Série 14: Intégrale, intégrales généralisées

Ex-14-01: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $L > 0$. Montrer :

1) Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$.
2) Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$.

Ex-14-02: Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

1) $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,dx$
2) $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$, $(a \neq 0)$
3) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx$ $(-1 < x < 1)$
4) $\displaystyle\int \arctan(\sqrt{x})\,dx$
5) $\displaystyle\int e^{\arccos(x)}\,dx$
6) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

Ex-14-03: Calculer les primitives des fonctions suivantes, en utilisant le changement de variable indiqué.

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, poser $x = \sin(u)$ $(x \in]-1, 1[)$
2) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, poser $x = \tan(u)$ $(x \in \mathbb{R})$

Ex-14-04: Calculer les primitives suivantes :

1) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{3x+4}}\,dx$ $(x > -\frac{4}{3})$
2) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}\,dx$ $(x > 1)$
3) $\displaystyle\int |x|\,dx$
4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-4}}{x}\,dx$ $(x > 4)$
5) $\displaystyle\int 2^{\log(x)}\,dx$ $(x > 0)$

Ex-14-05: Calculer les primitives de fonctions rationnelles ci-dessous :

1) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+2x+2}\,dx$
2) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x(x+1)^2}\,dx$
3) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx$
4) $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\,dx$
5) $\displaystyle\int \frac{2x^4+7x^3-4x^2-2x+1}{x^3+4x^2-1}\,dx$
6) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx$
7) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+x^3+x^2+x}\,dx$
8) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$

Ex-14-06: Calculer les sommes des séries convergentes suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(a+k)(a+1+k)}$, où $a > 0$.

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(n+3)}$

Ex-14-07: Calculer, dans le cas $b > a^2$, l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2ax+b)}\,.$$

Ex-14-08: Étudier les intégrales généralisées ci-dessous.

1) $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$

2) $\displaystyle I = \int_{1}^{\infty} \frac{\log(x)}{x^2}\,dx$

3) $\displaystyle I = \int_{1^+}^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

4) $\displaystyle I = \int_{0}^{\infty} \sin(x)\,e^{-x}\,dx$

5) $\displaystyle I = \int_{0^+}^{\infty} e^{-x}(1-x)\log(x)\,dx$

6) $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

Ex-14-09: Utiliser des comparaisons pour étudier la convergence/divergence des intégrales généralisées ci-dessous.

1) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$

2) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x^8}+2}$

3) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^7}+1}\,dx$

4) $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

5) $\displaystyle\int_{2^+}^{5^-} \frac{1}{\sqrt{7x-10-x^2}}\,dx$

6) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2+\cosh(x)}\,dx$

Ex-14-10: Calculer la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\log(1+\varepsilon)\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}dx\,.$$

Ex-14-11: La **fonction Gamma**, $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, est définie par

$$\Gamma(z) := \int_{0}^{\infty} x^{z-1}e^{-x}\,dx\,.$$

1) Montrer que $\Gamma(z)$ est bien défini pour tout $z > 0$.
2) Calculer $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$.
3) Montrer que pour tout $z > 0$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
4) Conclure que sur les entiers, $\Gamma(n) = (n-1)!$ (factorielle de $n-1$).

Ex-14-12: Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre $\Phi(x)$ ci-dessous est bien défini :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt\,.$$

Remarque -1.2. En théorie des probabilités (et statistiques), $\Phi(x)$ est appelée la **fonction de répartition** (lien web) de la variable aléatoire Gaussienne de distribution $\mathcal{N}(0,1)$. $\diamond$

Ex-14-13: Étudier la convergence de la série en fonction du paramètre $\beta > 0$.

$$\sum_{n \geqslant 27} \frac{1}{n \log(n) (\log(\log(n)))^{\beta}}\,,$$

Ex-14-14:

1) Montrer que pout tout $n \geqslant 2$,

$$\log(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \log(n) + 1$$

2) Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log(n)}$$

3) Estimer l'entier N à partir duquel la somme partielle de la série harmonique, s_n, dépasse le seuil $M = 50$.

Ex-14-15: Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}$$

i$_{i}ntegrale_{g}eneralisee_{c}hapeau.jpg$0.5300