Analyse 1 (Enseignant: S. Friedli) EPFL, Sections GM/OL

Série 12: Développements limités, Séries Taylor/MacLaurin

Automne 2023

Ex-12-01: À l'aide de la formule de Taylor, établir le développement limité suivant autour de $x = 0$:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

Ex-12-02: Déterminer, dans chaque cas, le développement limité d'ordre 3 de f autour de $x_0 = 0$ et expliciter le reste $R(x)$.

1) $f(x) = 3-2x+x^2-x^3+\frac{x^5}{4}$
2) $f(x) = \sin(3x)$
3) $f(x) = \log(2+x)$
4) $f(x) = |\cos(x)|$

Ex-12-03:

1) En utilisant un développement limité pour $\log(1+x)$, montrer que si (a_n) est telle que $a_n \to L$, alors

$$\Big(1+\frac{a_n}{n}\Big)^n \to e^L$$

2) Utiliser ce résultat pour calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(1+\tan(\tfrac{\sqrt{2}}{n})\Big)^{5n}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{n+1}+(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)^n$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n)}\right)^n$

Ex-12-04: Soit f une fonction paire (resp. impaire) possédant un $DL(n)$ autour de $x_0 = 0$:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)\,.$$

Montrer que tous les coefficients d'indices impairs (resp. pairs) sont nuls.

Ex-12-05:

1) Calculer le $DL(3)$ de $\tan(x)$ autour de $x_0 = 0$, avec un reste de la forme $x^3\varepsilon(x)$, puis montrer que

$$\tan(x)^2 = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + x^4\phi(x)\,,$$

où $\phi(x)$ est une fonction que l'on exprimera explicitement en fonction de x et $\varepsilon(x)$, et on vérifiera que $\phi(x)$ tend vers zéro lorsque $x \to 0$.

2) Utiliser la première partie pour calculer

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\tan(x)^2}{x^2\tan(x)^2}\,,$$

puis

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\left\{\tan(t)^2 - \frac{1}{(t-\frac{\pi}{2})^2}\right\}$$

Ex-12-06: Trouver le développement limité d'ordre n autour de $x_0 = 0$ des fonctions composées ci-dessous :

1) $f(x) = \frac{1}{1+2x^3}$, $n = 6$
2) $f(x) = \log(\cos(x))$, $n = 4$
3) $f(x) = \exp(\sin(x))$, $n = 4$
4) $f(x) = \sqrt{1+\sin(x)}$, $n = 3$

Ex-12-07: En utilisant des développements limités (d'ordre convenable) autour de 0, calculer les limites suivantes.

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \log(1+x)}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 \sin(\tfrac{1}{x^2})$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$

Ex-12-08: Soient $b, c \in \mathbb{R}$ et soit $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = bx + cx^2 + x^4\varepsilon(x)\,,$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Vrai ou faux ?

1) Alors f est continue en 0.
2) Si $f \in C^2(]-1,1[)$, alors $f''(0) = c$.
3) On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = b$.
4) $f(x)^2 = b^2x^2 + c^2x^4 + x^6\varepsilon(x)$.

Ex-12-09: Calculer l'intervalle de convergence des séries entières ci-dessous.

1) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k^k (x-x_0)^k$

2) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k^7 (x-x_0)^k$

3) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!^2} (x-x_0)^k$

4) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \sin(\tfrac{k\pi}{2}) (x-x_0)^k$

5) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 3} \frac{(-1)^k \log(k)}{k} (x-x_0)^k$

6) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(k!)^3}{(3k)!} (x-x_0)^k$

Ex-12-10: Soit $f(x) = e^{2x+1}$.

1) À l'aide de la formule de Taylor uniquement, calculer le $DL(n)$ de f autour de $x_0 = 0$, en précisant le reste.
2) Étudier la limite $n \to \infty$ du $DL(n)$. En particulier, étudier $\lim_{n\to\infty} R_n(x)$.
3) Ensuite, donner la série de Taylor de f autour de 0, ainsi que son intervalle de convergence.

Ex-12-11: Déterminer le développement de Taylor de la fonction

$$f(x) = \frac{2}{3+4x}$$

autour de x_0 puis déterminer l'intervalle de convergence dans les cas suivants :

1) $x_0 = 0$

2) $x_0 = 2$.

(Lire les indications !)

Ex-12**-**12: (Exercice facultatif) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x \leqslant 0\,, \\ \frac{3}{2}x^2 + x + \cos(x) & \text{si } x > 0\,, \end{cases}$$

1) Montrer que $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ existent, en les calculant.
2) En déduire que f est de classe C^3, et donner son développement limité d'ordre 2 autour de $x_0 = 0$.
3) Montrer que f n'est pas C^4.