Chapitre 5

Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

5.1 Matrice d'une application

Dans ce chapitre, nous allons appliquer quelques-unes des notions relatives aux applications linéaires $T : V \to V'$, vues dans le chapitre précédent, au cas particulier $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Nous avions vu que toute application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de la forme $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ est linéaire, et nous savons depuis la dernière section du dernier chapitre que la réciproque est vraie :

Théorème 5.1. *Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire, alors il existe une unique matrice A ($m \times n$) telle que*

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}\,, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,.$$

De plus, la matrice A est celle dont les colonnes sont les images par T des vecteurs de la base canonique :

$$A = \big[T(\mathbf{e}_1) \cdots T(\mathbf{e}_n)\big]\,.$$

Par ce que nous savons de la section précédente, A n'est autre que $[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}\mathcal{B}_{\text{can}}}$, où $\mathcal{B}_{\text{can}}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{B}'_{\text{can}}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

Exemple 5.2. Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ déjà considérée précédemment :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_3 + 7x_1 \end{pmatrix}$$

En calculant les images des vecteurs de base,

$$T(\mathbf{e}_1) = T\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} -1 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \\ 0 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$T(\mathbf{e}_2) = T\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \\ 0 + 7 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$T(\mathbf{e}_3) = T\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 0 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \\ 1 + 7 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

ce qui donne la matrice associée à T :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◇

Exemple 5.3. Considérons l'application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) := x_2 - 3x_1 \,.$$

(On montre facilement que cette application est linéaire.) En calculant les images des vecteurs de base,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = 0 - 3 \cdot 1 = -3 \,, \\ T(\mathbf{e}_2) &= T\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = 1 - 3 \cdot 0 = 1 \,, \\ T(\mathbf{e}_3) &= T\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = 0 - 3 \cdot 0 = 0 \,, \end{aligned}$$

ce qui donne la matrice 1×3 associée à T :

$$A = \big[T(\mathbf{e}_1)\, T(\mathbf{e}_2)\, T(\mathbf{e}_3)\big] = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet,

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -3x_1 + x_2 \,.$$

◇

Remarque 5.4. Les applications linéaires $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définies jusqu'ici ont toujours été définies *en composantes*, c'est-à-dire en définissant les composantes de $T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ à l'aide des composantes de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, comme dans les deux exemples précédents.

Il faut garder à l'esprit que pour l'instant, ces composantes sont toujours des composantes *associées à la base canonique*.

En général, une application n'a pas besoin d'être définie à l'aide de composantes (voir les exemples de transformations géométriques plus loin dans le chapitre), et on pourra effectivement lui associer une matrice, mais qui dépendra fortement de la base choisie.

◇

5.2 Surjection, injection, bijection

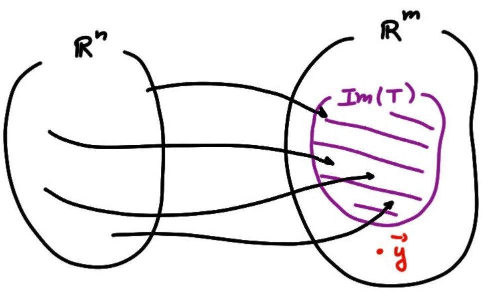
Dans cette section, on illustre les notions de base de la théorie des fonctions, dans le cadre des applications linéaires $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. En particulier, on regardera comment ces notions se traduisent en termes de la matrice qui représente T.

Rappelons que les notions de bases de la théorie des fonctions (injectivité, surjectivité, bijectivité) que nous utiliserons sont résumées **ici** (lien web).

Ensemble image, surjection

Rappelons la définition de l'ensemble image d'une application : c'est l'ensemble des points de l'ensemble d'arrivée qui possèdent au moins une préimage,

$$\mathrm{Im}(T) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \ : \ \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$$



Rappelons aussi que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est **surjective** si $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^m$.

Lorsque T est linéaire, on sait qu'il existe une matrice A ($m \times n$) telle que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}\,.$$

Puisque T est entièrement déterminée par sa matrice A, on écrira souvent $\mathrm{Im}(A)$ au lieu de $\mathrm{Im}(T)$.

Écrivons maintenant A à l'aide de ses colonnes :

$$A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]\,.$$

Puisque $A\mathbf{x}$ est une combinaison linéaire des colonnes de A, $\mathrm{Im}(A)$ représente tous les vecteurs de $\mathbb{R}^m$ que l'on peut obtenir à l'aide de combinaisons linéaires des colonnes de A :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}\,.$$

On peut donc se souvenir de l'ensemble image de $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ comme le sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ engendré par les *colonnes* de A ; pour cette raison, il est souvent noté comme suit :

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Col}(A)\,.$$

On a donc une formulation équivalente de la surjectivité :

Théorème 5.5. *Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire et soit A la matrice $m \times n$ qui lui est associée. Alors T est surjective si et seulement si les colonnes de A engendrent tout $\mathbb{R}^m$.*

Exemple 5.6. Montrons que l'application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est surjective. Pour ce faire, on doit fixer n'importe quel $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ et montrer qu'il existe au moins un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Fixons donc $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, et étudions le système $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

On voit facilement que A est équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{pmatrix},$$

ce qui implique que la solution existe toujours (et est unique), quel que soit $\mathbf{y}$. On conclut que T est surjective : $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

On aurait aussi pu simplement montrer que les colonnes de A forme une famille libre, ce qui implique qu'elle engendre tout $\mathbb{R}^3$ (c'est parce que dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille libre de de n vecteurs forme une base). $\diamond$

Exemple 5.7. L'application $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ associée à une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \\ c & \gamma \\ d & \delta \end{pmatrix}$$

ne *peut pas* être surjective, puisque deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$ ne suffisent jamais pour engendrer $\mathbb{R}^4$. $\diamond$

Injection

Rappelons qu'une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est **injective** si des éléments de $\mathbb{R}^n$ distincts ont des images distinctes :

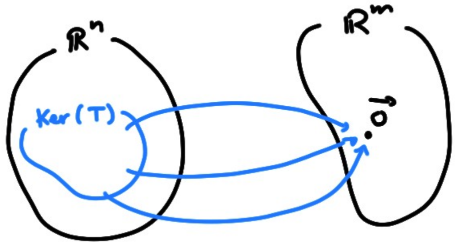
$$\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \Rightarrow T(\mathbf{x}) \neq T(\mathbf{x}'),$$

ou alors, ce qui est équivalent, si

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}') \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}'.$$

Pour les applications qui sont *linéaires*, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, on sait que l'injectivité peut se caractériser à l'aide du **noyau** :

$$\ker(T) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \; : \; A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$



On écrira souvent le noyau $\ker(A)$ au lieu de $\ker(T)$. Puisque $\ker(A)$ n'est autre que l'ensemble des solutions du système homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, et comme on sait qu'il y a toujours la solution triviale, le noyau n'est jamais vide : $\ker(A) \ni \mathbf{0}$.

Nous avons vu qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau ne contient *que* le vecteur nul :

$$\ker(A) = \{\mathbf{0}\}\,.$$

Et comme on sait que l'unicité de la solution du problème homogène caractérise l'indépendance des colonnes de A, l'injectivité peut se formuler en termes de l'indépendance des colonnes de la matrice :

Théorème 5.8. *Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire et soit A la matrice $m \times n$ qui lui est associée. Alors T est injective si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.*

Exemple 5.9. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire décrite par la matrice (déjà rencontrée plus tôt)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Puisque le noyau correspond à l'ensemble des solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, on l'a déjà calculé :

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

Comme ce noyau contient des vecteurs non-nuls (tout choix de $t \neq 0$ donne une solution non-triviale), T n'est pas injective. Ceci signifie aussi que les colonnes de A sont linéairement dépendantes. En effet, en prenant par exemple la solution correspondant à $t = 1$, on peut écrire

$$(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

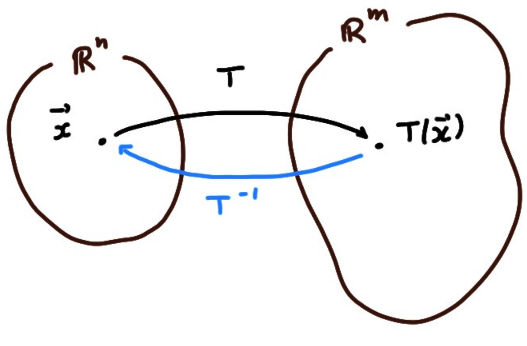
◇

Bijection

Rappelons qu'une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est **bijective** (ou que c'est une **bijection**) si elle est à la fois surjective et injective.

La **réciproque** d'une application bijective : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se note

$$\begin{aligned} T^{-1} : \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{y} &\mapsto T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}_*\,. \end{aligned}$$



Par construction, on a

$$\begin{aligned} T(T^{-1}(\mathbf{y})) &= \mathbf{y} \qquad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\,, \\ T^{-1}(T(\mathbf{x})) &= \mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,. \end{aligned}$$

On sait que si une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est bijective et linéaire, alors sa réciproque est aussi linéaire. Mais on a aussi :

Théorème 5.10. *Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire et bijective, alors les ensembles de départ et d'arrivée doivent être de même dimension : $m = n$.*

Preuve: On utilise la représentation de T à l'aide de sa matrice $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$, où chaque $\mathbf{a}_k$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

D'une part, T étant injective, on sait que les colonnes de A sont linéairement indépendantes. Ceci implique que $n \leqslant m$ (en effet, on sait que dans $\mathbb{R}^m$, une famille de plus de m vecteurs est toujours liée). D'autre part, T étant surjective, les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$, ce qui signifie que $n \geqslant m$.

De là, on conclut que $n = m$. □

Ceci implique que les applications linéaire bijectives ne peuvent exister qu'entre des espaces de même dimensions :

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

De telles applications sont donc représentées par des matrices carrées. Nous y reviendrons plus tard et étudierons leurs propriétés.

5.3 Une base pour $\mathrm{Im}(A)$

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire définie par une matrice A ($m \times n$). On sait que l'ensemble image $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Col}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ (si T n'est pas surjective, c'est un sous-espace strict), et dans cette section nous allons voir un moyen de trouver une base pour le décrire.

Extraire une base des colonnes

D'un point de vue calculatoire, l'ensemble image $\mathrm{Im}(A)$ se calcule en trouvant tous les $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ pour lesquels le système

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

possède au moins une solution. Ensuite, chercher une base pour $\mathrm{Im}(A)$ présente a priori une seconde étape.

Mais comme on sait, l'ensemble image est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des colonnes de A :

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Col}(A) = \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n\}\,.$$

Puisque les colonnes engendrent $\mathrm{Im}(A)$, il y a tout lieu de penser que certaines d'entre elles peuvent être utilisées pour former une base de $\mathrm{Im}(A)$. Voyons ça sur un exemple (un peu trop) simple.

Exemple 5.11. Considérons l'application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice est donnée par

$$A = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3\, \mathbf{a}_4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Comme $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_4$ sont identiquement nulles, elles ne participent pas à $\mathrm{Col}(A)$:

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\} = \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\} .$$

De plus, $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_3$ sont linéairement indépendantes, et donc elles forment une base de l'espace qu'elles engendrent. Donc $\mathcal{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$ forme une base de $\mathrm{Col}(A)$. ◇

Dans ce dernier exemple, on a pu simplement retirer des colonnes nulles, sachant qu'elles ne contribuent pas à l'espace $\mathrm{Col}(A)$.

Nous avons déjà décrit, dans le cadre abstrait des espaces vectoriels (voir **ici** (lien web)), le processus qui permet de retirer les vecteurs "superflus" dans une famille qui engendre un sous-espace W, donnant un algorithme menant à une base de W : on retire un à un les vecteurs qui peuvent être exprimés comme combinaisons linéaires des autres, et quand on ne peut plus en retirer, c'est qu'on est en possession d'une base. Appliquons ce résultat pour calculer l'ensemble image d'une matrice, $W = \mathrm{Col}(A)$:

Exemple 5.12. Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice est

$$A = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3\, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} .$$

A priori,

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\} .$$

Or on remarque que $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, et donc le lemme ci-dessus garantit qu'on peut retirer $\mathbf{a}_2$ sans changer l'espace engendré :

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\} .$$

On remarque aussi que $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4$, et donc

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\} .$$

Maintenant, on peut remarquer que $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ et $\mathbf{a}_4$ sont linéairement indépendantes. Comme elles engendrent $\mathrm{Col}(A)$, elles forment donc une base de $\mathrm{Col}(A)$.

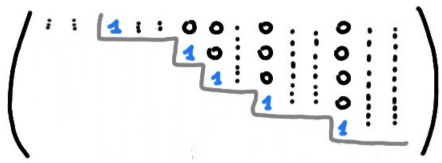
Remarquons en passant que puisque cette base contient trois vecteurs, $\dim(\mathrm{Col}(A)) = 3$, qui est aussi la dimension de l'espace d'arrivée. Ceci a pour conséquence que l'application $T(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ est surjective. ◇

Une méthode pour identifier les colonnes retirables

Dans le dernier exemple, on a pu trouver des colonnes qui étaient combinaisons linéaires des autres, mais n'y a-t-il pas un moyen plus méthodique de trouver facilement les colonnes "superflues", pour ne garder que celles qui forment une base de $\mathrm{Col}(A)$? La réponse est "oui", et pour le comprendre il faut reprendre le procédé de réduction vu au début du cours.

Définition 5.13. Soit A une matrice $m \times n$ et soit $\widetilde{A}$ sa réduite. Si la k-ème colonne de $\widetilde{A}$ contient un pivot, on dit que la k-ème colonne de A est une **colonne-pivot**

Rappelons que les pivots, dans $\widetilde{A}$, sont les coefficients principaux égaux à 1, seuls coefficients non-nuls de leur colonne :



L'unicité de la réduite implique que la notion de colonne-pivot, pour A, est bien définie.

Exemple 5.14. Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Alors les colonnes 1 et 2 de A sont des colonnes-pivot, car après réduction, les colonnes 1 et 2 de $\widetilde{A}$ sont celles qui contiennent des pivots :

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇

Théorème 5.15. *Les colonnes-pivot d'une matrice A forment une base de $\mathrm{Im}(A)$. En particulier, $\dim(\mathrm{Im}(A))$ est égale au nombre de colonnes-pivot de A.*

Pour démontrer le théorème, nous aurons besoin du résultat suivant, qui dit que les dépendances linéaires existant entre des colonnes d'une matrice sont les mêmes que celles existant entre les colonnes correspondantes de sa réduite :

Proposition 3. *Soit $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$, et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de colonnes de A :*

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_l}\} \subset \{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n\}.$$

Si $\widetilde{A} = [\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n]$ est la réduite de A, et si $\widetilde{\mathcal{F}}$ est le sous-ensemble de colonnes de $\widetilde{A}$ correspondant à $\mathcal{F}$,

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{\mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_l}\} \subset \{\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n\},$$

alors

- ⋆ *$\mathcal{F}$ est liée si et seulement si $\widetilde{\mathcal{F}}$ est liée,*
- ⋆ *$\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\widetilde{\mathcal{F}}$ est libre.*

Preuve: Si les colonnes considérées sont $i_1, \dots, i_l$, alors

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_l}\}$$
$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{\mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_l}\}.$$

Supposons que les colonnes de $\mathcal{F}$ satisfont à une relation linéaire du type

$$\alpha_{i_1}\mathbf{a}_{i_1} + \cdots \alpha_{i_l}\mathbf{a}_{i_l} = \mathbf{0}\,.$$

Cette relation représente un système homogène, et si on applique sur ce système les mêmes opérations élémentaires qui transforment A en $\widetilde{A}$, il se transforme en le système homogène associé à la relation linéaire

$$\alpha_{i_1}\mathbf{r}_{i_1} + \cdots \alpha_{i_l}\mathbf{r}_{i_l} = \mathbf{0}\,.$$

Puisque les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions d'un système, des nombres $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_l}$ sont solutions de la première relation si et seulement ils sont solutions de la deuxième relation. Ceci démontre la proposition. $\square$

Exemple 5.16. Les colonnes 1, 3 et 8 de A sont dépendantes si et seulement si les colonnes 1, 3 et 8 de $\widetilde{A}$ sont dépendantes. $\diamond$

Une conséquence directe du résultat ci-dessus :

Corollaire 3. *Un sous-ensemble des colonnes de A*

$$\mathcal{B} = (\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_l}) \subset \{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n\}$$

forme une base de $\mathrm{Col}(A)$ si et seulement si le sous-ensemble de colonnes de $\widetilde{A}$ correspondant,

$$\widetilde{\mathcal{B}} = (\mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_l}) \subset \{\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n\}\,,$$

forme une base de $\mathrm{Col}(\widetilde{A})$.

Exemple 5.17. Soit A une matrice 7×11. Les colonnes 2, 5 et 8 de $\widetilde{A}$ forment une base de $\mathrm{Col}(\widetilde{A})$ si et seulement si les colonnes 2, 5 et 8 de A forment une base de $\mathrm{Col}(A)$. $\diamond$

Nous pouvons maintenant prouver le théorème :

Preuve: Commençons par deux remarques concernant la réduite $\widetilde{A}$.

- ⋆ Dans $\widetilde{A}$, les colonnes contenant des pivots sont linéairement indépendantes, puisqu'elles ont toutes un seul coefficient non nul (le pivot "1"), chaque fois situé à une hauteur différente.
- ⋆ Dans $\widetilde{A}$, toute colonne qui ne contient pas de pivot peut s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes qui contiennent un pivot, et qui sont situées à sa gauche.

Par conséquent, le lemme énoncé plus haut garantit que les colonnes de $\widetilde{A}$ ne contenant pas de pivot ne contribuent pas à $\mathrm{Col}(\widetilde{A})$, et les colonnes contenant un pivot forment une base de $\mathrm{Col}(\widetilde{A})$. Par le corollaire, ceci implique que les colonnes-pivot de A forment une base de $\mathrm{Col}(A)$. $\square$

Voyons comment utiliser le théorème pour obtenir plus facilement une base de $\mathrm{Col}(A)$:

Exemple 5.18. Considérons la même matrice que celle du début de cette section :

$$A = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3\, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}\,.$$

Après réduction,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme les colonnes $1, 2$ et 4 de $\widetilde{A}$ sont celles contenant des pivots, on conclut que $\mathcal{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$ est une base de $\mathrm{Col}(A)$. En particulier, $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 3$. $\diamond$

5.4 Une base pour $\ker(A)$

Rappelons que le noyau d'une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ associée à une matrice A de taille $m \times n$ est

$$\ker(T) = \ker(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}.$$

Le noyau étant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (l'ensemble de départ), il est important de trouver une base pour le décrire.

Voyons comment le calcul mène en général directement à une base du noyau, sur un exemple concret. Il est bien important de comprendre la méthode utilisée dans ce cas particulier, car elle sera exploitée dans la preuve du théorème énoncé plus bas :

Exemple 5.19. Calculons le noyau $\ker(A)$ de la matrice d'avant,

$$A = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3\, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Comme on cherche les $\mathbf{x}$ tels que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, qui est équivalent à $\widetilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, on utilise la réduite déjà calculée,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit la présence de deux variables libres dans le système $\widetilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, x_3 et x_5. Les autres composantes s'expriment en fonction de $x_3 = s$ et $x_5 = t$:

$$\begin{cases} x_1 &= -2s - t \\ x_2 &= s + t \\ x_4 &= t \end{cases}$$

Maintenant, écrivons explicitement la dépendance en s et t, en mettant ces variables *en évidence* :

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s - t \\ s + t \\ s \\ t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Comme les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont indépendants et engendrent le noyau, ils forment une base de $\ker(A)$. En particulier, $\dim(\ker(A)) = 2$. ◇

Dans ce dernier exemple, nous avons vu apparaître deux variables libres, qui ont donné lieu à deux vecteurs qui formaient directement une base pour le noyau. Il se trouve que **ce procédé mène toujours directement à une base du noyau**.

Théorème 5.20. *Pour toute matrice A, la dimension du noyau $\ker(A)$ est égale au nombre de variables libres apparaissant dans le système $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. (De plus, la méthode directe utilisée dans l'exemple précédent mène toujours à une base du noyau.)*

Preuve: Supposons que A est $m \times n$. Supposons que les variables $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ soient libres. Lorsqu'on met ces variables en évidence, comme dans l'exemple ci-dessus, à chacune de ces variables x_{i_j} sera associée un vecteur $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^n$. Or ces vecteurs possèdent la propriété suivante : pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$, la i_j-ème composante de $\mathbf{v}_j$ est un 1, alors que ses composantes $i_{j'}$, pour $j' \neq j$, sont nulles. Ceci implique que la famille $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ est libre. Puisqu'elle engendre $\ker(A)$, elle forme une base du noyau. Ceci implique que $\dim(\ker(A)) = k$, le nombre de variables libres. □

5.5 Transposition

L'opération de **transposition**, pour une matrice, est une opération qui consiste à transformer ses colonnes en lignes. Elle ne sera utilisée que plus tard dans le cours, mais nous la définissons déjà ici, et présentons ses propriétés.

Définition 5.21. Soit A une matrice $m \times n$. La **transposée de** A, notée A^T, est la matrice $n \times m$ dont les éléments sont définis par

$$(A^T)_{ij} := A_{ji} .$$

Exemple 5.22. Si A est 2×3, donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \mu & \varepsilon \end{pmatrix} ,$$

alors A^T est 3×2, donnée par

$$A^T = \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \mu \\ \gamma & \varepsilon \end{pmatrix} .$$

◇

Exemple 5.23. Pour une matrice carrée, la transposition revient à refléter ses coefficients à travers la diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} {\color{red}a} & b & c & d \\ e & {\color{red}f} & g & h \\ i & j & {\color{red}k} & l \\ m & n & o & {\color{red}p} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} {\color{red}a} & e & i & m \\ b & {\color{red}f} & j & n \\ c & g & {\color{red}k} & o \\ d & h & l & {\color{red}p} \end{pmatrix} .$$

◇

Proposition 4. *a)* $(A^T)^T = A$

b) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ *pour tout scalaire* λ

c) *Pour toute paire A, B (de mêmes dimensions),*

$$(A + B)^T = A^T + B^T .$$

Preuve: Suivent de la définition. □

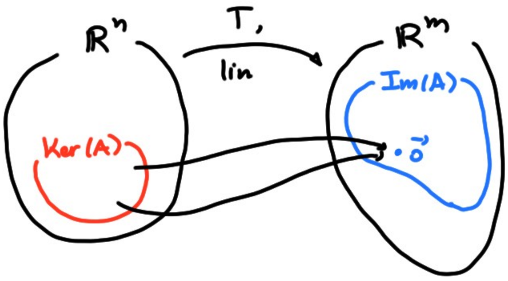
Transposition de vecteurs

Pour des raisons de commodité, on utilisera souvent le fait suivant : si un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est vu comme une matrice $n \times 1$ (un "vecteur colonne"), on peut également lui appliquer l'opération de transposition, et le transformer en une matrice $1 \times n$ (un "vecteur ligne") :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x}^T = [x_1\, x_2 \cdots x_n]\,.$$

5.6 Le Théorème du Rang

Considérons une matrice $m \times n$, A, et l'application linéaire associée, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$:



On a déjà dit que

- ⋆ $\ker(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,
- ⋆ $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Dans les sections précédentes, nous avons vu comment obtenir des bases pour ces sous-espaces. Ici, nous allons compléter cette analyse en faisant quelques remarques sur les *dimensions* de ces espaces.

Commençons par faire une remarque sur un cas particulier :

Exemple 5.24. Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ rencontrée dans les sections précédentes, dont la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

et dont la réduite est

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rappelons ce que nous avons déjà dit :

- ⋆ Les colonnes $1, 2, 4$ de $\widetilde{A}$ contiennent des pivots, ce qui implique que les colonnes $1, 2, 4$ de A sont des colonnes-pivot et forment une base de $\mathrm{Im}(A)$, ce qui implique que
$$\dim(\mathrm{Im}(A)) = 3\,.$$

⋆ Les variables x_3, x_5 sont libres, ce qui implique (voir théorème de la section précédente) que
$$\dim(\ker(A)) = 2\,.$$

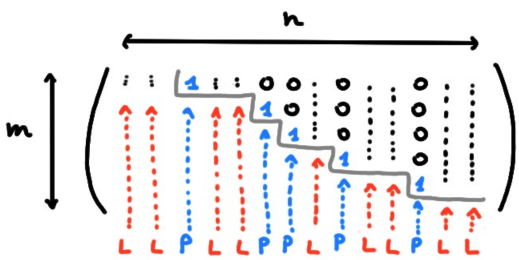
Par conséquent,
$$\dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = 2 + 3 = 5\,.$$

Ici, "5" est également la dimension de l'espace de départ ($\mathbb{R}^5$), qui est également égal au nombre de colonnes de A. ⋄

Ce que nous venons d'observer est en fait vrai pour toute matrice : la somme des dimensions de l'ensemble image et du noyau est toujours égale à la dimension de l'espace de départ. C'est le **Théorème du rang** :

Théorème 5.25. *Soit A une matrice $m \times n$. Alors*
$$\dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = n\,.$$

Pour le même résultat, mais démontré plus généralement dans le cadre des espaces vectoriels, voir **ici** (lien web).
Preuve: La structure générale d'une matrice réduite sera toujours du type suivant :



⋆ Le nombre de colonnes contenant un pivot (au nombre de 5 en bleu sur l'image) donne le nombre d'éléments contenus dans une base de $\mathrm{Im}(A)$, et donc est égal à $\dim(\mathrm{Im}(A))$.

⋆ Ensuite toutes les autres colonnes (au nombre de 9 en rouge sur l'image) représentent des variables libres, et donnent donc la dimension du noyau, $\dim(\ker(A))$. Comme il y a en tout n colonnes ($n = 14$ sur l'image), on a bien
$$\dim(\mathrm{Im}(A)) + \dim(\ker(A)) = n\,.$$

□

Le terme "rang" doit encore être défini :

Définition 5.26. Soit A une matrice $m \times n$. Le **rang** de A est défini comme la dimension de son ensemble image :
$$\mathrm{rang}(A) := \dim(\mathrm{Im}(A))\,.$$

Parfois, le rang est aussi noté $\mathrm{rg}(A)$. (En anglais : $\mathrm{rank}(A)$.)

Si A est $m \times n$, alors

a) $\mathrm{rang}(A) \leqslant m$. En effet, l'ensemble image de A étant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$, sa dimension est au plus égale à m.

b) $\mathrm{rang}(A) \leqslant n$. En effet, la dimension de l'ensemble image est au plus égale au nombre de colonnes de A.

Par conséquent,

$$\text{rang}(A) \leqslant \min\{m, n\} .$$

Informel 5.27. Plus le rang d'une matrice $m \times n$ est grand, plus cette matrice définit une application qui "remplit" son ensemble d'arrivée. En particulier, si l'application est surjective, alors son rang vaut m.

Voyons quelques exemples d'utilisation simple du théorème du rang.

Exemple 5.28. Soit A une matrice 6×9. Alors $\ker(A)$ a dimension au moins égale à 3. En effet, $\text{rang}(A) \leqslant \min\{6, 9\} = 6$, et donc par le théorème du rang,

$$\dim(\ker(A)) = 9 - \text{rang}(A) \geqslant 9 - 6 = 3 .$$

◇

L'espace engendré par les lignes

Nous avons déjà souvent décrit un matrice $m \times n$ à l'aide de ses colonnes $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^m$:

$$A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] .$$

Mais on peut aussi aussi la décrire à l'aide de ses lignes,

$$A = \begin{pmatrix} \ell_1^T \\ \vdots \\ \ell_m^T \end{pmatrix} ,$$

où $\ell_1, \ldots, \ell_m$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. En d'autres termes, les lignes de A sont les colonnes de A^T :

$$A^T = [\ell_1 \cdots \ell_m]$$

Exemple 5.29. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ peut s'écrire $A = \begin{pmatrix} \ell_1^T \\ \ell_2^T \end{pmatrix}$, où

$$\ell_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} , \qquad \ell_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

◇

Définition 5.30. Soit A une matrice $m \times n$, dont les lignes sont $\ell_1^T, \ldots, \ell_m^T$. Alors l'**espace-ligne de** A est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par ses lignes :

$$\text{Lgn}(A) := \text{Vect}\{\ell_1, \ldots, \ell_m\} .$$

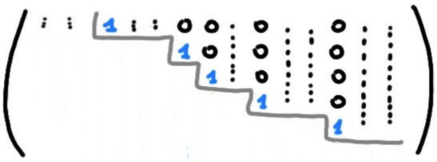
Lemme 11. *Si A et B sont deux matrices équivalentes selon les lignes (on peut passer de l'une à l'autre à l'aide d'un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes), alors*

$$\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(B) .$$

Preuve: Supposons que B peut s'obtenir par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. Alors toute combinaison linéaire des lignes de B est aussi une combinaison linéaire des lignes de A. Ceci implique $\mathrm{Lgn}(B) \subset \mathrm{Lgn}(A)$. Le même argument montre que $\mathrm{Lgn}(A) \subset \mathrm{Lgn}(B)$, ce qui entraîne $\mathrm{Lgn}(A) = \mathrm{Lgn}(B)$. □

Corollaire 4. *Si $\widetilde{A}$ est la réduite de A, alors les lignes de $\widetilde{A}$ contenant un pivot (s'il y en a) forment une base de* $\mathrm{Lgn}(\widetilde{A})$ ***et de*** $\mathrm{Lgn}(A)$.

Preuve: Regardons $\widetilde{A}$:



Les lignes contenant un pivot possèdent des "1" à des emplacements différents, précédés de "0" : elles sont donc clairement indépendantes. Puisqu'elles engendrent évidemment $\mathrm{Lgn}(\widetilde{A})$, elles forment une base de $\mathrm{Lgn}(\widetilde{A})$.

Par le lemme précédent, toute famille de vecteurs qui forme une base de $\mathrm{Lgn}(\widetilde{A})$ forme aussi une base de $\mathrm{Lgn}(A)$. □

Intéressons-nous maintenant à la dimension de l'espace engendré par les lignes. Par définition,

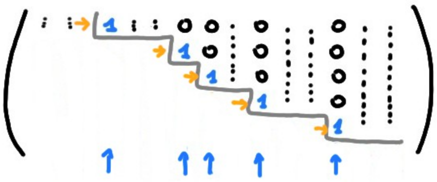
$$\dim(\mathrm{Lgn}(A)) = \mathrm{rang}(A^T).$$

Le résultat suivant montre que les espaces engendrés par les colonnes et les lignes d'une matrice quelconque ont toujours même dimension :

Théorème 5.31. *Si A est une matrice quelconque,*

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T)\,.$$

Preuve: Soit $\widetilde{A}$ la réduite de A. La chose importante à remarquer est que dans $\widetilde{A}$, *le nombre de colonnes contenant un pivot est égal au nombre de lignes non nulles*. C'est évident sur un dessin :



On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{rang}(A) &= \text{nombre de colonnes-pivot de } A \\
&= \text{nombre de colonnes contenant un pivot dans } \widetilde{A} \\
&= \text{nombre de lignes non-nulles dans } \widetilde{A} \\
&= \dim(\mathrm{Lgn}(\widetilde{A})) \\
&= \dim(\mathrm{Lgn}(A)) \\
&= \mathrm{rang}(A^T)\,.
\end{aligned}$$

Dans la quatrième ligne, on a utilisé le corollaire ci-dessus. Dans la cinquième ligne, on a utilisé le lemme du dessus. □

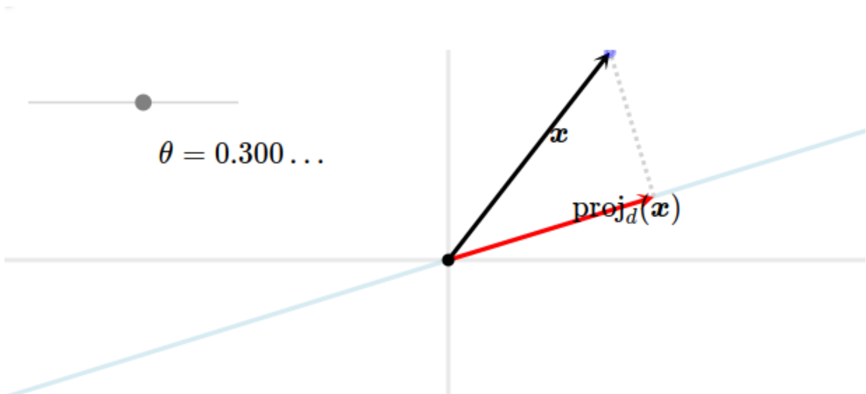
5.7 Transformations géométriques

Dans cette section, on laisse de côté la théorie générale pour considérer quelques exemples importants d'applications linéaires $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tous de nature *géométrique*.

Sur ces exemples, on illustrera certaines des notions vues dans les sections précédentes (ensemble image, noyau, etc.), en leur donnant un sens géométrique. On considérera aussi le matrices associées à ces applications relativement à la base canonique, et plus loin relativement à d'autres bases.

Projection sur un axe de $\mathbb{R}^2$

Fixons une droite d dans le plan, passant par l'origine, et considérons la transformation consistant à *projeter un vecteur* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *orthogonalement sur* d :



Cette opération définit une application

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_d : \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathrm{proj}_d(\mathbf{x})\,. \end{aligned}$$

Quelques remarques à propos de cette application :

Par définition de la projection, tout vecteur $\mathbf{v}$ appartenant à d (ou plutôt : colinéaire à un vecteur directeur quelconque de d) ne change pas lorsqu'il est projeté :

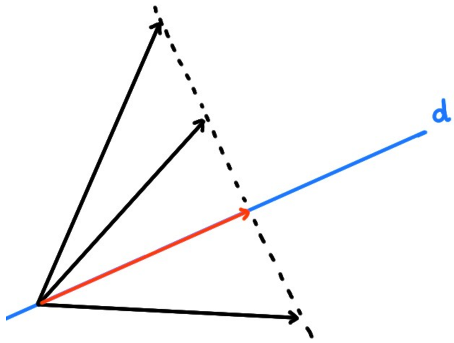
$$\mathrm{proj}_d(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\,.$$

Ceci implique en particulier que $\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_d) \supset d$. Mais par définition, $\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_d) \subset d$, et donc

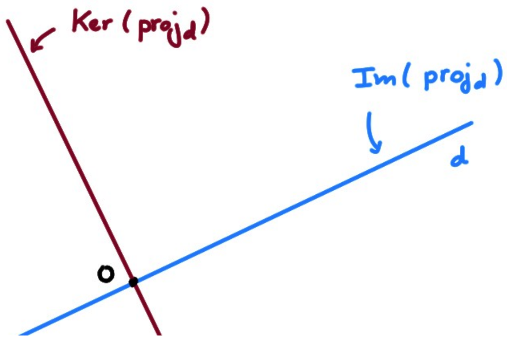
$$\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_d) = d\,.$$

Puisque d est un sous-ensemble stricte de $\mathbb{R}^2$, ceci implique que proj_d *n'est pas surjective*.

Ensuite, proj_d *n'est pas injective*, puisqu'il existe une infinité de vecteurs différents dont la projection sur d est la même :



Effectivement le noyau contient (en plus du vecteur nul) une infinité de vecteurs, tous sur la droite d' perpendiculaire à d, passant par l'origine :

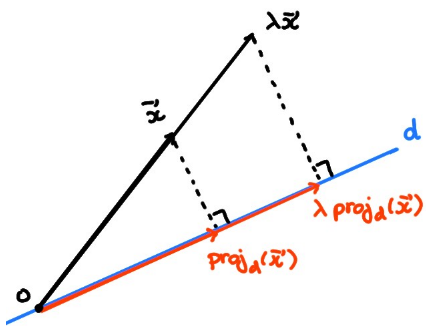


Ceci illustre aussi le théorème du rang :

$$\dim(\ker(\mathrm{proj}_d)) + \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_d)) = 1 + 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)\,.$$

Insistons sur le fait que les propriétés décrites ci-dessus ont toutes été obtenues *sans calculs*.

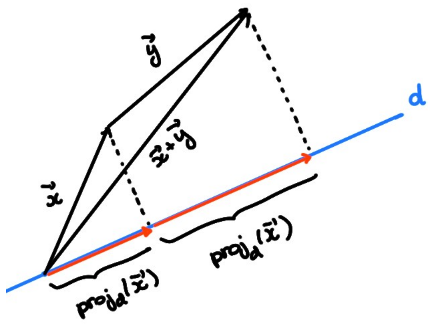
Maintenant, la nature géométrique de la projection permet de montrer sans peine qu'elle est *linéaire*. En effet, si on multiplie $\mathbf{x}$ par un scalaire λ, sa projection est multipliée par le même λ :



En d'autres termes :

$$\mathrm{proj}_d(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathrm{proj}_d(\mathbf{x})\,.$$

Ensuite, si on additionne deux vecteurs et qu'ensuite on projette leur somme, on obtient le même résultat que si on les avait d'abord projetés séparément pour ensuite les additionner :

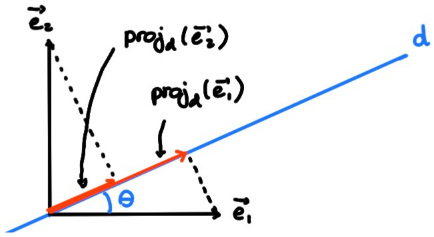


Plus précisément :

$$\mathrm{proj}_d(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathrm{proj}_d(\mathbf{x}) + \mathrm{proj}_d(\mathbf{y})\,.$$

Maintenant, puisque proj_d est linéaire, elle peut être représentée à l'aide d'une matrice. Celle-ci est donnée par

$$A = [\mathrm{proj}_d]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = \big[\mathrm{proj}_d(\mathbf{e}_1)\, \mathrm{proj}_d(\mathbf{e}_2)\big]\,.$$



Si on suppose que d fait un angle θ avec $\mathbf{e}_1$ (dans le sens anti-horaire), on trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_d(\mathbf{e}_1) &= \cos(\theta)\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\\ \mathrm{proj}_d(\mathbf{e}_2) &= \sin(\theta)\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\,,\end{aligned}$$

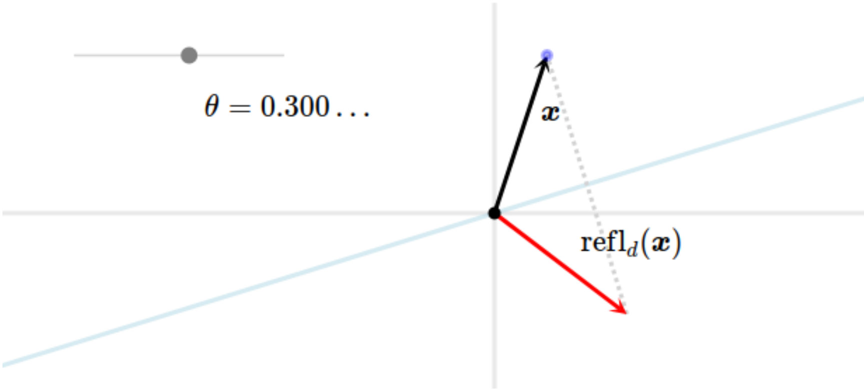
et donc la matrice associée à proj_d est

$$[\mathrm{proj}_d]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix}\cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta)\end{pmatrix}$$

Comme les colonnes sont toutes deux colinéaires au vecteur directeur de d, elles n'engendrent pas $\mathbb{R}^2$, ce qui reflète le fait que proj_d n'est ni injective, ni surjective.

Réflexion à travers un axe de $\mathbb{R}^2$

Reprenons encore une droite d passant par l'origine, et considérons cette fois la transformation consistant à *réfléchir un vecteur* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *à travers* d. La **réflexion de $\mathbf{x}$ à travers** d sera notée $\mathrm{refl}_d(\mathbf{x})$:



Cette opération définit une application

$$\begin{aligned}\mathrm{refl}_d : \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R}^2\\ \mathbf{x} &\mapsto \mathrm{refl}_d(\mathbf{x})\,.\end{aligned}$$

Quelques remarques :

- ⋆ Par construction, tout vecteur $\mathbf{v}$ appartenant à d (ou plutôt : colinéaire à un vecteur directeur quelconque de d) est invariant sous l'action de la réflexion :

$$\mathrm{refl}_d(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\,.$$

- ⋆ Clairement, le réfléchi du réfléchi de $\mathbf{x}$ est $\mathbf{x}$ lui-même :

$$\mathrm{refl}_d(\mathrm{refl}_d(\mathbf{x})) = \mathbf{x}\,,$$

ce qui implique que refl_d est bijective et qu'elle est égale à sa réciproque :

$$\mathrm{refl}_d{}^{-1} = \mathrm{refl}_d\,.$$

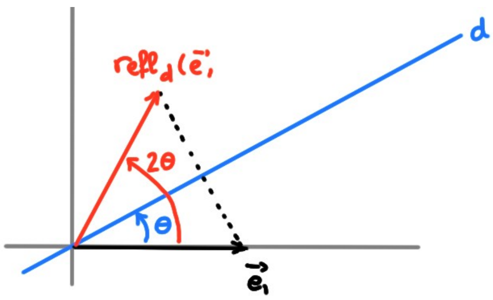
Étant injective, son noyau $\ker(\mathrm{refl}_d) = \{\mathbf{0}\}$. Étant surjective, $\mathrm{Im}(\mathrm{refl}_d) = \mathbb{R}^2$.

$$\dim(\ker(\mathrm{refl}_d)) + \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{refl}_d)) = 0 + 2 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)\,.$$

Comme pour la projection, on montre sans peine que refl_d est une application linéaire. Calculons sa matrice relativement à la base canonique :

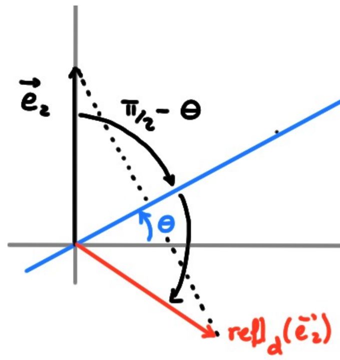
$$[\mathrm{refl}_d]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = \big[\mathrm{refl}_d(\mathbf{e}_1)\,\mathrm{refl}_d(\mathbf{e}_2)\big]\,.$$

Si encore une fois on suppose que d fait un angle θ avec la direction $\mathbf{e}_1$, alors on remarque que la réflexion de $\mathbf{e}_1$ à travers d le transforme en un vecteur unitaire faisant un angle de 2θ avec l'horizontale :



On a donc
$$\mathrm{refl}_d(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix}\cos(2\theta)\\ \sin(2\theta)\end{pmatrix}.$$

Ensuite, la réflexion de $\mathbf{e}_2$ à travers d le transforme en un vecteur unitaire faisant un angle de $\theta - (\frac{\pi}{2} - \theta) = 2\theta - \frac{\pi}{2}$ avec l'horizontale :

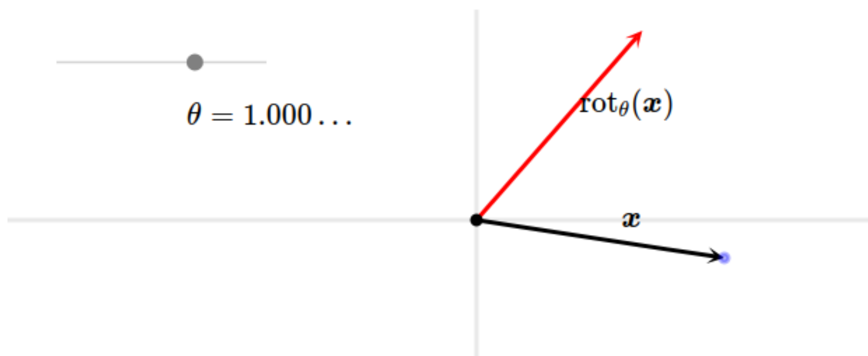


On a donc
$$\mathrm{refl}_d(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix}\cos(2\theta - \frac{\pi}{2})\\ \sin(2\theta - \frac{\pi}{2})\end{pmatrix}, = \begin{pmatrix}\sin(2\theta)\\ -\cos(2\theta)\end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice qui représente refl_d relativement à la base canonique est donnée par
$$[\mathrm{refl}_d]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = \begin{pmatrix}\cos(2\theta) & \sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta)\end{pmatrix}.$$

Rotation d'angle θ autour de l'origine dans $\mathbb{R}^2$

Considérons une **rotation d'angle θ autour de l'origine** (dans le sens trigonométrique) :



Cette opération définit une application
$$\begin{aligned}\mathrm{rot}_\theta : \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R}^2\\ \mathbf{x} &\mapsto \mathrm{rot}_\theta(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Quelques remarques :

⋆ Si $\theta = 0$ ou un multiple de 2π, la rotation correspond à l'identité.

- ⋆ Puisque

  $$\mathrm{rot}_{-\theta}(\mathrm{rot}_{\theta}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}\,,$$

  la rotation d'angle θ est bijective, et sa réciproque est la rotation d'angle $-\theta$:

  $${\mathrm{rot}_{\theta}}^{-1} = \mathrm{rot}_{-\theta}\,.$$

  Étant injective, son noyau $\ker(\mathrm{rot}_{\theta}) = \{\mathbf{0}\}$. Étant surjective, $\mathrm{Im}(\mathrm{rot}_{\theta}) = \mathbb{R}^2$.

  $$\dim(\ker(\mathrm{rot}_{\theta})) + \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{rot}_{\theta})) = 0 + 2 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)\,.$$

Une rotation (autour de l'origine) est clairement une transformation linéaire, et puisque

$$[\mathrm{rot}_{\theta}(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}\,, \qquad [\mathrm{rot}_{\theta}(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}\,,$$

sa matrice relativement à la base canonique est donnée par

$$[\mathrm{rot}_{\theta}]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\,.$$