

Ex-11-01: Montrer que si une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $]a, b[$, non-constante, et satisfait $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un point $c_+ \in]a, b[$ où sa dérivée est strictement positive, et un point $c_- \in]a, b[$ où sa dérivée est strictement négative.

Ex-11-02: Chercher les max/min globaux des fonctions ci-dessous, sur l'intervalle donné.

1) $f(x) = x^2 e^x, I = [-3, 1]$

2) $f(x) = |\sin(x) + \frac{1}{2}|, I = [-\frac{\pi}{2}, \pi]$

Ex-11-03: Trouver les extremas locaux et globaux de la fonction

$$f(x) = x^2 - \left|x + \frac{1}{4}\right| + 1$$

sur $[-1, 1]$.

Ex-11-04: Montrer analytiquement l'égalité ci-dessous :

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

Ex-11-05: Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2 \log x}}{x}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \tan(x)}{(\log(1+x))^2}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) e^{\sqrt{\sin^2(x)+1}}}{x}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x) \tan(x)}{(e^x - 1)^3}$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(x-1)}{x-2}$

11) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2e^{2t} - e^t}{t}$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x (\tanh(x) - 1)$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right) \right\}^{\frac{1}{x^2}}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right\}$

13) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1})^x$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos(x)}{x}$

14) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1 - \sqrt{x^2 - 1})^x$

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin(x)}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{1/x}$

16) $\triangle \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1+\sin x}} \right)$

Ex-11-06: Montrer qu'il existe, sur $[0, 1]$, une abscisse $x = c$ pour laquelle les graphes de $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ et $g(x) = 2x^8 - x^3$ ont des tangentes parallèles.

Ex-11-07: Montrer l'inégalité suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Ex-11-08: Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \geq 0$$

Ex-11-09: Étudier la limite ci-dessous, en fonction des paramètres a et b :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - ax^2}{e^x - 1 - x - bx^2}$$

Ex-11-10: Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur \mathbb{R} avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Vrai ou faux ?

- 1) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- 2) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas.

Ex-11-11: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert. Montrer que s'il existe une constante $\alpha > 1$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in I,$$

alors f est une constante.

Ex-11-12: Soit f une fonction dérivable dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, telle que $f'(x_0) = 0$. Si $f''(x_0)$ existe et est non-nulle, montrer que

- 1) $f''(x_0) > 0$ implique que x_0 est un minimum local.
- 2) $f''(x_0) < 0$ implique que x_0 est un maximum local.