

Ex-06-01: Résoudre dans \mathbb{C} , puis représenter les solutions dans le plan complexe.

- a) $z^5 = 1$ c) $z^4 = -2i$
b) $z^2 = -3 + 4i$ d) $z^3 = -\sqrt{3} + i$

Ex-06-02: Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} :

- a) $z^2 + 6z + 12 - 4i = 0$ c) $\bar{z}^2 = z + 1$ d) $\left(\frac{z}{|z|}\right)^3 = i$
b) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

Ex-06-03: Trouver la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de tous les nombres complexes z solutions de l'équation

$$z^2 = (1 + \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}})^8.$$

Ex-06-04: Décomposer le polynôme $z^6 + 1$ en produit de facteurs irréductibles complexes et en produit de facteurs irréductibles réels.

Ex-06-05: Factoriser les polynômes suivants :

- a) $P(z) = z^3 - 2z - 4$
b) $P(z) = z^3 + iz^2 + (1 + 2i)z + i + 2$.
c) $P(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^9 + z^{10}$

Ex-06-06: Vrai ou faux ?

- a) Le polynôme $z^2 + 1$ divise $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1$.
b) Si z_1, \dots, z_n sont les racines complexes du polynôme

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0,$$

alors $\prod_{j=1}^n z_j = (-1)^n a_0$.

- c) Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit purement imaginaire.
d) Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 - i\sqrt{3})^n$ soit réel.

Ex-06-07: Soit (x_n) une suite croissante.

- a) Montrer que si (x_n) possède une sous-suite majorée, alors (x_n) est majorée.
b) Montrer que si (x_n) possède une sous-suite qui tend vers l'infini, alors elle tend vers l'infini.

Ex-06-08: Parmi les séries ci-dessous, lesquelles convergent ?

- a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{1000n}}$ b) $\sum_{n \geq 1} \frac{(n-1)!}{n!}$ d) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{e^{2 \log n}}$
c) $\sum_{n \geq 0} e^{-0.001n}$

Ex-06-09: Si $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont convergentes, montrer que $\sum_n (a_n + b_n)$ est convergente, et que

$$\sum_n (a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n.$$

Ex-06-10: Déterminer, parmi les séries ci-dessous, celles qui convergent ou divergent, en les comparant (lorsque c'est possible) à d'autres séries connues.

a) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 1}$

b) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{e^n + n}$

d) $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n}}{n^2 - 1}$

c) $\sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{n^2}{3n^2 + 3}\right)^n$