plus est lorsque T applique V dans lui-même, c'est-à-dire où $V' = V$:

$$T : V \to V\,.$$

Dans ce cas, on a $p = m$. Si on suppose aussi que l'on a deux bases pour décrire V, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et qu'on on prend $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$, le shéma devient plus simple :



Maintenant, comme $P_{\mathcal{BC}} = {P_{\mathcal{CB}}}^{-1}$, les formules de changement de base prennent la forme plus connue :

$$\boxed{[T]_{\mathcal{B}} = {P_{\mathcal{CB}}}^{-1}[T]_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{CB}}\,,}$$

on encore

$$\boxed{[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{BC}}[T]_{\mathcal{C}}{P_{\mathcal{BC}}}^{-1}\,.}$$

8.4 Exemples

Exploitons les diverses formules de changement de base vues dans les sections précédentes, sur quelques exemples concrets.

Toutes les applications linéaires que nous avons considérées jusqu'à présent ont généralement été définies relativement à la base canonique : leur matrice s'obtenait en calculant les images des vecteurs de la base canonique.

Mais on sait maintenant exprimer la matrice d'une application relativement à n'importe quelle base. Nous allons donc repasser par certaines applications rencontrées précédemment, et étudier leur matrice relativement à des bases qui ne sont pas canoniques.

Exemple 8.6. Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Remarquons que lorsqu'une application est définie de cette façon, **il est implicitement admis que les coordonnées** (ici x_1, x_2, x_3) **sont relativement aux bases canoniques des ensembles de départ et d'arrivée**. Ici, pour les distinguer, nous noterons temporairement

- ⋆ $\mathcal{B}_{\text{can}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

- ⋆ $\mathcal{B}_{\text{can}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Donc la matrice ci-dessus est en fait

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}_{\text{can}}} &= \big[[T(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} [T(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} [T(\mathbf{e}_3)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}\big] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Considérons maintenant les bases $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, où

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Calculons la matrice de T relativement à ces deux nouvelles bases, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$. On peut s'aider du schéma

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_{\text{can}} \arrow[r, "{[T]_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}_{\text{can}}}}"] \arrow[d, bend right, "P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_{\text{can}}}"'] & \mathcal{B}_{\text{can}} \arrow[d, bend right, "P_{\mathcal{C}\mathcal{B}_{\text{can}}}"'] \\
\mathcal{B} \arrow[r, "{[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}}"] \arrow[u, bend right, "P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}}"'] & \mathcal{C} \arrow[u, bend right, "P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{C}}"']
\end{tikzcd}$$

pour retrouver la formule :

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}_{\text{can}}}[T]_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}_{\text{can}}} P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}}$$

Or puisque les vecteurs de $\mathcal{B}$ ont été donnés en composantes relativement à la base canonique,

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{b}_3]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on a déjà

$$P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}} = \big[[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} [\mathbf{b}_3]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}\big] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite,

$$[\mathbf{c}_1]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{c}_2]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

et donc

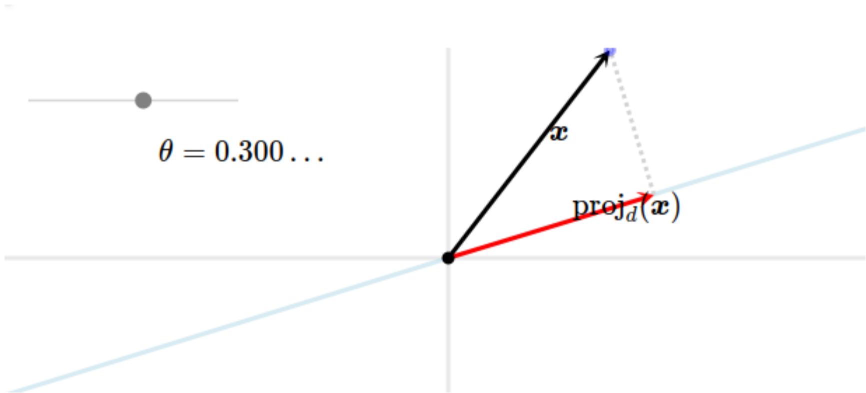
$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{C}\mathcal{B}_{\text{can}}} &= P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{C}}{}^{-1} \\
&= \big[[\mathbf{c}_1]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} [\mathbf{c}_2]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}\big]^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} &= P_{\mathcal{C}\mathcal{B}_{\text{can}}}[T]_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}_{\text{can}}}P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}} \\
&= \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 13/2 & 0 \\ 1 & 5/2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

◇

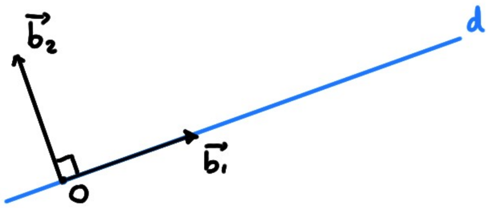
Exemple 8.7. Considérons la projection proj_d sur une droite d passant par l'origine et faisant un angle de θ avec $\mathbf{e}_1$:



Rappelons que sa matrice relativement à la base canonique est donnée par

$$[\text{proj}_d]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Plus naturelle, pour décrire cette projection, serait une base dans laquelle les vecteurs sont orientés dans des directions qui tiennent compte de la position de l'axe d. Par exemple, une base $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ où $\mathbf{b}_1$ dirige d, et $\mathbf{b}_2$ est perpendiculaire à d :



Par définition de la projection,

$$\text{proj}_d(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 \,, \qquad \text{proj}_d(\mathbf{b}_2) = \mathbf{0} \,,$$

ce qui donne

$$[\text{proj}_d(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,, \qquad [\text{proj}_d(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,.$$

Par conséquent, la matrice relativement à cette base prend une forme particulièrement simple :

$$[\text{proj}_d]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions que c'est bien ce que l'on obtient en faisant le changement de base, de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ vers $\mathcal{B}$.

Tout d'abord, on écrit explicitement les vecteurs de la nouvelle base en fonction de ceux de l'ancienne. Puisque d fait un angle θ avec l'horizontale, en les prenant orientés comme sur la figure ci-dessus, et unitaires,

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \qquad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de changement de base est

$$P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

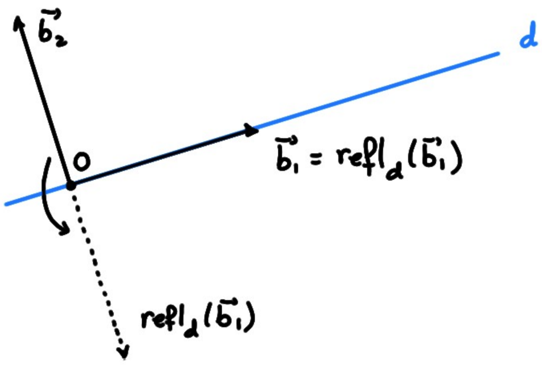
La formule du changement de base donne donc

$$\begin{aligned}
[\text{proj}_d]_{\mathcal{B}} &= P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}}{}^{-1}[\text{proj}_d]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\mathcal{B}} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

◇

Dans dernier exemple, on a observé qu'une application (la projection) prenait une forme plus simple quand on la regardait dans une base qui était adaptée à la géométrie du problème. Faisons maintenant l'inverse : prenons une transformation, définie dans une base naturelle, et voyons quelle forme elle prend dans une autre base :

Exemple 8.8. Considérons la **réflexion** par rapport à une droite d qui passe par l'origine, que nous avions notée refl_d. Utilisons à nouveau la base $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ du dernier exemple, où $\mathbf{b}_1$ dirige d, et $\mathbf{b}_2$ est perpendiculaire à d. On remarque que l'application de la réflexion sur ces vecteurs prend une forme très simple :



$$\text{refl}_d(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 \qquad \text{refl}_d(\mathbf{b}_2) = -\mathbf{b}_2\,.$$

Par conséquent,

$$[\text{refl}_d]_{\mathcal{B}} = \big[[\text{refl}_d(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}}\,[\text{refl}_d(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}}\big] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, exprimons la matrice de refl_d relativement à la base canonique : Puisque la matrice de changement de base est la même qu'avant,

$$\begin{aligned}
[\mathrm{refl}_d]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} &= P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}\mathcal{B}}[\mathrm{refl}_d]_{\mathcal{B}} P^{-1}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}\mathcal{B}} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Cette expression est bien celle que nous avions obtenue précédemment. $\diamond$