Analyse 1 (Enseignant: S. Friedli) — EPFL, Sections GM/OL

# Série 08: Limites de fonctions — Automne 2023

**Ex-**08-01: Vrai ou faux ?

1) La série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$ diverge.
2) La série $\sum_{n\geqslant 1} 2^{-\frac{n^2-1}{n+2}}$ converge.
3) La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+1}$ converge, mais pas absolument.
4) La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{n^n}}{n!}$ converge.
5) Si $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ converge absolument, alors il existe $p>1$ tel que $|x_n|\leqslant\frac{1}{n^p}$ pour tout $n$ suffisamment grand.

**Ex-**08-02: (Séries avec paramètres) Déterminer le domaine $D(f)\subset\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous.

1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$
2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$
3) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x-a)^n$
4) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n$
5) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\sin(\frac{\pi x}{2}))^n$
6) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(1+x^2)^n$
7) $f(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{e^{-x^2n}}{n}$
8) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n!}{n^n}$

**Ex-**08-03: Soient $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Déterminer la monotonie de $g\circ f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si

1) $f$ et $g$ sont croissantes,
2) $f$ et $g$ sont décroissantes,
3) $f$ est croissante et $g$ est décroissante.

Qu'en est-il de la monotonie de $f\circ g$ dans le troisième cas ?

**Ex-**08-04: Soient $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions. Vrai ou faux ?

1) Si $f$ est strictement monotone, alors $f$ est injective.
2) Si $f$ est injective, alors $f$ est monotone.
3) Si $f$ est bijective et croissante, alors sa fonction réciproque $f^{-1}$ est décroissante.
4) Si $f\circ g$ est décroissante, alors $f$ et $g$ sont décroissantes.

**Ex-**08-05: Sans faire de calculs, donner les minimums et maximums, lorsqu'ils existent, des fonctions $f:D\to\mathbb{R}$ ci-dessous.

1) $D=[-1,1]$, $f(x)=-|x|$
2) $D=]-\pi/2,\pi/4]$, $f(x)=\sin(x)$
3) $D=[-1,3]$, $f(x)=\begin{cases}x^2 & -1\leqslant x\leqslant 1\,,\\ 2-x & 1<x\leqslant 3\end{cases}$

4) $D=\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin(1/x) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

5) $D=\mathbb{R}$, $f(x)=\arctan(x)$

Si un min/max existe, dire en quel(s) point(s) il est atteint.

**Ex-**08-06: Dans chacun des cas ci-dessous, donner (sans faire de calculs), s'ils existent,

$$\sup_{x\in A} f(x)\,,\quad \inf_{x\in A} f(x)\,,\quad \max_{x\in A} f(x)\,,\quad \min_{x\in A} f(x)\,.$$

1) $f(x)=x$, $A=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{1}{x}$, $A=\mathbb{R}_+^*$

3) $f(x)=x^2$, $A=[1,4[$.

4) $f(x)=\sin(x)$, $A=]-\frac{\pi}{2},\pi[$

5) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $A=]-1,1[$

6) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, $A=\mathbb{R}$

**Ex-**08-07: Suggérer une valeur pour les limites suivantes. Ensuite la justifier *à l'aide de la définition de limite uniquement.*

1) $\lim_{x\to 1}(2x-3)$,

2) $\lim_{x\to 5}\sqrt{2x+6}$.

3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x+4}{2+3x}$.

4) $\lim_{x\to 3} x^2$

**Ex-**08-08: Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x):=\begin{cases}x^2-2x & \text{si } x\leqslant 1\,,\\ \frac{x+2}{x} & \text{si } x>1\,.\end{cases}$$

1) Si $x_n=1-\frac{1}{n}$, calculer $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

2) Si $y_n=1+\frac{1}{n}$, calculer $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$.

3) Si $z_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$, calculer $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$.

Que concluez-vous ?

**Ex-**08-09: Calculer les limites suivantes.

1) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x-1}{3x^2-2}$

2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2}{x-1}$

3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)-1}{\sin(x^2)}$

4) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

5) $\lim_{x\to a}\dfrac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}$

**Ex-**08-10: Étudier les limites $x\to\pm\infty$ suivantes.

1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log(a^x+b^x)}{x}$, $\quad(a,b>1)$,

2) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5x-6-x^2}{4-x^2}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$

4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}$

5) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\log x}}{2^x}$

6) $\lim_{x\to+\infty}\sin(\arctan(x))$

**Ex-**08-11: Étudier les limites suivantes.

1) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$,

2) $\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$

3) $\lim_{x\to 2} \frac{5x-6-x^2}{4-x^2}$

4) $\lim_{x\to -2^+} \frac{5x-6-x^2}{4-x^2}$

5) $\lim_{x\to\infty} e^{x^2} \lfloor e^{8\sqrt{x}-x} \rfloor$

6) $\lim_{x\to 0^\pm} x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

7) $\lim_{x\to 0^\pm} \lfloor x \rfloor \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

**Ex-**08**-**12: Trouver les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les limites suivantes existent :

1) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-\alpha}{x-2}$

2) $\lim_{x\to \alpha} \frac{(\tan(x-\alpha))^2}{(x-\alpha)^2}$

3) $\lim_{x\to \alpha} \frac{x^4-2\alpha x^3+4x^2}{(x-\alpha)^2}$